Marius Müller
Saskia Glaffig
Simone Hermann
Wintersemester 2021/2022
Punktzahl: 8+2=10 Punkte

Gewöhnliche Differentialgleichungen: Blatt 5

1. [siehe Übung 61, p. 66] GEOMETRIE UND KONVEXITÄT. (1+1+1+2*= 3+2* Punkte)
Es sei $f \in C^2((a,b);\mathbb{R})$ konvex.

(a) Zeigen Sie: Dann gilt für alle $x, x_0 \in (a,b)$, dass

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{1}$$

(b) Folgern Sie: Ist $f'(x_0) = 0$ für ein $x_0 \in (a,b)$, so ist x_0 ein globales Minimum von f auf (a,b).

(c) Formulieren Sie analoge Versionen von Teil 1 und 2 für konkave Funktionen.

(d*). [Bonusaufgabe.] Zeigen Sie: f ist genau dann konvex wenn für alle $x, x_0 \in (a,b)$ die Ungleichung (1) gilt.

2. [siehe Übung 58, p. 62] EXPLIZITE LÖSUNGEN DURCH ENERGIEERHALTUNG — II. (3 Punkte)
Es sei das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y''(t) = e^{2y(t)} & (t \in I) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = y_1 \end{cases} \tag{2}$$

für ein beliebiges $y_1 \in (0,1)$ gegeben. Zeigen Sie, dass es keine globale Lösung auf $I = \mathbb{R}$ gibt.

3. [siehe Übung 57, p.59] LÖSEN EINER EXAKTEN DGL. (2 Punkte)
Gegeben sei die DGL

$$4t^3 y(t) + (y(t)^2 + 1 + t^4)y'(t) = 0 \qquad (t \in \mathbb{R}). \tag{3}$$

Finden Sie ein Integral der Bewegung und zeigen Sie, dass alle Lösungen auf $I = \mathbb{R}$ beschränkt sind. Können Sie die allgemeine Lösung explizit angeben?