UNI FREIBURG

Datum:
Mittwoch, 02.03.2022

Marius Müller
Saskia Glaffig
Simone Hermann
Wintersemester 2021/2022
Punktzahl: 100 Punkte

Gewöhnliche Differentialgleichungen: Klausur

Die Bearbeitungszeit beträgt 150 Minuten (=2,5 Stunden). Zugelassene Hilfsmittel: Formelsammlung.

1. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL (10 Punkte)

$$y'(t) = y(t) + t^2 \quad (t \in \mathbb{R}).$$

2. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von (15 Punkte)

$$z'(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} z(t). \qquad (t \in \mathbb{R})$$

3. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL (20 Punkte)

$$y''(t) - 5y'(t) + 4y(t) = 0 \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

4. Es sei $f : (-1, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(t, z) := \frac{\sqrt{1+z^2}}{t+1}$. (10 Punkte)
Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \quad (t \in I_{max}) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

eine eindeutige maximale Lösung besitzt und bestimmen Sie diese (mit Beweis der Maximalität).

5. Es sei $y \in C^1(I; \mathbb{R})$ eine Lösung der DGL (10 Punkte)

$$y'(t) = y(t)^2 \quad (t \in I)$$

gegeben. Zeigen Sie: Gibt es ein $t_0 \in I$ mit $y(t_0) = 0$, so gilt $y(t) = 0$ für alle $t \in I$.

6. Gegeben Sei das AWP (5+5+5 = 15 Punkte)

$$\begin{cases} 4t^3 y(t) + (y(t)^2 + 1 + t^4) y'(t) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

(a) Finden Sie ein Integral der Bewegung für die DGL.

(b) Zeigen Sie, dass das AWP eine eindeutige maximale Lösung $y \in C^1(I_{max}; \mathbb{R})$ besitzt.

(c) Zeigen Sie, dass $I_{max} = \mathbb{R}$.

7. Wahr oder falsch (mit Beweis oder Gegenbeispiel): (10 Punkte)
Es sei $f = (f_1, ..., f_n)^T : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ so, dass jede Komponente $f_i : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ einer globalen Lipschitz-Bedingung genügt. Dann genügt auch f einer globalen Lipschitz-Bedingung.

8. Zeigen Sie: Das Anfangswertproblem (10 Punkte)

$$\begin{cases} y'(t) = t^3 + t^2 \log(1 + y(t)^2) \quad (t \in \mathbb{R}) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

hat eine eindeutige globale Lösung $y \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.

Lösung zu Aufgabe 1. Wir verwenden die Lösungsformel Nr. 2 aus der Formelsammlung mit $a(t) = 1$ und $b(t) = t^2$. Dann ist

$$e(t) = \exp\left(\int^t 1 \,\mathrm{d}s\right) = e^t \tag{1}$$

und somit jedes Element der Allgemeinen Lösung gegeben durch

$$y(t) = e(t)\left(c + \int^t \frac{b(s)}{e(s)}\right) \mathrm{d}s = e^t\left(c + \int^t s^2 e^{-s} \,\mathrm{d}s\right). \tag{2}$$

Wir berechnen das Integral mithilfe von mehrfacher partieller Integration.

$$\int^t s^2 e^{-s} \,\mathrm{d}s = t^2(-e^{-t}) - \int^t 2s(-e^{-s}) \,\mathrm{d}s = -t^2 e^{-t} + \int^t 2se^{-s} \,\mathrm{d}s \tag{3}$$

$$= -t^2 e^{-t} + 2t(-e^{-t}) - \int 2(-e^{-s}) \,\mathrm{d}s = -t^2 e^{-t} - 2te^{-t} + 2\int^t e^{-s} \,\mathrm{d}s \tag{4}$$

$$= -t^2 e^{-t} - 2te^{-t} - 2e^{-t}. \tag{5}$$

Das bedeutet

$$\mathbb{L} = \{y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, y(t) = e^t(c - t^2 e^{-t} - 2te^{-t} - 2e^{-t}) \text{ für ein } c \in \mathbb{R}\}. \tag{6}$$

Lösung zu Aufgabe 2. Es sei $z = (z_1, z_2, z_3, z_4)^T \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^4)$ eine Lösung. Dann gilt

$$\begin{pmatrix} z_1'(t) \\ z_2'(t) \\ z_3'(t) \\ z_4'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \\ z_4(t) \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Entkoppelt man wiederum die beiden (unabhängigen) Jordan-Blöcke, so erhält man

$$\begin{pmatrix} z_1'(t) \\ z_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} z_3'(t) \\ z_4'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_3(t) \\ z_4(t) \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Mit Lösungsformel Nr. 3 aus der Formelsammlung (mit $S = I_{2\times 2}$, da die Matrix bereits ein Jordan-Block zum Eigenwert 2 ist) erhalten wir $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{C}$ mit

$$\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = E(t) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} z_3(t) \\ z_4(t) \end{pmatrix} = E(t) \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

wobei

$$E(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \tag{10}$$

Für die gesamte Lösung erhalten wir (mit $c = (c_1, c_2, c_3, c_4)^T \in \mathbb{C}^4$

$$z(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \\ z_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} c. \tag{11}$$

Mit anderen Worten

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} c : c \in \mathbb{C}^4 \right\}. \tag{12}$$

Lösung zu Aufgabe 3. Wir definieren für eine beliebige Lösung $z_0(t) := y(t)$ und $z_1(t) := y'(t)$. Dann gilt

$$z_0'(t) = y'(t) = z_1(t) \tag{13}$$

und

$$z_1'(t) = y''(t) = 5y'(t) - 4y(t) = -4z_0(t) + 5z_1(t). \tag{14}$$

Wir erhalten

$$\begin{pmatrix} z_0'(t) \\ z_1'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0(t) \\ z_1(t) \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Um dieses DGL-System zu lösen definieren wir $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$ und berechnen die Eigenwerte von A. Dazu:

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -4 & 5-\lambda \end{pmatrix} = \lambda(\lambda - 5) + 4 = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = (\lambda - 1)(\lambda - 4). \tag{16}$$

Wir berechen nun

$$\ker(A - 1 \cdot I) = \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} = \operatorname{span} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{17}$$

$$\ker(A - 4 \cdot I) = \ker \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{span} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Somit diagonalisiert $S := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ die Matrix A, mit

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Die Allgmeine Lösung für die DGL für $(z_0, z_1)^T$ ist dann nach Lösungsformel Nr. 3 gegeben durch

$$\tilde{\mathbb{L}} := \{M(t)c : c \in \mathbb{C}^2\}, \tag{20}$$

mit

$$M(t) := SE(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{4t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & e^{4t} \\ e^t & 4e^{4t} \end{pmatrix} \tag{21}$$

Wir erinnern uns, dass $y(t) = z_0(t) = \langle (z_0(t), z_1(t))^T, e_1 \rangle$ und daher gibt es $c = (c_1, c_2)^T \in \mathbb{C}^2$ mit

$$y(t) = \langle M(t)c, e_1 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} e^t c_1 + e^{4t} c_2 \\ e^t c_1 + 4e^{4t} c_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = c_1 e^t + c_2 e^{4t}. \tag{22}$$

Daher gilt

$$\mathbb{L} = \{c_1 e^t + c_2 e^{4t} : c_1, c_2 \in \mathbb{C}^2\}. \tag{23}$$

Lösung zu Aufgabe 4. Da f auf $(-1, \infty) \times \mathbb{R}$ stetig diffbar ist, erfüllt f eine lokale Lipschitz-Bedingung. Somit existiert eine eindeutige maximale Lösung. Wir bestimmen zunächst einen Kandidaten für die maximale Lösung mithilfe der Separation der Variablen. Hierzu beobachten wir, dass

$$\frac{y'(t)}{\sqrt{1 + y(t)^2}} = \frac{1}{t+1} \tag{24}$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^t \frac{y'(s)}{\sqrt{1 + y(s)^2}} \, \mathrm{d}s = \int_0^t \frac{1}{s+1} \, \mathrm{d}s \tag{25}$$

$$\Rightarrow \quad \int_{y(0)}^{y(t)} \frac{1}{\sqrt{1 + z^2}} \, \mathrm{d}z = \log(t+1) \tag{26}$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{Arsinh}(y(t)) = \log(t+1) \tag{27}$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = \sinh(\log(t+1)). \tag{28}$$

Da das maximal mögliche Definitionsintervall für diese Funktion $(-1, \infty)$ ist, ist unser Kandidat gegeben durch $I_{max} = (-1, \infty)$ und $y_{max}(t) = \sinh(\log(t+1))$. Dass es sich um eine Lösung handelt, rechnet man leicht nach, schließlich gilt auf $(-1, \infty)$ auch die Rückrichtung in der vorigen Rechnung. Da die Lösung bereits auf dem größtmöglichen Definitionsintervall $I_{max} = I = (-1, \infty)$ definiert ist, ist die Lösung maximal.

Lösung zu Aufgabe 5. Es sei $t_0 \in I$ mit $y(t_0) = 0$. Dann löst y das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) = y(t)^2 \quad (t \in I) \\ y(t_0) = 0 \end{cases}. \tag{29}$$

Da $f(t, z) := z^2$ stetig diffbar auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist (also insbesondere eine lokale Lipschitz-Bedingung erfüllt) besitzt das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} z'(t) = z(t)^2 \\ z(t_0) = 0 \end{cases} \tag{30}$$

eine eindeutige maximale Lösung. Diese ist, wie man leicht nachrechnet, gegeben durch $z(t) := 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Da diese Lösung maximal ist muss die Lösung von (29) eine Einschränkung der maximalen Lösung $z \equiv 0$ sein. Wir folgern also $y = z|_I \equiv 0$.

Lösung zu Aufgabe 6.

(a) Die DGL ist sicherlich exakt, wie man sieht, wenn man die Integrabilitätsbedingungen für $p(\tau, z) := 4\tau^3 z$ und $q(\tau, z) := z^2 + 1 + t^4$ überprüft. Nach Formelsammlung ist jedes $\phi \in C^1(\mathbb{R}^2)$ mit $\nabla\phi = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ ein Integral der Bewegung. Wir bestimmen ein solches ϕ, indem wir p bezüglich τ integrieren und q bezüglich z integrieren. Ersteres liefert

$$\phi(\tau, z) = \tau^4 z + c(z) \tag{31}$$

für eine nur von z abhängige Funktion c. Letzteres liefert

$$\phi(\tau, z) = \frac{1}{3}z^3 + (1 + \tau^4)z + \tilde{c}(\tau) = \frac{1}{3}z^3 + z + \tau^4 z. \tag{32}$$

Man sieht, dass

$$\phi(\tau, z) = \frac{1}{3}z^3 + z + \tau^4 z \tag{33}$$

beide vorige Bedingungen erfüllt und somit eine zulässige Stammfunktion ist. Wir schließen

$$\frac{1}{3}y(t)^3 + (1 + t^4)y(t) = \phi(t, y(t)) \equiv \text{const.} \tag{34}$$

(b) Wir formen die DGL äquivalent um und erhalten

$$y'(t) = -\frac{4t^3 y(t)}{y(t)^2 + 1 + t^4}. \tag{35}$$

Da die Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(t, z) := \frac{4t^3 z}{z^2+1+t^4}$ stetig differenzierbar auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ stetig differenzierbar ist, erhalten wir für jedes beliebige Anfangswertproblem die Existenz einer maximalen Lösung aus dem (lokalen) Satz von Picard-Lindelöf. Somit besitzt auch unser AWP eine eindeutige maximale Lösung.

(c) Zu zeigen ist, dass die Lösung global ist. Hierzu weisen wir nach, dass $f(t, z) = \frac{4t^3 z}{z^2+1+t^4}$ eine lineare Wachstumsbedingung erfüllt. Dazu

$$|f(t, z)| = \frac{4|t|^3|z|}{z^2 + 1 + t^4} \le \frac{4|t|^3|z|}{1} = 4|t|^3|z| \le 4|t|^3(1 + |z|). \tag{36}$$

Das lineare Wachstumskriterium (siehe Formelsammlung p.2) ist erfüllt mit $c(s) := 4|s|^3$. Somit besitzt jedes Anfangswertproblem eine eindeutige globale Lösung, insbesondere auch das Gegebene.

Lösung zu Aufgabe 7. Es genüge jede Komponente $f_i : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ einer globalen Lipschitz-Bedingung, d.h. für alle $i \in \{1, ..., n\}$ existiert ein $L_i > 0$ mit der Eigenschaft, dass

$$|f_i(t, y) - f_i(t, z)| \le L_i|y - z| \quad \forall t \in I\ \forall y, z \in \mathbb{R}^n \tag{37}$$

Dann gilt für alle $t \in I$ und $y, z \in \mathbb{R}^n$

$$|f(t, y) - f(t, z)| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |f_i(t, y) - f_i(t, z)|^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} L_i^2|y - z|^2} = |y - z|\sqrt{\sum_{i=1}^{n} L_i^2}. \tag{38}$$

Es folgt für alle $t \in I$ und $y, z \in \mathbb{R}^n$

$$|f(t, y) - f(t, z)| \le L|y - z| \tag{39}$$

mit $L := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} L_i^2}$.

Lösung zu Aufgabe 8. Wir überprüfen das lineare Wachstumskriterium für $f(t, z) := t^3 + t^2 \log(1 + z^2)$. Man beachte vorab, dass diese Funktion wiederum wegen ihrer stetigen Differenzierbarkeit auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ eine lokale Lipschitz-Bedingung erfüllt. Für die Wachstumsabschätzung beobachten wir zunächst, dass nach den Logarithmusgesetzen

$$0 \le \log(1 + z^2) = 2 \cdot \frac{1}{2}\log(1 + z^2) = 2\log\sqrt{1 + z^2} \le 2\sqrt{1 + z^2}. \tag{40}$$

Hierbei haben wir die Ungleichung $\log(u) \leq u$ für alle $u \geq 1$ verwendet. Ferner gilt auch $\sqrt{1+z^2} \leq 1 + |z|$ wie man durch Wurzelziehen aus der folgenden Ungleichung erhält

$$(1 + |z|)^2 = 1 + 2|z| + |z|^2 \geq 1 + z^2. \tag{41}$$

Mit den vorigen beiden Gleichungen folgt also

$$|\log(1 + z^2)| \leq 2(1 + |z|). \tag{42}$$

Wir schließen

$$|f(t,z)| = |t^3 + t^2 \log(1 + z^2)| \leq |t|^3 + t^2 |\log(1 + z^2)| \leq |t|^3 + 2t^2(1 + |z| \leq (|t|^3 + 2t^2)(1 + |z|). \tag{43}$$

Die lineare Wachstumsabschätzung folgt mit $c(s) = |s|^3 + 2s^2$.