UNIVERSITÄT LEIPZIG

Übungsblatt

Abgabe am:
Montag, 08.05.2023

Marius Müller
Bernd Käßemodel
Sommersemester 2023
Punktzahl: 20 Punkte

Funktionentheorie: Blatt 5

1. [1+1+1+2+1=6 Punkte]

(a) Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $f(z) = |z|^2$. Zeigen Sie: f ist bei $z_0 \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar genau dann wenn $z_0 = 0$.

(b) Für welche $z_0 \in \mathbb{C}$ ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto |z|^2 + z^3$ bei z_0 komplex differenzierbar?

(c) Zeigen Sie auf drei verschiedene Arten, dass $f(z) = z^2$ auf $\mathbb{C}$ holomorph ist:

- (c1) Direkt mit der Definiton der komplexen Differenzierbarkeit.
- (c2) Mit Korollar 102.
- (c3) Durch Benutzung der Cauchy-Riemann-Gleichungen.

(d) Es sei $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ mit $|f(z)| \equiv \text{const.}$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie: Dann ist f konstant.

(e) Es sei $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f' \neq 0$ auf D. Zeigen Sie: f ist winkeltreu.

2. [2+1+2+1=6 Punkte] Es sei $\psi : \mathbb{S}^2_{Rm} \to \mathbb{C}_\infty$ die stereographische Projektion. Betrachten Sie für $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ eine Ebene $E \subset \mathbb{R}^3$ gegeben durch $E = \{(\eta_1, \eta_2, \eta_3) \in \mathbb{R}^3 : \alpha\eta_1 + \beta\eta_2 + \gamma\eta_3 + \delta = 0\}$.

(a) Zeigen Sie: $\psi(E \cap \mathbb{S}^2_{Rm})$ ist stets eine Gerade oder ein Kreis.

(b) Finden Sie eine Ebene $E \subset \mathbb{R}^3$ so, dass $\psi(E \cap \mathbb{S}^2_{Rm})$ tatsächlich eine Gerade ist.

(c) Folgern Sie aus Teilaufgabe (a). Ist $A \subset \mathbb{C}_\infty$ eine Gerade oder ein Kreis, so ist $\psi^{-1}(A)$ stets ein Kreis, d.h. $\psi^{-1}(A) = E \cap \mathbb{S}^2_{Rm}$ für eine Ebene $E \subset \mathbb{R}^3$.

(d) Folgern Sie: Ist $T : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ eine Möbiustransformation, so bildet $\tilde{T} := \psi^{-1} \circ T \circ \psi$ Kreise auf Kreise ab.

3. [2 Punkte] Gegeben sei für ein $w \in B_1(0)$ und ein $\varphi \in \mathbb{R}$ die Möbiustransformation $T(z) = e^{i\varphi}\frac{z-w}{1-\bar{w}z}$. Zeigen Sie, dass $T(B_1(0)) \subset B_1(0)$. Was folgt daraus für $\psi^{-1} \circ T \circ \psi : \mathbb{S}^2_{Rm} \to \mathbb{S}^2_{Rm}$?

4. [1+1+1+1+2=6 Punkte] Für eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ und $z \in D$, definieren wir (sofern existent)

$$\partial_x f(z) := \lim_{h \to 0, h \in \mathbb{R}} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \quad \text{und} \quad \partial_y f(z) := \lim_{h \to 0, h \in \mathbb{R}} \frac{f(z+ih) - f(z)}{h}.$$

Ferner definieren wir (sofern existent)

$$\partial_z f := \tfrac{1}{2}(\partial_x f - i\partial_y f) \quad \text{und} \quad \partial_{\bar{z}} f := \tfrac{1}{2}(\partial_x f + i\partial_y f) \quad \text{sowie} \quad \Delta f = \partial_x(\partial_x f) + \partial_y(\partial_y f).$$

(a) Zeigen Sie: $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ genau dann wenn $\partial_{\bar{z}} f = 0$.

(b) Zeigen Sie: Für $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ gilt $\partial_x f(z) = -i\partial_y f(z) = \partial_z f(z) = f'(z)\ \forall z \in \mathbb{C}$.

(c) Zeigen Sie $\Delta f = 4\partial_z\partial_{\bar{z}} f$. Eine Funktion mit $\Delta f = 0$ nennen wir *harmonisch*. Folgern Sie, dass jede holomorphe Funktion harmonisch ist.

(d) Zeigen Sie $\overline{\partial_z f} = \partial_{\bar{z}} \bar{f}$. Folgern Sie: f und $\bar{f}$ sind beide genau dann holomorph, wenn f konstant ist.

(e) Es sei $f : D \to \mathbb{C}$ harmonisch. Zeigen Sie: Dann ist $\omega := \frac{\overline{\partial_{\bar{z}} f}}{\partial_z f}$ holomorph.