Elemente der Funktionentheorie, Probeklausur

Erlaubte Hilfsmittel: keine (im Anhang befindet sich eine kleine Formelsammlung)
Es sind **120 Punkte** erreichbar, jedoch zählen 100 Punkte als 100 Prozent.
Bitte auf jedem Blatt nur eine Aufgabe bearbeiten und dokumentenechte Stifte verwenden. Falls zwei undurchgestrichene Lösungen für dieselbe Aufgabe abgegeben werden, so wird die schlechtere gewertet. Daher bitte alle Rechenwege bis auf einen sauber durchstreichen. Antworten sind stets zu begründen. Das Angabenblatt darf nach Abgabe der Klausur mit nach Hause genommen werden. Bitte nichts, was in die Wertung eingehen soll, auf das Angabenblatt schreiben!
VIEL ERFOLG!

Aufgabe 1:(10 Punkte)
Beweise für alle $z \in \mathbb{C}$

$$\cos^3(z) = \frac{\cos(3z) + 3\cos(z)}{4}.$$

Aufgabe 2:(10 Punkte)
Zeige: Für $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 2$ gilt

$$\sum_{j=0}^{k-1} \sin\left(j\frac{2\pi}{k}\right) = 0.$$

Aufgabe 3:(10 Punkte)
Bestimme alle Zweige des Logarithmus von $1 + i$ und skizziere mindestens drei von ihnen in der komplexen Zahlenebene.

Aufgabe 4: (10 Punkte)
Berechne

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{z^3(z^2+5)} dz.$$

Aufgabe 5: (10 Punkte)
Zeige

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{\overline{z}} = 0.$$

Aufgabe 6: (10 Punkte)
Berechne

$$\int_{|z|=7} \frac{\sin(z)}{z^2 - 5z + 4} dz.$$

Aufgabe 7:(10+10 = 20 Punkte)
a) Zeige, dass $-i \sinh(iz) = \sin(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.
b) Bestimme eine Potenzreihe, deren Einschränkung auf $\mathbb{C} \backslash \{0\}$ mit der Funktion

$$f(z) := \frac{\sinh(z)}{z} \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$$

zusammenfällt. Besitzt f eine analytische Fortsetzung auf ganz $\mathbb{C}$?[Keine Begründung, nur Ja oder Nein.] Wenn Ja, bestimme die Ableitung dieser Fortsetzung im Punkte $z = 0$.

Aufgabe 8:(10 Punkte)
Bestimme alle $z \in \mathbb{C}$ sodass

$$f(z) = \overline{z} e^{-z}$$

bei z komplex differenzierbar ist.

Aufgabe 9: (10 Punkte)
Zeige, dass die folgende Funktionenreihe gleichmäßig auf dem Ringgebiet $D := \{z \in \mathbb{C} | 1 < |z| < 2\}$ konvergiert:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2 + z^2}.$$

Aufgabe 10: (10 Punkte) [Achtung, Einserbremse]
Berechne

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{\sin^2(z)} dz.$$

Aufgabe 11:(5+5=10 Punkte)
Wir betrachten den metrischen Raum $\mathbb{C}_\infty$ versehen mit dem chordalen Abstand

$$\chi_2(z_1, z_2) := \begin{cases} \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\sqrt{1+|z_2|^2}} & z_1, z_2 \neq \infty \\ \frac{1}{\sqrt{1+|z_1|^2}} & z_2 = \infty, z_1 \neq \infty \\ \frac{1}{\sqrt{1+|z_2|^2}} & z_2 \neq \infty, z_1 = \infty \\ 0 & z_1 = z_2 = \infty \end{cases}$$

Es kann ohne Beweis vorausgesetzt werden, dass χ_2 tatsächlich eine Metrik definiert
a) Es sei nun $(w_n) \subset \mathbb{C}$ und $w \in \mathbb{C}$ so, dass $|w_n - w| \to 0$ Zeige: $\chi_2(w_n, w) \to 0$ für $n \to \infty$.
b) Zeige, dass eine beschränkte Folge $(w_n) \subset \mathbb{C}$ keine Teilfolge haben kann, sodass $\chi_2(w_n, \infty) \to 0$ für $n \to \infty$.

Formelsammlung

- Cauchy'sche Integralformel (für Ableitungen). Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet für das gewisse Vorraussetzungen gelten, die hier nie überprüft werden müssen. Dazu sei f holomorph auf Ω und stetig auf $\overline{\Omega}$. Dann gilt:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \tag{1}$$

- Diverse Identitäten für Funktionen:

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \quad (z \in \mathbb{C}) \tag{2}$$

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} \quad (z \in \mathbb{C}) \tag{3}$$

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} \quad (z \in \mathbb{C}) \tag{4}$$

$$\sinh(z) = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} z^{2k+1} \quad (z \in \mathbb{C}) \tag{5}$$

$$\cosh(z) = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} z^{2k} \quad (z \in \mathbb{C}) \tag{6}$$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \quad (z \in \mathbb{C}, |z| < 1) \tag{7}$$

- Identitäten für Summen:

$$\sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{1 - z^n}{1 - z} \quad (z \in \mathbb{C}, z \neq 1, n \in \mathbb{N}) \tag{8}$$

$$(z_1 + z_2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k} \quad (z_1, z_2 \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}) \tag{9}$$

- Cauchy-Riemann Differenzialgleichungen: Es sei f auf einer offenen Mengee $D \subset \mathbb{C}$ gegeben und $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$. Definiere $u(x, y) := Ref(x + iy)$ und $v(x, y) := Imf(x + iy)$. Ist f bei z_0 komplex differenzierbar so gilt bei (x_0, y_0)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{10}$$

  Sind die oben genannten Ableitungen auf D stetig und erfüllen die Differenzialgleichungen bei (x_0, y_0), so kann auch gefolgert werden, dass f bei z_0 komplex differenzierbar ist.

- Wir definieren den komplexen Logarithmus wie folgt. Mit der Konvention $-\pi < \arg(z) \leq \pi$ setzen wir (mengenwertig)

$$\log(z) = \log|z| + i\arg(z) + 2\pi i n \quad (n \in \mathbb{Z}) \tag{11}$$

  Den Zewig des Logarithmus, der sich für $n = 0$ ergibt nennen wir Hauptzweig des Logarithmus (und dieser definiert damit tatsächlich eine Funktion)

- Die n - ten Einheitswurzeln: Für $n \in \mathbb{N}$ gilt: $z^n = 1$ wird gelöst von

$$z_j = e^{\frac{2j\pi i}{n}} \quad j = 0, ..., n-1. \tag{12}$$