UNIVERSITÄT LEIPZIG

Übungsblatt

Abgabe am:
Montag, 23.01.2023

Marius Müller
Robert Baumgarth
Wintersemester 2022/2023
Punktzahl: 16 Punkte

Gewöhnliche Differentialgleichungen: Blatt 13

1. [2 Punkte] Jede SIR-Pandemie stirbt aus! Es sei $y \in C^1(I;\mathbb{R}^3), y(t) = (S(t), I(t), R(t))^T$ eine SIR-Pandemie (mit $I \supset [0,\infty)$). Zeigen Sie

$$\lim_{t\to\infty} I(t) = 0. \tag{1}$$

2. [2+1+2= 5 Punkte] Wie viele Personen infizieren sich im Laufe der Pandemie? Es sei $y \in C^1(I;\mathbb{R}^3), y(t) = (S(t), I(t), R(t))^T$ eine SIR-Pandemie (mit $I \supset [0,\infty)$) und $\frac{\beta}{\alpha} < 1$. Aufgrund der Monotonie von R existiert

$$R_\infty := \lim_{t\to\infty} R(t). \tag{2}$$

(a) Zeigen Sie

$$R_\infty + \frac{\beta}{\alpha}\log(1 - R_\infty) = R(0) + \frac{\beta}{\alpha}\log S(0). \tag{3}$$

(b) Wir definieren die Funktion $W : (0, \frac{\beta}{\alpha}) \to (-\infty, \frac{\beta}{\alpha}\log(\frac{\beta}{\alpha}) - \frac{\beta}{\alpha})$ durch $W(x) = \frac{\beta}{\alpha}\log(x) - x$. Zeigen Sie, dass W bijektiv ist.

(c) Wie viele Personen werden sich im Laufe der Pandemie infizieren? Geben Sie eine explizite Formel an. (Diese Formel darf die Umkehrabbildung von W benutzen)

3. [1+2+1+2=6 Punkte] Der Wendepunkt der Pandemie. Es sei $y \in C^1(I;\mathbb{R}^3), y(t) = (S(t), I(t), R(t))^T$ eine SIR-Pandemie (mit $I \supset [0,\infty)$) mit $S(0) > I(0) + \frac{\beta}{\alpha}$.

(a) Sei $t \in [0,\infty)$. Zeigen Sie: $S''(t) = 0$ genau dann wenn $S(t) = I(t) + \frac{\beta}{\alpha}$.

(b) Zeigen Sie: Es gibt genau ein $t_w \in [0,\infty)$ mit $S''(t_w) = 0$. Zeigen Sie ferner $t_w < t^*$, wobei $t^* \in [0,\infty)$ der Höhepunkt der Pandemie ist.

(c) Prüfen Sie nach, dass t_w tatsächlich ein Wendepunkt ist, d.h. zeigen Sie $S'''(t_w) \neq 0$.

(d) Ein Frühindikator für den Höhepunkt der Pandemie! Es sei t_w wie in Aufgabe 3. Zeigen Sie $t_w < t_* \leqslant t_w + \frac{1}{\beta}$.

4. [3 Punkte] Es sei $(f_\lambda)_{\lambda\in(a,b)}$ eine Schar von Funktionen in $C^1(I \times G;\mathbb{R}^n)$, so, dass die Abbildung $F : I \times G \times (a,b) \to \mathbb{R}^n$, $F(\tau, z, \lambda) := f_\lambda(\tau, z)$ stetig differenzierbar ist. Sei ferner $\lambda_0 \in (a,b)$ beliebig. Für alle $\lambda \in (a,b)$ betrachten wir das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) = f_\lambda(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}. \tag{4}$$

Sei nun $y_\lambda \in C^1(\hat{I}_\lambda;\mathbb{R}^n)$ die eindeutige maximale Lösung dieses Anfangswerproblems. Zeigen Sie: Für alle $\varepsilon > 0$ und $t \in \hat{I}_{\lambda_0}$ gibt es ein $\delta > 0$ so, dass

$$|\lambda - \lambda_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad t \in \hat{I}_\lambda \text{ und } |y_\lambda(t) - y_{\lambda_0}(t)| < \varepsilon. \tag{5}$$

Hinweis. Betrachten die Das DGL-System

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} y'(t) \\ \lambda'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{\lambda(t)}(t, y(t)) \\ 0 \end{pmatrix} \\ \\ \begin{pmatrix} y(t_0) \\ \lambda(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \lambda_0 \end{pmatrix} \end{cases} \tag{6}$$

und verwenden Sie die stetige Abhängigkeit.