

Funktionentheorie – Complex Analysis

Marius Müller

Sommersemester 2022/2023

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Rechnen in \mathbb{C} | 4 |
| 1.1 | \mathbb{C} als Körper | 4 |
| 1.2 | \mathbb{C} als Vektorraum | 6 |
| 1.3 | Konjugation und Absolutbetrag | 8 |
| 1.4 | \mathbb{C} als Skalarproduktraum (und metrischer Raum) | 11 |
| 1.5 | Potenzreihen | 15 |
| 1.6 | Die Exponentialfunktion | 20 |
| 1.7 | Kosinus und Sinus | 23 |
| 1.8 | Polarkoordinaten | 27 |
| 1.9 | Der komplexe Logarithmus | 31 |
| 1.10 | (Einheits-)Wurzeln | 34 |
| 1.11 | Die Riemann'sche Zahlenkugel | 38 |
| 1.12 | Der chordale Abstand | 43 |
| 1.13 | Möbiustransformationen | 48 |
| 2 | Holomorphe Funktionen | 58 |
| 2.1 | Definition und grundlegende Eigenschaften | 59 |
| 2.2 | Beispiele für holomorphe Funktionen | 63 |
| 2.3 | Die Cauchy-Riemann-Gleichungen | 69 |
| 2.4 | Biholomorphe Abbildungen | 76 |
| 3 | Kurvenintegrale | 80 |
| 3.1 | Grundlagen der Integralrechnung über Kurven | 84 |
| 3.2 | Der Cauchy'sche Integralsatz | 90 |
| 3.3 | Die Cauchy'sche Integralformel | 101 |
| 3.3.1 | Der Fundamentalsatz der Algebra | 105 |
| 3.3.2 | Der Potenzreihenentwicklungssatz | 107 |
| 3.3.3 | Satz von Morera und Stammfunktionen | 112 |
| 3.3.4 | Identitätssatz für holomorphe Funktionen | 118 |
| 3.3.5 | Nullstellenverhalten | 121 |
| 3.3.6 | Gebietstreue und Maximumsprinzip | 125 |
| 3.4 | Umlaufzahl und Homotopie | 128 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 3.4.1 | Grundlagen zur Umlaufzahl | 128 |
| 3.4.2 | Umlaufzahlversion der Cauchy'schen Integralformel | 140 |
| 4 | Isolierte Singularitäten | 144 |
| 4.1 | Klassifikation der Singularitäten | 146 |
| 4.1.1 | Verhalten um hebbare Singularitäten | 148 |
| 4.1.2 | Verhalten um eine Polstelle | 150 |
| 4.1.3 | Verhalten um eine wesentliche Singularität | 153 |
| 4.2 | Laurentreihen | 154 |
| 4.3 | Der Residuensatz | 165 |
| 4.3.1 | Residuenbestimmung | 168 |
| 4.4 | Residuenkalkül | 174 |
| 4.4.1 | Trigonometrische Ausdrücke | 175 |
| 4.4.2 | Rationale Funktionen | 177 |
| 4.4.3 | Der Integralsinus | 185 |
| 4.4.4 | Das Argumentprinzip | 189 |
| 4.4.5 | *Die Fouriertransformation | 192 |
| 5 | *Die Gammafunktion | 195 |

Einführung

In dieser Vorlesung studieren wir Funktionen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, d.h. Funktionen einer komplexwertigen Veränderlichen. In der reellen Analysis haben wir bereits an einigen Stellen Funktionen von \mathbb{R}^2 nach \mathbb{R}^2 studiert. Aus der Algebra wissen wir nun aber, dass \mathbb{R}^2 und \mathbb{C} als Vektorräume isomorph sind. Auch sind \mathbb{R}^2 und \mathbb{C} als metrische Räume ineinander überführbar, d.h. es gilt

$$|(x, y)|_{\mathbb{R}^2} = |x + iy|_{\mathbb{C}} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

wobei $|\cdot|_{\mathbb{R}^2}$ die Euklidische Norm auf \mathbb{R}^2 und $|\cdot|_{\mathbb{C}}$ den komplexen Absolutbetrag bezeichnet. *Metrische Begriffe* wie *Stetigkeit*, *Beschränktheit* etc. sollten also dieselbe Bedeutung haben.

Sind Funktionen von \mathbb{C} nach \mathbb{C} dann überhaupt etwas anderes als Funktionen von \mathbb{R}^2 nach \mathbb{R}^2 ? Ja, denn es gibt einen strukturellen Unterschied! Auf \mathbb{C} gibt es (im Gegensatz zu \mathbb{R}^2) eine *Multiplikation*. Und die spielt eine ganz entscheidende Rolle beim *Differenzieren*: Wir sagen (für eine offene Teilmenge $D \subset \mathbb{C}$), dass $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ bei $z_0 \in D$ *komplex differenzierbar* ist, falls

$$f'(z_0) := \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad (2)$$

existiert. Der Grenzwert ist hier in \mathbb{C} zu verstehen. Dies sieht zunächst unschuldig aus. Wir werden aber sehen, dass komplex differenzierbare Funktionen einige sehr erstaunliche Eigenschaften haben (jedenfalls sofern sie auf einer ganzen offenen Menge $D \subset \mathbb{C}$ komplex differenzierbar sind). Ein Beispiel: Ist f auf D einmal komplex differenzierbar, so ist bereits unendlich oft komplex differenzierbar. Mit den herausgearbeiteten Eigenschaften holomorpher Funktionen werden wir auch in der Lage sein, den *Fundamentalsatz der Algebra* auf eine sehr anschauliche Art und Weise zu beweisen. Damit können wir das Algebra-Curriculum mithilfe von Analysis vervollständigen!

Funktionen, die auf einer offenen Menge $D \subset \mathbb{C}$ komplex differenzierbar sind, nennen wir auch *holomorph*. Interessant für uns werden vor allem holomorphe Funktionen mit *isolierten Singularitäten* sein, d.h. zum Beispiel $D = \mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$ für nur endlich viele Punkte $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$. Wir werden das Verhalten holomorpher Funktionen in einer Umgebung der Singularitäten $z_i \in \mathbb{C}$ untersuchen.

Unser Wissen werden wir benutzen, um komplexe *Kurvenintegrale* zu berechnen. Für eine Kurve $\gamma \in C^1([a, b]; D)$ und $f \in C^0(D; \mathbb{C})$ heißt

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt \in \mathbb{C} \quad (3)$$

das *komplexwertige Kurvenintegral* von f über γ . Ein zentrales Resultat unserer Vorlesung ist der *Residuensatz*, der eine einfache Formel für Kurvenintegrale von holomorphen Funktionen mit isolierten Singularitäten über geschlossene Kurven gibt. Interessanterweise spielt nur das Verhalten von f bei den Singularitäten eine Rolle.

Das *Residuenkalkül* erlaubt uns auch, einige reelle Integrale zu berechnen, die mithilfe klassischer Methoden (Stammfunktionen/Substitution/partielle Integration) nicht lösbar sind. Ein gutes Beispiel ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx. \quad (4)$$

Die Funktionentheorie ist bei vielen Studierenden besonders aufgrund ihrer schönen, klaren und wenig technischen Beweismethoden beliebt. Und auch Rechnen kann man in diesem Kurs sehr gut lernen!

Literaturhinweise

1. Jänich, Klaus. *Funktionentheorie. Eine Einführung*. Springer-Lehrbuch. Springer-Verlag, 1993. ISBN: 3-540-56337-7.
2. Salamon, Dietmar A. *Funktionentheorie*. Birkhäuser Basel. Springer-Verlag, 2012. ISBN: 978-3-0348-0168-3.
3. Freitag, Eberhard; Busam, Rolf. *Funktionentheorie*. Springer-Lehrbuch. Springer-Verlag, 1993. ISBN: 3-540-50618-7

Buch 1 und 2 sind gute “Lesebücher” die im Wesentlichen genau das Material der Vorlesung abbilden. Buch 1 zeichnet sich durch ausführliche Erklärungen aus, Buch 2 durch eine klare Darstellung mit vielen Abbildungen. Buch 3 behandelt neben dem Vorlesungsstoff auch einige weiterführende Themen, mit Querbezügen zu Zahlentheorie und Geometrie.

1 Rechnen in \mathbb{C}

In diesem Abschnitt wollen wir das Rechnen in den komplexen Zahlen wiederholen bzw. vertiefen. Die Idee der komplexen Zahlen ist, dass man zusätzlich zu den reellen Zahlen eine *imaginäre Zahl* i einführt, die der Gleichung

$$i^2 = -1 \tag{5}$$

genügt.

1.1 \mathbb{C} als Körper

In der linearen Algebra haben Sie einige Rechenregeln für komplexe Zahlen kennengelernt und mithilfe der Theorie der *Gruppen und Körper* verstanden. Dies wollen wir hier zunächst kurz wiederholen und später vertiefen.

Definition 1. KOMPLEXE ZAHLEN. Eine *komplexe Zahl* ist per Definition ein Ausdruck der Form

$$z = x + iy \quad (x, y \in \mathbb{R}). \tag{6}$$

Hierbei ist die Summation zunächst *formaler Ausdruck* zu verstehen und auch i ist ein formales Symbol. Mit \mathbb{C} bezeichnen wir die Menge aller komplexen Zahlen. Eine Zahl $z = x + iy \in \mathbb{C}$ heißt *reell*, falls $y = 0$ bzw. *rein imaginär*, falls $x = 0$. Wir bezeichnen die Menge aller reellen Zahlen mit \mathbb{R} und die Menge aller rein imaginären Zahlen mit $i\mathbb{R}$.

Ferner notieren wir für $z = x + iy \in \mathbb{C}$

$$\operatorname{Re}(z) := x, \quad \text{bzw.} \quad \operatorname{Im}(z) := y \quad (7)$$

und sprechen vom Real -und Imaginärteil von z . Ferner definieren wir für $x, y \in \mathbb{R}$ stets $x := x + i0$ und $iy := 0 + iy$ und $i := i1$.

Definition 2. RECHENOPERATIONEN AUF \mathbb{C} . Für $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}$ definieren wir

$$z_1 + z_2 := (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \quad (8)$$

und

$$z_1 \cdot z_2 := (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) \quad (9)$$

Wir erinnern uns aus der Algebra, dass $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ einen *Körper* definiert. Das neutrale Element bezüglich der Addition ist $0 := 0 + i0$ und das neutrale Element bezüglich der Multiplikation ist $1 := 1 + i0$. Ferner gilt für alle $y \in \mathbb{R}$ stets $i \cdot y = iy$, weswegen das Weglassen des Malpunktes keine Verwirrung erzeugen kann und wir die für das Rechnen in Körpern übliche Notation $z_1z_2 := z_1 \cdot z_2$ einführen können. Wir benutzen von nun an sämtliche bekannte Notationen für das Rechnen in Körpern, wie z.B. $-z, z^2, z^{-1}, \dots$

Insbesondere gelten für sämtliche $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$

- Kommutativgesetze, d.h. $(z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ sowie $z_1z_2 = z_2z_1)$,
- Assoziativgesetze, d.h. $(z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3 =: z_1 + z_2 + z_3$ sowie $(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3) =: z_1z_2z_3)$,
- Distributivgesetze, d.h. $(z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3)$.

Das multiplikative Inverse von $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist gegeben durch

$$\frac{1}{z} := z^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2}. \quad (10)$$

In der Tat gilt nach (9) für alle $z = x + iy \in \mathbb{C}$

$$z \cdot \frac{1}{z} = (x + iy) \left(\frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) \quad (11)$$

$$= \left[x \frac{x}{x^2 + y^2} - y \frac{-y}{x^2 + y^2} \right] + i \left[x \frac{-y}{x^2 + y^2} + y \frac{x}{x^2 + y^2} \right] = 1 + i0 = 1. \quad (12)$$

Durch Einsetzen in (10) findet man leicht raus, dass $\frac{1}{i} = -i$ und somit $i^2 = -1$. Wir definieren noch für $z_1 \in \mathbb{C}$ und $z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$\frac{z_1}{z_2} := z_1 \cdot \frac{1}{z_2}. \quad (13)$$

Nun, da wir diese Regeln eingeführt haben, können wir “wie gewohnt” mit komplexen Zahlen rechnen – mit dem einzigen Unterschied, dass $i^2 = -1$ ist. Insbesondere müssen wir das komplizierte Multiplikationsgesetz (9) nicht auswendig wissen — Es folgt durch direktes Nachrechnen aus den Rechengesetzen und $i^2 = -1$:

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 + iy_1)x_2 + (x_1 + iy_1)(iy_2) \quad (14)$$

$$= x_1x_2 + iy_1x_2 + (x_1 + iy_1) \cdot i \cdot y_2 \quad (15)$$

$$= x_1x_2 + iy_1x_2 + i(x_1 + iy_1)y_2 \quad (16)$$

$$= x_1x_2 + iy_1x_2 + i(x_1y_2 + iy_1y_2) \quad (17)$$

$$= x_1x_2 + iy_1x_2 + ix_1y_2 + i^2y_1y_2 \quad (18)$$

$$= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1). \quad (19)$$

Eine Notation sollten wir noch einführen: Schreiben wir ab jetzt “Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$ ”, so gehen wir stets implizit davon aus, dass $x, y \in \mathbb{R}$, d.h. $x = \operatorname{Re}(z)$ und $y = \operatorname{Im}(z)$. Man spricht davon, dass z in der *kanonischen Form* dargestellt ist.

1.2 \mathbb{C} als Vektorraum

Die komplexen Zahlen bilden auch einen *Vektorraum* — und das gleich auf zwei verschiedene Arten! Einmal als Vektorraum über \mathbb{R} und einmal als Vektorraum über \mathbb{C} . Im ersten Fall ist $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$ und $\{1, i\}$ bildet eine Basis von \mathbb{C} . Im zweiten Fall ist $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$ und $\{1\}$ bildet bereits eine Basis.

Je nachdem, was für einen Körper man vorschreibt, hat der Begriff einer *linearen Abbildung* eine andere Bedeutung.

Definition 3. \mathbb{R} -LINEARITÄT UND \mathbb{C} -LINEARITÄT. Eine Abbildung $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt \mathbb{R} -linear falls für alle $z, w \in \mathbb{C}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt, dass

$$\phi(z + w) = \phi(z) + \phi(w), \quad \phi(\lambda z) = \lambda\phi(z). \quad (20)$$

ϕ heißt \mathbb{C} -linear falls, (20) sogar für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt.

Insbesondere ist jede \mathbb{C} -lineare Abbildung auch \mathbb{R} -linear. Jedoch ist nicht jede \mathbb{R} -lineare Abbildung auch \mathbb{C} -linear.

Beispiel 4. Die Abbildung $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $\phi(z) := \operatorname{Re}(z)$ ist \mathbb{R} -linear aber nicht \mathbb{C} -linear.

Beispiel 4 könnte man entweder als Übungsaufgabe von Hand beweisen oder man verwendet die nachfolgende Charakterisierung

Proposition 5. Es sei $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine \mathbb{R} -lineare Abbildung. Dann ist ϕ \mathbb{C} -linear genau dann wenn es $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\phi(1) = \alpha + i\beta \quad \text{und} \quad \phi(i) = -\beta + i\alpha. \quad (21)$$

Beweis. “ \Rightarrow ”. Sei ϕ nun \mathbb{C} -linear. Definiere $\alpha := \operatorname{Re}(\phi(1))$ und $\beta := \operatorname{Im}(\phi(1))$. Insbesondere gilt schonmal $\phi(1) = \alpha + \beta i$. Nun gilt

$$-\alpha - i\beta = -(\alpha + i\beta) = -\phi(1) = \phi(-1) = \phi(i^2) = \phi(i \cdot i) = i\phi(i). \quad (22)$$

Hier haben wir in der letzten Gleichung die \mathbb{C} -Linearität (d.h. Gleichung (20) mit $\lambda = i$) verwendet. Ist nun $\phi(i) = x + iy$ so gilt nach der obigen Gleichung

$$-\alpha - i\beta = i(x + iy) = ix - y. \quad (23)$$

Daher gilt

$$x = \operatorname{Im}(ix - y) \stackrel{(23)}{=} \operatorname{Im}(-\alpha - i\beta) = -\beta \quad (24)$$

und

$$y = -\operatorname{Re}(ix - y) \stackrel{(23)}{=} -\operatorname{Re}(-\alpha - i\beta) = \alpha. \quad (25)$$

Somit gilt also $\phi(i) = x + iy = -\beta + i\alpha$. Es folgt (21). Nun zu “ \Leftarrow ”. Es sei $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ nun \mathbb{R} -linear und es gelte (21) für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. \mathbb{Z} ϕ ist sogar \mathbb{C} -linear. Wir stellen zunächst fest, dass $\phi(i) = i\phi(1)$, denn

$$i\phi(1) \stackrel{(21)}{=} i(\alpha + i\beta) = i\alpha - \beta \stackrel{(21)}{=} \phi(i). \quad (26)$$

Es sei nun $z = x + iy \in \mathbb{C}$ und $\lambda = u + iv \in \mathbb{C}$. Dann gilt

$$\phi(\lambda z) = \phi((u + iv)(x + iy)) = \phi(ux - vy + i(vx + uy)) \quad (27)$$

$$\stackrel{\mathbb{R}\text{-Linearität}}{=} (ux - vy)\phi(1) + (vx + uy)\phi(i) \stackrel{(26)}{=} (ux - vy)\phi(1) + (vx + uy)i\phi(1) \quad (28)$$

$$= [(ux - vy) + i(vx + uy)]\phi(1) = (u + iv)(x + iy)\phi(1) = \lambda(x + iy)\phi(1) \quad (29)$$

$$= \lambda[x\phi(1) + yi\phi(1)] \stackrel{(26)}{=} \lambda[x\phi(1) + y\phi(i)] \stackrel{\mathbb{R}\text{-Linearität}}{=} \lambda[\phi(x) + \phi(iy)] = \lambda\phi(x + iy) \quad (30)$$

$$= \lambda\phi(z). \quad (31)$$

Die \mathbb{C} -Linearität folgt.

Korollar 6. Eine \mathbb{R} -lineare Abbildung $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann \mathbb{C} -linear wenn $\phi(i) = i\phi(1)$.

Beweis. Wir formen um

$$\phi(i) = i\phi(1) \quad (32)$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Re}(\phi(i)) = \operatorname{Re}(i\phi(1)) \quad \text{und} \quad \operatorname{Im}(\phi(i)) = \operatorname{Im}(i\phi(1)), \quad (33)$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Re}(\phi(i)) = -\operatorname{Im}(\phi(1)) \quad \text{und} \quad \operatorname{Im}(\phi(i)) = \operatorname{Re}(\phi(1)). \quad (34)$$

Ist nun $\phi(1) = \alpha + i\beta$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ so ist die letzte Bedingung äquivalent zu

$$\operatorname{Re}(\phi(i)) = -\beta \quad \text{und} \quad \operatorname{Im}(\phi(i)) = \alpha. \quad (35)$$

Das bedeutet $\phi(i) = -\beta + i\alpha$. Mit (21) folgt die Behauptung.

Beispiel 7. Wir betrachten nun wieder die \mathbb{R} -lineare Abbildung $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch $\phi(z) = \operatorname{Re}(z)$. Man sieht, dass $\phi(1) = 1$ und $\phi(i) = 0$. Insbesondere gilt $\phi(i) \neq i\phi(1)$. Somit kann ϕ nach dem vorigen Korollar nicht \mathbb{C} -linear sein.

Man beachte, dass jede \mathbb{R} -lineare Abbildung durch ihre Werte auf der Basis $\mathcal{B} := \{1, i\}$ eindeutig bestimmt ist. Somit charakterisiert für gegebenes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ die Gleichung (21) die Abbildung ϕ eindeutig. Für eine Abbildung $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ wie in (21) kann man auch die *Darstellungsmatrix* bezüglich der Basis $\mathcal{B} := \{1, i\}$ bestimmen und erhält

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}. \quad (36)$$

Zum Schluss dieses Abschnittes sollten wir noch erwähnen, dass jede \mathbb{C} -lineare Abbildung durch die Multiplikation mit einer komplexen Zahl gegeben ist.

Proposition 8 Eine Abbildung $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann \mathbb{C} -linear wenn es ein $w \in \mathbb{C}$ gibt mit $\phi(z) = wz$ für alle $z \in \mathbb{C}$

Beweis. Wir zeigen nur “ \Leftarrow ”. Für “ \Rightarrow ” verweisen wir auf Übungsblatt 1. Es sei $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine \mathbb{C} -lineare Abbildung. Dann gilt für $z \in \mathbb{C}$

$$\phi(z) = \phi(z \cdot 1) \stackrel{\text{C-Linearität}}{=} z\phi(1) = zw. \quad (37)$$

Für $\phi_w : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto zw$ gilt auch $\phi_w(1) = w = \operatorname{Re}(w) + i\operatorname{Im}(w)$ und $\phi_w(i) = iw = -\operatorname{Im}(w) + i\operatorname{Re}(w)$. Also erfüllt ϕ (21) mit $\alpha = \operatorname{Re}(w)$ und $\beta = \operatorname{Im}(w)$. Wir folgern, dass ϕ_w — also die Multiplikation mit w — durch die Matrix

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\phi_w) = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(w) & \operatorname{Im}(w) \\ -\operatorname{Im}(w) & \operatorname{Re}(w) \end{pmatrix} \quad (38)$$

dargestellt wird.

1.3 Konjugation und Absolutbetrag

Wir werden nun eine weitere Operation auf \mathbb{C} kennenlernen.

Definition 9. KOMPLEXE KONJUGATION. Es sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Dann nennen wir $\bar{z} := x - iy$ das *komplex Konjugierte* von z .

Für diese Operation gibt es einige nützliche Rechenregeln.

Proposition 10. RECHENREGELN FÜR DIE KOMPLEXE KONJUGATION Es gilt für $z, w \in \mathbb{C}$

- (i) $\operatorname{Re}(\bar{z}) = \operatorname{Re}(z)$, $\operatorname{Im}(\bar{z}) = -\operatorname{Im}(z)$
- (ii) $\bar{\bar{z}} = z$
- (iii) $\operatorname{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$, $\operatorname{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$.
- (iv) $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$.
- (v) $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$.
- (vi) Falls $w \neq 0$, so gilt $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$.

Beweis. Eigenschaft (i) folgt direkt aus der Definition. Zu (ii). Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ gilt $\bar{z} = x - iy = x + i(-y)$ und somit $\bar{\bar{z}} = x - i(-y) = x + iy = z$.

Zu (iii). Es gilt für $z = x + iy \in \mathbb{C}$, dass

$$\frac{z + \bar{z}}{2} = \frac{x + iy + (x - iy)}{2} = \frac{2x}{2} = x = \operatorname{Re}(z). \quad (39)$$

Die andere Gleichung beweist sich analog. Zu (iv). Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ und $w = u + iv \in \mathbb{C}$ gilt

$$\overline{z+w} = \overline{(x+u) + i(y+v)} = x+u - i(y+v) = (x-iy) + (u-iv) = \bar{z} + \bar{w}. \quad (40)$$

Zu (v). Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ und $w = u + iv \in \mathbb{C}$ gilt

$$\overline{zw} = \overline{(x+iy)(u+iv)} = \overline{xu - yv + i(yu + xv)} = xu - yv - i(yu + xv) \quad (41)$$

$$= xu - (-y)(-v) + i((-y)u + x(-v)) = (x-iy)(u-iv) = \bar{z}\bar{w}. \quad (42)$$

Zu (vi). Es gilt für $z, w \in \mathbb{C}$ mit Regel (v)

$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} \stackrel{(v)}{=} \frac{\bar{z}}{\bar{w}} = \bar{z} \quad (43)$$

Teilt man durch \bar{w} so ergibt sich (vi).

Definition 11. KOMPLEXER ABSOLUTBETRAG. Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ definieren wir $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$.

Der Wert ist stets derselbe wie die Euklidische Norm des Vektors $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Dies erklärt nun Gleichung (1). Auch für den Absolutbetrag gibt es Rechenregeln

Proposition 12. RECHENREGELN FÜR DEN KOMPLEXEN ABSOLUTBETRAG. Für $z, w \in \mathbb{C}$ gilt

- (i) $z \in \mathbb{R}, |z| \geq 0$ und $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
- (ii) $|z + w| \leq |z| + |w|, ||z| - |w|| \leq |z - w|$.
- (iii) $-|z| \leq \operatorname{Re}(z) \leq |z|, -|z| \leq \operatorname{Im}(z) \leq |z|$.
- (iv) $|z| = |\bar{z}|$.
- (v) $|z|^2 = z\bar{z}$.
- (vi) $|zw| = |z| |w|$.
- (vii) Falls $w \neq 0$ gilt $|\frac{z}{w}| = \frac{|z|}{|w|}$.

Beweis. (i),(iii) sind klar. (ii) wird bewiesen wie die Dreiecksungleichung (und inverse Dreiecksungleichung) für die Euklidische Norm in \mathbb{R}^2 .

Zu (iv). Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ gilt $|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$ und $|\bar{z}| = |x - iy| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$.

Zu (v). Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ gilt

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 - i^2y^2 = x^2 + y^2 = \sqrt{x^2 + y^2}^2 = |z|^2. \quad (44)$$

Zu (vi). Es gilt für $z, w \in \mathbb{C}$

$$|zw|^2 = (zw)\overline{zw} \stackrel{\text{Prop.10(v)}}{=} zw\bar{z}\bar{w} = (z\bar{z})(w\bar{w}) \stackrel{(v)}{=} |z|^2|w|^2. \quad (45)$$

Die Behauptung folgt durch Wurzelziehen.

Zu (vii). Mit (vi) folgt

$$|\frac{z}{w}||w| = |\frac{z}{w}w| = |z|. \quad (46)$$

Die Behauptung folgt durch Teilen durch $|w|$.

Beispiel 13. TEIL1. Stelle $\frac{2+3i}{3+2i} \in \mathbb{C}$ in *Normalform*, d.h. als $x + iy$ für $x, y \in \mathbb{R}$ dar. Ein guter Trick hierbei ist, mit dem komplex Konjugierten vom Nenner zu erweitern und

Regel (v) in Proposition 12 zu benutzen. Also

$$\frac{2+3i}{3+2i} = \frac{(2+3i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{(2+3i)(3-2i)}{|3+2i|^2} = \frac{12+5i}{3^2+2^2} = \frac{12+5i}{13} = \frac{12}{13} + i\frac{5}{13}. \quad (47)$$

TEIL2. Berechne $|\frac{2+3i}{3+2i}|$. Man könnte nun die Darstellung in (47) verwenden. Einfacher geht es aber oft mit Rechenregel (vii) der vorigen Proposition.

$$\left| \frac{2+3i}{3+2i} \right| = \frac{|2+3i|}{|3+2i|} = \frac{\sqrt{2^2+3^2}}{\sqrt{3^2+2^2}} = 1. \quad (48)$$

1.4 \mathbb{C} als Skalarproduktraum (und metrischer Raum)

Wir werden nun ein Skalarprodukt auf \mathbb{C} (aufgefasst als \mathbb{R} -Vektorraum) definieren und verstehen, dass der komplexe Absolutbetrag eine Norm ist, die von einem Skalarprodukt kommt. Dies ist dank (1) nicht verwunderlich, denn auch die Euklidische Norm $|\cdot|_{\mathbb{R}^2}$ kommt von einem Skalarprodukt, gegeben durch

$$\langle (x, y), (u, v) \rangle := xu + yv. \quad (49)$$

Nun gilt für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ und $w = u + iv \in \mathbb{C}$, dass

$$\operatorname{Re}(z\bar{w}) = \operatorname{Re}((x + iy)(u - iv)) = \operatorname{Re}(xu + yv + i(yu - xv)) = xu + yv. \quad (50)$$

Dadurch motiviert definieren wir

Definition 14. SKALARPRODUKT AUF \mathbb{C} . Wir definieren für $z, w \in \mathbb{C}$

$$\langle z, w \rangle := \operatorname{Re}(z\bar{w}). \quad (51)$$

Die Formel in (50) kann man auch ausdrücken durch

$$\langle z, w \rangle = \operatorname{Re}(z\bar{w}) = \operatorname{Re}(z)\operatorname{Re}(w) + \operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w). \quad (52)$$

Wir überzeugen uns nun davon, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tatsächlich ein Skalarprodukt definiert.

Proposition 15. Die Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$, $(z, w) \mapsto \langle z, w \rangle$ definiert ein Skalarprodukt auf \mathbb{C} (aufgefasst als Vektorraum über \mathbb{R}). Die durch dieses Skalarprodukt induzierte Norm ist der komplexe Absolutbetrag, d.h. $|z| = \sqrt{\langle z, z \rangle}$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Beweis. Wir prüfen die Skalarproduktaxiome nach. Man überzeugt sich leicht davon, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eine \mathbb{R} -bilineare Abbildung ist. Zur Symmetrie. Für $w, z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\langle w, z \rangle = \operatorname{Re}(w\bar{z}) = \operatorname{Re}(\overline{w\bar{z}}) = \operatorname{Re}(\bar{w}z) = \operatorname{Re}(\bar{w}z) = \operatorname{Re}(z\bar{w}) = \langle z, w \rangle. \quad (53)$$

Zur Definitheit. Es gilt

$$\langle z, z \rangle = \operatorname{Re}(z\bar{z}) = \operatorname{Re}(|z|^2) \stackrel{\text{Prop.12(i)}}{=} |z|^2, \quad (54)$$

Nach Proposition 12 (i) gilt $|z|^2 \geq 0$ und Gleichheit gilt genau dann wenn $|z| = 0$. Aus der obigen Gleichung folgt auch sofort, dass $|z| = \sqrt{\langle z, z \rangle}$.

Wir folgern: \mathbb{C} besitzt ein Skalarprodukt und somit auch eine *Norm*. Dies macht \mathbb{C} auch insbesondere zu einem *metrischen Raum*. Die Metrik ist dabei gegeben durch die *norminduzierte Metrik* $d_{|\cdot|} : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$d_{|\cdot|}(z, w) := |z - w|. \quad (55)$$

Deswegen kann man *metrische Begriffe* wie z.B. die Folgenkonvergenz auf gewohnte Art und Weise definieren und studieren. Im Folgenden schreiben wir für $A \subset \mathbb{C}$ stets $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ falls $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen ist mit $z_n \in A$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Definition 16. KONVERGENZ IN \mathbb{C} . Eine Folge komplexer Zahlen $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ heißt *konvergent* falls es ein $z \in \mathbb{C}$ gibt mit

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \quad |z_n - z| < \varepsilon \quad \forall n \geq N(\varepsilon). \quad (56)$$

Ein solches $z \in \mathbb{C}$ heißt *Grenzwert* von $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$. [Wie in der Analysis zeigt man, dass eine Folge höchstens einen Grenzwert besitzen kann. Man schreibt auch $z = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ oder $z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z$ oder $z_n \rightarrow z (n \rightarrow \infty)$].

Der so definierte Konvergenzbegriff ist konsistent mit dem Konvergenzbegriff, der von der norminduzierten Metrik $d_{|\cdot|}$ kommt. Da die Norm auf \mathbb{C} dieselben Eigenschaften wie die Norm von \mathbb{R}^2 hat, übertragen sich auch die meisten Eigenschaften der Konvergenz. Ein Beispiel dafür ist die *komponentenweise Betrachtungsregel der Konvergenz*

Proposition 17. Eine Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ ist genau dann konvergent wenn die reellen Zahlenfolgen $(\operatorname{Re}(z_n))_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ und $(\operatorname{Im}(z_n))_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ in \mathbb{R} konvergieren.

Beweis. Erbt sich von der Folgenkonvergenz in \mathbb{R}^2 .

Als Konsequenz folgt wie in der Analysis der *Satz von Bolzano-Weierstraß*.

Proposition 18. SATZ VON BOLZANO-WEIERSTRASS. Jede beschränkte Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ besitzt eine konvergente Teilfolge, d.h. es gibt eine Folge $(l_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$, $l_{n+1} > l_n$ so, dass $(z_{l_n})_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent ist.

Beweis. Erbt sich von der Folgenkonvergenz in \mathbb{R}^2 .

Wiederum eine Konsequenz davon ist die *Vollständigkeit*.

Proposition 19. VOLLSTÄNDIGKEIT VON \mathbb{C} . Eine Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ ist genau dann konvergent wenn sie das *Cauchy-Kriterium* erfüllt, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : |z_m - z_k| < \varepsilon \quad \forall k, m \geq N(\varepsilon). \quad (57)$$

Beweis. Erbt sich von der Folgenkonvergenz in \mathbb{R}^2 .

Eine grundlegende Eigenschaft konvergenter Folgen ist die *Beschränktheit*.

Proposition 20. Jede konvergente Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ ist *beschränkt*, d.h. es gibt ein $M > 0$ mit $|z_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Beweis. Erbt sich von der Folgenkonvergenz in \mathbb{R}^2 .

Für Folggrenzwerte in \mathbb{C} gelten auch einige *Grenzwert-Rechenregeln*, die teilweise nicht direkt etwas mit der Konvergenz in \mathbb{R}^2 zu tun haben.

Proposition 21. GRENZWERTREGELN IN \mathbb{C} . Es seien $z, w \in \mathbb{C}$ und $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}, (w_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ Folgen mit $z_n \rightarrow z, w_n \rightarrow w$ ($n \rightarrow \infty$). Dann gilt

(i) $|z_n - z| \rightarrow 0$ und $|z_n| \rightarrow |z|$ ($n \rightarrow \infty$).

(ii) $z_n + w_n \rightarrow z + w$ ($n \rightarrow \infty$).

(iii) $z_n w_n \rightarrow zw$ ($n \rightarrow \infty$).

(iv) Falls $w \neq 0$ so gilt $\frac{z_n}{w_n} \rightarrow \frac{z}{w}$ ($n \rightarrow \infty$).

(v) $\overline{z_n} \rightarrow \overline{z}$ ($n \rightarrow \infty$).

Beweis. Eigenschaften (i),(ii) ist den Lesenden als Übungsaufgabe überlassen. Zu (iii).

$$|z_n w_n - zw| = |(z_n - z)w_n + z(w_n - w)| \leq |(z_n - z)w_n| + |z(w_n - w)| = |z_n - z| |w_n| + |z| |w_n - w|. \quad (58)$$

Nun gibt es wegen Proposition 20 $M > 0$ so, dass $|w_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Deswegen folgt

$$|z_n w_n - zw| \leq |z_n - z| M + |z| |w_n - w|. \quad (59)$$

Wegen (i) gilt $|z_n - z| \rightarrow 0$ und $|w_n - w| \rightarrow 0$ für ($n \rightarrow \infty$). Somit folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n w_n - zw| = 0. \quad (60)$$

Man überzeugt sich leicht, dass aus dieser Gleichung $z_n w_n \rightarrow zw$ ($n \rightarrow \infty$) folgt. (iv)

kann leicht aus (iii) gefolgert werden. (v) folgt sofort aus

$$|\bar{z}_n - \bar{z}| = |\overline{z_n - z}| = |z_n - z|. \quad (61)$$

Nun wo wir Folngengrenzwerte in \mathbb{C} verstanden haben, können wir auch *Funktionsgrenzwerte* verstehen. Bevor wir das tun müssen wir uns zunächst aber mit ein paar topologischen Begriffen auseinandersetzen.

Intermezzo: Einige Worte zur Topologie von \mathbb{C} .

Definition 22. HÄUFUNGSPUNKTE/OFFENHEIT/ABGESCHLOSSENHEIT. Es sei $A \subset \mathbb{C}$ eine Menge. Ein Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ heißt *Häufungspunkt* von A , falls es eine Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A \setminus \{z_0\}$ gibt mit $z_n \rightarrow z_0$ ($n \rightarrow \infty$). Ein Punkt $z_0 \in A$, der kein Häufungspunkt von A ist, wird *isolierter Punkt* von A genannt. Die Vereinigung einer Menge A mit allen ihren Häufungspunkten wird *Abschluss* genannt und mit \bar{A} bezeichnet. Eine Menge $A \subset \mathbb{C}$ heißt *abgeschlossen*, falls $\bar{A} = A$. Eine Menge $D \subset \mathbb{C}$ heißt *offen*, falls $\mathbb{C} \setminus D$ abgeschlossen ist.

Man überzeugt sich leicht, dass die oben definierten Konzepte von Offenheit und Abgeschlossenheit äquivalent zu den Konzepten von Offenheit und Abgeschlossenheit im *metrischen Raum* $(\mathbb{C}, d_{|\cdot|})$ sind. Dazu dient die folgende

Proposition 23. Eine Menge $D \subset \mathbb{C}$ ist genau dann offen wenn es für alle $z \in D$ ein $\varepsilon > 0$ gibt mit

$$d_{|\cdot|}(z, w) < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad w \in D. \quad (62)$$

Definieren wir $B_\varepsilon(z) := \{w \in \mathbb{C} : d_{|\cdot|}(z, w) < \varepsilon\}$, so ist (62) äquivalent zu $B_\varepsilon(z) \subset D$.

Beweis. Ist den Lesenden als Übungsaufgabe überlassen.

Intermezzo Ende.

Nun können wir Funktionsgrenzwerte definieren.

Definition 24. FUNKTIONSGRENZWERTE IN \mathbb{C} . Es sei $A \subset \mathbb{C}$ eine Menge $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion und $z_0 \in \mathbb{C}$ ein Häufungspunkt von A . Ferner sei $\zeta \in \mathbb{C}$. Wir sagen f hat für $z \rightarrow z_0$ den Funktionsgrenzwert ζ , im Zeichen

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \zeta \quad \text{oder} \quad f(z) \rightarrow \zeta \quad (z \rightarrow z_0) \quad (63)$$

falls für jede Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ mit $z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z_0$ gilt, dass $f(z_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \zeta$.

Etliche bekannte Rechenregeln für Funktionsgrenzwerte übertragen sich auf \mathbb{C} . Wir werden diese Regeln an der Stelle nicht vertiefen und verweisen auf die Analysis-Grundlagenvorlesungen. Haben wir Funktionsgrenzwerte definiert, so können wir auch das wichtige Konzept der *Stetigkeit* einführen.

Definition 25. STETIGKEIT IN \mathbb{C} . Es sei $D \subset \mathbb{C}$ eine (hier beliebige, aber in der Praxis meist offene) Menge und $z_0 \in D$. Dann heißt $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ stetig in z_0 falls gilt

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0). \quad (64)$$

Ferner heißt $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ stetig auf D falls f in jedem Punkt $z_0 \in D$ stetig ist.

Auch dieser Stetigkeitsbegriff stimmt mit dem Konzept der Stetigkeit im metrischen Raum $(\mathbb{C}, d_{|\cdot|})$ überein.

Proposition 26. Es sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben. Dann ist f stetig auf D genau dann wenn für alle offenen Teilmengen $U \subset \mathbb{C}$ gilt, dass $f^{-1}(U) \subset D$ offen ist.

Beweis. Ist den Lesenden als Übungsaufgabe überlassen.

Beispiel 27. Die Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch $f(z) = |z|$ ist stetig (auf \mathbb{C}). In der Tat: Für alle $z_0 \in \mathbb{C}$ und alle Folgen $z_n \rightarrow z_0$ ($n \rightarrow \infty$) folgt mit Proposition 21 (i)

$$f(z_n) = |z_n| \longrightarrow |z_0| = f(z_0) \quad (n \rightarrow \infty). \quad (65)$$

Mit Definition 25 folgt die Stetigkeit. Für alle $U \subset \mathbb{C}$ ist also das Urbild $f^{-1}(U)$ offen. Man beachte: Das Bild $f(U)$ ist nicht zwingend offen, z.B. gilt für die offene(!) Menge $U = B_1(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$

$$f(B_1(0)) = [0, 1) := \{w \in \mathbb{C} : w \in \mathbb{R} \ \& \ 0 \leq w < 1\}. \quad (66)$$

1.5 Potenzreihen

Wir werden nun einige Funktionen auf \mathbb{C} über *Potenzreihen* einführen. Hierfür müssen wir zunächst wiederholen, was Konvergenz von Reihen bedeutet.

Definition 28. REIHENKONVERGENZ. Es sei $(z_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{C}$ eine Folge. Wir nennen für $m \in \mathbb{N}_0$

$$s_m := \sum_{n=0}^m z_n \in \mathbb{C} \quad (67)$$

die m -te Partialsumme von $(z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$. Wir sagen, dass die *unendliche Reihe* $\sum_{n \geq 0} z_n$ konvergent ist, falls $(s_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ eine konvergente Folge in \mathbb{C} ist. Andernfalls sagen wir, dass die unendliche Reihe $\sum_{n \geq 0} z_n$ divergiert. Im Fall, dass $\sum_{n \geq 0} z_n$ konvergiert, nennen wir

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n := \lim_{m \rightarrow \infty} s_m = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m z_n \quad (68)$$

den Wert der Reihe. Wir sagen, dass die Reihe $\sum_{n \geq 0} z_n$ *absolut konvergent* ist wenn die Reihe $\sum_{n \geq 0} |z_n|$ konvergent ist.

Wir haben in der Analysis gesehen, dass jede absolut konvergente Reihe in \mathbb{C} auch konvergent ist. Hierbei geht die *Vollständigkeit* von \mathbb{C} (siehe 19) massiv ein. Wir wiederholen das Argument zur Unterstützung der Lesenden.

Proposition 29. Jede absolut konvergente Reihe $\sum_{n \geq 0} z_n$ ist auch konvergent.

Beweis. Es sei $(z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ so, dass $\sum_{n \geq 0} z_n$ absolut konvergiert. Wir definieren für $m \in \mathbb{N}_0$

$$s_m := \sum_{n=0}^m z_n \quad (69)$$

die m -te Partialsumme bezüglich $(z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und

$$\tilde{s}_m := \sum_{n=0}^m |z_n| \quad (70)$$

die m -te Partialsumme bezüglich $(|z_n|)_{n \in \mathbb{N}_0}$. Berechne für $m, k \in \mathbb{N}_0$, etwa $m \geq k$,

$$|s_m - s_k| = \left| \sum_{n=k+1}^m z_n \right| \leq \sum_{n=k+1}^m |z_n| = |\tilde{s}_m - \tilde{s}_k|. \quad (71)$$

Dieselbe Abschätzung gilt (wie man leicht nachrechnet) auch für $k \geq m$. Da nun wegen der absoluten Konvergenz die Folge $(\tilde{s}_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ in \mathbb{C} konvergiert, erfüllt sie auch das Cauchy-Kriterium, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : |\tilde{s}_m - \tilde{s}_k| < \varepsilon \quad \forall m, k \geq N(\varepsilon). \quad (72)$$

Mit (71) folgt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : |s_m - s_k| < \varepsilon \quad \forall m, k \geq N(\varepsilon). \quad (73)$$

Somit erfüllt $(s_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ auch das Cauchy-Kriterium. Proposition 19 impliziert daher die Konvergenz von der Folge der Partialsummen $(s_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$. Wir folgern die Konvergenz der Reihe $\sum_{n \geq 0} z_n$ (siehe Definition 28).

Man beachte an dieser Stelle, dass nicht jede konvergente Reihe auch absolut konvergent ist. Ein gutes Beispiel dafür ist

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1}. \quad (74)$$

Auch hier verweisen wir für Details auf die Analysis-Vorlesung. Wir wiederholen nun zwei *Konvergenzkriterien* aus der Analysis

Satz 30. NOTWENDIGES NULLFOLGENKRITERIUM. Es sei $(z_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{C}$ eine Folge. Falls $\sum_{n \geq 0} z_n$ konvergiert, so gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$.

Beweis. Es sei $\sum_{n \geq 0} z_n$ konvergent. Definiere $s_m := \sum_{k=0}^m z_k$. Insbesondere ist für $n \in \mathbb{N}$

$$s_n - s_{n-1} = \sum_{k=n}^n z_k = z_n. \quad (75)$$

Wegen der Konvergenz der Reihe gibt es ein $s \in \mathbb{C}$ mit $s_m \rightarrow s$ ($m \rightarrow \infty$). Dann gilt

$$0 = s - s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n. \quad (76)$$

Die Behauptung folgt.

Satz 31. WURZELKRITERIUM. Es sei $(z_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{C}$ eine Folge. Man definiere $q := \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|}$. Ist $q < 1$, so ist $\sum_{n \geq 0} z_n$ absolut konvergent. Ist $q > 1$ so ist $\sum_{n \geq 0} z_n$ divergent.

Beweis. Siehe Analysis.

Desweiteren wird für uns das *Cauchy-Produkt* aus der Analysis wichtig sein.

Satz 32. CAUCHY-PRODUKT. Es seien $(z_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ und $(w_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}_0}$ so, dass $\sum_{j \geq 0} z_j$ und $\sum_{\ell \geq 0} w_\ell$ absolut konvergent sind. Dann konvergiert auch $\sum_{n \geq 0} (\sum_{k=0}^n z_k w_{n-k})$ absolut und es gilt

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} z_j \right) \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} w_\ell \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n z_k w_{n-k} \right). \quad (77)$$

Beweis. Siehe Otto Forster, Analysis 1. Satz 3 in § 8.

Definition 33. POTENZREIHE. Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{C}$ eine Folge und $z_0 \in \mathbb{C}$. Wir nennen für beliebiges $z \in \mathbb{C}$ den Ausdruck

$$P(z) := \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n \quad (78)$$

Potenzreihe bezüglich $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ um den *Referenzpunkt* $z_0 \in \mathbb{C}$. Wir definieren die *Konvergenzbereiche von P* durch

$$D_A := \{z \in \mathbb{C} : P(z) \text{ konvergiert absolut}\} \quad \text{und} \quad D_B := \{z \in \mathbb{C} : P(z) \text{ konvergiert}\}. \quad (79)$$

Die Abbildung $f_P : D_B \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch

$$f_P(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (z \in D_B) \quad (80)$$

heißt *Wertefunktion der Potenzreihe* P .

Man beachte insbesondere, dass nach Proposition 29 gilt $D_A \subset D_B$.

Beispiel 34. Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0} = (1)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und $z_0 = 0$. Dann ist

$$P(z) = \sum_{n \geq 0} z^n \quad (81)$$

stets eine *geometrische Reihe*. Aus der Analysis^a wissen wir, dass für alle $m \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{n=0}^m z^n = \begin{cases} \frac{1-z^{m+1}}{1-z} & z \neq 1 \\ m & z = 1 \end{cases} \quad (82)$$

Falls $|z| < 1$ so folgert man die Konvergenz von $P(z)$ leicht aus der obigen Formel. Falls $|z| \geq 1$ so ist das notwendige Nullfolgenkriterium (vgl. Satz 30) nicht erfüllt, weswegen $P(z)$ divergiert. Somit ist $D_B = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} = B_1(0)$. Ferner gilt

$$f_P(z) = \frac{1}{1-z} \quad \forall z \in B_1(0). \quad (83)$$

Man beachte auch

$$\sum_{n=0}^m |z^n| = \sum_{n=0}^m |z|^n = \begin{cases} \frac{1-|z|^{m+1}}{1-|z|} & |z| \neq 1 \\ m & |z| = 1 \end{cases}. \quad (84)$$

Somit konvergiert $\sum_{n \geq 0} |z^n|$ auch genau dann wenn $|z| < 1$. Wir folgern $D_A = D_B = B_1(0)$.

^aZur Erinnerung: Die Formel für die geometrische Summe in (82) kommt aus folgender Beobachtung:

$$(1-z) \sum_{n=0}^m z^n = \sum_{n=0}^m (1-z)z^n = \sum_{n=0}^m (z^n - z^{n+1}) \stackrel{(*)}{=} z^0 - z^{m+1} = 1 - z^{m+1}. \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^m z^n = \frac{1-z^{m+1}}{1-z}.$$

Wir haben in (*) die Teleskopsummenformel verwendet.

Proposition 35. Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{C}$ eine Folge, $z_0 \in \mathbb{C}$ und

$$P(z) := \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n \quad (85)$$

gegeben. Definiere

$$R := \begin{cases} \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} & \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in (0, \infty) \\ \infty & \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \\ 0 & \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty \end{cases}. \quad (86)$$

Dann gilt

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\} \subset D_A \subset D_B \subset \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq R\}. \quad (87)$$

Beweis. $D_A \subset D_B$ ist stets erfüllt (weil absolut konvergente Reihen stets konvergent sind). Wir wenden das Wurzelkriterium (Satz 31) an. FALL 1. $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in (0, \infty)$. Wir berechnen für $z_n := a_n(z - z_0)^n$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n| |z - z_0|^n} \quad (88)$$

$$= \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} |z - z_0| \begin{cases} < 1 & |z - z_0| < \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \\ > 1 & |z - z_0| > \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \end{cases}. \quad (89)$$

Satz 31 besagt dann, dass

$$P(z) = \sum_{n \geq 0} z_n \begin{cases} \text{ist absolut konvergent} & |z - z_0| < \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \\ \text{ist divergent} & |z - z_0| > \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \end{cases} \quad (90)$$

Mit anderen Worten (und der Definition von R in (86))

$$P(z) = \sum_{n \geq 0} z_n \begin{cases} \text{ist absolut konvergent} & |z - z_0| < R \\ \text{ist divergent} & |z - z_0| > R \end{cases}. \quad (91)$$

Der obere Fall beweist $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\} \subset D_A$ und der untere Fall beweist $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq R\}^C \subset D_B^C$ (was nichts anderes bedeutet als $D_B \subset \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq R\}$). Die Behauptung im Fall 1 ist gezeigt. Die anderen Fälle $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ und $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$ gehen analog.

Definition 36. KONVERGENZRADIUS. Der Wert $R = R_P \in [0, \infty]$ aus der vorigen Proposition heißt *Konvergenzradius* der Potenzreihe P .

Beispiel 37. Man kann nachrechnen, dass im Fall von

$$P(z) := \sum_{n \geq 0} z^n, \quad (92)$$

gilt $R_P = 1$. In der Tat: Es ist $a_n = 1$ für alle n und somit gibt (86)

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|1|}} = 1. \quad (93)$$

In diesem Beispiel gilt auch $D_A = D_B = B_1(0)$, vgl. Beispiel 34. Es gibt aber auch Beispiele, wo $D_A \neq D_B$, z.B.

$$\tilde{P}(z) := \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n+1} \quad (94)$$

Sie können als Übungsaufgabe nachrechnen, dass $R_{\tilde{P}} = 1$ und $D_A = B_1(0)$. Sie werden aber mit dem Leibniz-Kriterium aus der Analysis zeigen können, dass $-1 \in D_B$ (also insbesondere $-1 \in D_B \setminus D_A$). Man kann sogar beweisen, dass $D_B = \overline{B_1(0)} \setminus \{1\}$.

1.6 Die Exponentialfunktion

Nun werden wir die *komplexe Exponentialfunktion* einführen. Dazu betrachten wir eine ganz bestimmte Potenzreihe.

Proposition 38. Gegeben sei

$$P(z) := \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} z^n \quad (95)$$

Dann gilt $R_P = \infty$, d.h. $P(z)$ konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$.

Beweis. Es ist $a_n = \frac{1}{n!}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Wir definieren (nur für diesen Beweis) für $\alpha \in \mathbb{R}$ die *Gauss-Klammer* $[\alpha] := \max\{k \in \mathbb{N} : k \leq \alpha\}$. Man beachte, dass stets $[\alpha] \leq \alpha \leq [\alpha] + 1$. Somit gilt auch für alle $n \in \mathbb{N}$

$$n - \left[\frac{n}{2}\right] \geq n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2}. \quad (96)$$

Nun berechnen wir für $n \geq 2$

$$\sqrt[n]{n!} \geq \sqrt[n]{n(n-1) \cdots \left(\left[\frac{n}{2}\right] + 1\right) \cdot 1 \cdots 1} \geq \sqrt[n]{\left(\left[\frac{n}{2}\right] + 1\right)^{(n - [\frac{n}{2}]})} \stackrel{(96)}{\geq} \sqrt[n]{\left(\left[\frac{n}{2}\right] + 1\right)^{\frac{n}{2}}} \quad (97)$$

$$= \left(\left[\frac{n}{2}\right] + 1\right)^{\frac{1}{2}} \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty). \quad (98)$$

Wir folgern $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ und damit (mit (86)) $R_P = \infty$.

Definition 39. EXPONENTIALFUNKTION. Wir definieren die Abbildung $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

durch

$$\exp(z) := e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \quad (99)$$

(Diese Abbildung ist wohldefiniert nach Proposition 38)

Proposition 40. EIGENSCHAFTEN DER EXPONENTIALFUNKTION. Es seien $z, w \in \mathbb{C}$.

- (i) $e^0 = 1$.
- (ii) $e^{z+w} = e^z e^w$. Insbesondere gilt für $n \in \mathbb{N}$, dass $(e^z)^n = e^{nz}$.
- (iii) Es gilt $e^z \neq 0$ und $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$.
- (iv) $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$, insbesondere $e^x \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R}$. Ferner gilt $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $x \mapsto e^x$ ist streng monoton auf \mathbb{R} .
- (v) $|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}$. Insbesondere $|e^{iy}| = 1$ für alle $y \in \mathbb{R}$.

Beweis. Zu (i).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} 0^n = \frac{0^0}{0!} + \frac{0^1}{1!} + \dots = 1 + 0 + \dots = 1. \quad (100)$$

Zu (ii). Es gilt

$$e^z e^w = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} z^j \right) \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} w^\ell \right) \stackrel{(77)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} z^k \frac{1}{(n-k)!} w^{n-k} \right) \quad (101)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} z^k w^{n-k} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k w^{n-k} \right) \quad (102)$$

$$\stackrel{\text{Bin. Lehrsatz}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z+w)^n = e^{z+w}. \quad (103)$$

Nun gilt auch

$$(e^z)^n = \underbrace{e^z \cdot \dots \cdot e^z}_{n\text{-mal}} = e^{z+\dots+z} = e^{nz}, \quad (104)$$

wobei wir im vorletzten Schritt die Funktionalgleichung $e^z e^w = e^{z+w}$ n-mal induktiv verwendet haben. Zu (iii). Es gilt

$$e^z e^{-z} = e^{z+(-z)} = e^0 = 1. \quad (105)$$

Daher besitzt e^z ein multiplikatives Inverses und ist deswegen ungleich Null. Die Behauptung

tung $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$ folgt auch. Zu (iv).

$$\overline{e^z} = \overline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n} = \overline{\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m \frac{1}{n!} z^n} = \lim_{m \rightarrow \infty} \overline{\sum_{n=0}^m \frac{1}{n!} z^n} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m \frac{1}{n!} \overline{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \overline{z^n} = e^{\overline{z}}. \quad (106)$$

Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $\bar{x} = x$ und

$$\operatorname{Im}(e^x) = \frac{e^x - \overline{e^x}}{2i} = \frac{e^x - e^{\bar{x}}}{2i} = \frac{e^x - e^x}{2i} = 0. \quad (107)$$

Dass $e^x > 0$ liest man für positive $x > 0$ direkt aus (99) ab. Für negative x folgt es aus $e^x = \frac{1}{e^{-x}} > 0$. Die strenge Monotonie kann man für positive x auch wieder direkt aus (99) ablesen und für negative x folgt es aus $e^x = \frac{1}{e^{-x}}$. Zu (v)

$$|e^z|^2 = e^z \overline{e^z} \stackrel{(iv)}{=} e^z e^{\overline{z}} = e^{z+\overline{z}} = e^{2\operatorname{Re}(z)} = (e^{\operatorname{Re}(z)})^2 \quad (108)$$

Die Behauptung folgt durch Wurzelziehen (und Benutzung von $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$). Als direkte Folgerung erhält man für $y \in \mathbb{R}$

$$|e^{iy}| = e^{\operatorname{Re}(iy)} = e^0 = 1. \quad (109)$$

Wir besprechen als nächstes ein Resultat, welches klärt, wie gut die Exponentialfunktion durch ihre Partialsummen approximiert wird.

Proposition 41. APPROXIMATION DER EXPONENTIALFUNKTION. Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\left| e^z - \sum_{n=0}^N \frac{z^n}{n!} \right| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right| \leq \frac{|z|^{N+1} e^{|z|}}{(N+1)!}. \quad (110)$$

Der Term auf der rechten Seite von (110) strebt für alle festen $z \in \mathbb{C}$ gegen 0 für $N \rightarrow \infty$.

Beweis. Die erste Gleichheit ist einsichtig mit der Definition der Exponentialfunktion. Zur zweiten Ungleichung

$$\left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^{n+N+1}}{(n+N+1)!} = |z|^{N+1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{(n+N+1)!} \quad (111)$$

Nun schätzen wir für $n \in \mathbb{N}_0$ ab

$$(n + N + 1)! = (1 \cdot \dots \cdot (N + 1))((N + 2) \cdot \dots \cdot (n + N + 1)) = (N + 1)! \left(\prod_{k=1}^n (k + N + 1) \right) \quad (112)$$

$$\geq (N + 1)! \left(\prod_{k=1}^n k \right) = (N + 1)! n!. \quad (113)$$

Wir erhalten mit (111)

$$\left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right| \leq |z|^{N+1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{(N+1)!n!} = \frac{|z|^{N+1}}{(N+1)!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} = \frac{|z|^{N+1}}{(N+1)!} e^{|z|}. \quad (114)$$

Eine zweite wichtige Abschätzung ist

Proposition 42. Es sei $e := e^1$ die *Euler'sche Zahl*. Dann gilt $2 < e^1 \leq 3$.

Beweis. Zur ersten Ungleichung

$$e^1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots \geq 2. \quad (115)$$

Für die zweite Ungleichung überzeugt man sich zunächst leicht mit Induktion davon, dass $k! \geq 2^{k-1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$e^1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + e^1 = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \leq 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3. \quad (116)$$

1.7 Kosinus und Sinus

Definition 43. KOSINUS UND SINUS (HYPERBOLICUS). Wir definieren für $z \in \mathbb{C}$

$$\cos(z) := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \sin(z) := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad (117)$$

sowie

$$\cosh(z) := \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad \sinh(z) := \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad (118)$$

Man beachte, dass insbesondere gilt, dass

$$\cos(z) + i \sin(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} + i \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = e^{iz}. \quad (119)$$

Eine nützliche Konsequenz ist die *Formel von De Moivre*

Proposition 44. FORMEL VON DE MOIVRE. Für alle $z \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$(\cos(z) + i \sin(z))^n = \cos(nz) + i \sin(nz). \quad (120)$$

Beweis. Mit (119) gilt

$$(\cos(z) + i \sin(z))^n \stackrel{(119)}{=} (e^{iz})^n = e^{inz} = e^{i(nz)} \stackrel{(119)}{=} \cos(nz) + i \sin(nz). \quad (121)$$

Mit der gewählten Definition ergeben sich auch leicht die bekannten *Additionstheoreme*.

Proposition 45. ADDITIONSTHEOREME. Es gilt für $z, w \in \mathbb{C}$

(i) $\cos(z + w) = \cos(z) \cos(w) - \sin(z) \sin(w).$

(ii) $\sin(z + w) = \sin(z) \cos(w) + \cos(z) \sin(w).$

(iii) $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1.$

Beweis. Wir beweisen nur (i) und (iii). Den Rest überlassen wir den Lesenden als Übungsaufgabe. Zu (i).

$$\cos(z) \cos(w) - \sin(z) \sin(w) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} - \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} \quad (122)$$

$$\stackrel{i^2=-1}{=} \frac{(e^{iz} + e^{-iz})(e^{iw} + e^{-iw}) + (e^{iz} - e^{-iz})(e^{iw} - e^{-iw})}{4} \quad (123)$$

$$= \frac{e^{i(z+w)} + e^{i(z-w)} + e^{i(w-z)} + e^{-i(z+w)} + e^{i(z+w)} - e^{i(z-w)} - e^{i(w-z)} + e^{-i(z+w)}}{4} \quad (124)$$

$$= \frac{2(e^{i(z+w)} + e^{-i(z+w)})}{4} = \frac{e^{i(z+w)} + e^{-i(z+w)}}{2} = \cos(z + w). \quad (125)$$

Zu (iii).

$$\cos^2(z) + \sin^2(z) = \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right)^2 + \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right)^2 \quad (126)$$

$$= \frac{e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}}{4} - \frac{e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}}{4} = \frac{4}{4} = 1. \quad (127)$$

Für $\theta \in \mathbb{R}$ haben wir

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{e^{i\theta} + e^{\overline{i\theta}}}{2} = \frac{e^{i\theta} + \overline{e^{i\theta}}}{2} = \operatorname{Re}(e^{i\theta}) \quad (128)$$

und analog

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{e^{i\theta} - e^{i\bar{\theta}}}{2i} = \frac{e^{i\theta} - \overline{e^{i\theta}}}{2i} = \operatorname{Im}(e^{i\theta}). \quad (129)$$

Insbesondere gilt $\cos(\theta), \sin(\theta) \in \mathbb{R}$ für alle $\theta \in \mathbb{R}$. Dies ist jedoch nicht der Fall wenn man komplexwertige Argumente von θ zulässt.

Wir widmen uns nun den *Potenzreihendarstellungen* für Kosinus und Sinus.

Proposition 46. POTENZREIHENDARSTELLUNGEN. Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \quad \text{und} \quad \sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \quad (130)$$

Beweis. Wir zeigen nur die Reihendarstellung für den Kosinus. Die andere Reihendarstellung überlassen wir den Lesenden als Übungsaufgabe.

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [(iz)^n + (-iz)^n] = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (iz)^n [1 + (-1)^n]. \quad (131)$$

Mit

$$1 + (-1)^n = \begin{cases} 2 & n \text{ gerade} \\ 0 & n \text{ ungerade} \end{cases} \quad (132)$$

gilt

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} (iz)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}. \quad (133)$$

Wir folgern insbesondere $\cos(0) = 1, \sin(0) = 0$. Aus der Analysis wissen wir (auch als Konsequenz der Potenzreihendarstellungen), dass

$$\cos'(\theta) = -\sin(\theta) \quad \text{und} \quad \sin'(\theta) = \cos(\theta) \quad \forall \theta \in \mathbb{R}. \quad (134)$$

Wir werden das Differenzieren von Potenzreihen später nochmal an anderer Stelle aufgreifen. An dieser Stelle überspringen wir den Beweis von (134).

Proposition 47. Die Abbildung $(0, 2) \ni \theta \mapsto \cos(\theta)$ ist auf $(0, 2)$ streng monoton fallend (und somit injektiv auf $[0, 2]$). Ferner gibt es ein eindeutiges $\theta_0 \in (0, 2)$ mit $\cos(\theta_0) = 0$. Desweiteren gilt $\sin(\theta_0) = 1$ und $\sin(\theta) > 0$ für alle $\theta \in (0, 2)$.

Beweis. Schritt 1. $\sin(\theta) > 0$ für alle $\theta \in (0, 2)$. Dazu sei $\theta \in (0, 2)$

$$\frac{\sin \theta}{\theta} \stackrel{(130)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \theta^{2n} = 1 - \frac{\theta^2}{3!} + \frac{\theta^4}{5!} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \theta^{2n} \quad (135)$$

Nun gilt für $\theta \in (0, 2)$

$$\left| \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \theta^{2n} \right| \leq \sum_{n=3}^{\infty} \frac{|\theta|^{2n}}{(2n+1)!} \leq \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2^{2n}}{(2n+1)!} = \frac{1}{2} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (136)$$

Und mit Proposition 41

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!} \leq \sum_{m=7}^{\infty} \frac{2^m}{m!} \leq \frac{2^8 e^2}{8!} \stackrel{\text{Prop 42}}{\leq} 9 \frac{2^8}{8!}. \quad (137)$$

Wir folgern für alle $\theta \in (0, 2)$

$$\left| \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \theta^{2n} \right| \leq \frac{9 \cdot 2^8}{2 \cdot 8!}. \quad (138)$$

Beachte, dass $8 \cdot 4 \cdot 2 = 2^7$ und deswegen gilt $2 \cdot 8! \geq 2^8 \cdot 7 \cdot 6$. Man folgert

$$\left| \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \theta^{2n} \right| \leq \frac{9 \cdot 2^8}{2 \cdot 8!} \leq \frac{9}{42} = \frac{3}{14}. \quad (139)$$

Mit (135) ergibt sich nun für $\theta \in (0, 2)$

$$\frac{\sin \theta}{\theta} \geq 1 - \frac{\theta^2}{3!} - \frac{3}{14} \geq 1 - \frac{4}{6} - \frac{3}{14} = \frac{1}{3} - \frac{3}{14} = \frac{5}{42} > 0. \quad (140)$$

Das bedeutet, dass $\sin(\theta) > 0$ für alle $\theta \in (0, 2)$ und daher $\cos'(\theta) = -\sin(\theta) < 0$ für alle $\theta \in (0, 2)$. Deswegen ist \cos auf $(0, 2)$ streng monoton fallend und somit injektiv.

Schritt 2. Aus der Potenzreihendarstellung (130) folgt sofort, dass $\cos(0) = 0$. Ferner

$$\cos 2 = 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \frac{2^6}{6!} + \sum_{k=4}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k}}{(2k)!}. \quad (141)$$

Nun gilt

$$\sum_{k=4}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k}}{(2k)!} \leq \sum_{k=4}^{\infty} \frac{2^{2k}}{(2k)!} \leq \sum_{m=8}^{\infty} \frac{2^m}{m!} \leq \frac{2^8 e^2}{8!} = 9 \frac{2^8}{8!}. \quad (142)$$

Nun ist $8 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3 \geq 8 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 = 2^8$ und daher

$$9 \frac{2^8}{8!} \leq 9 \frac{1}{7 \cdot 6} = \frac{9}{42} = \frac{3}{14}. \quad (143)$$

Mit dieser Abschätzung und (141) ergibt sich

$$\cos 2 = 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \frac{2^6}{6!} + \sum_{k=4}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k}}{(2k)!} \leq 1 - 2 + \frac{16}{24} + \frac{3}{14} = -\frac{1}{3} + \frac{3}{14} = -\frac{5}{42} < 0. \quad (144)$$

Nach dem Zwischenwertsatz hat \cos nun eine Nullstelle in $(0, 2)$ und wegen der Injektivität ist diese auch eindeutig. Wir nennen sie im Folgenden θ_0

Schritt 3. $\sin(\theta_0) = 1$. Es gilt wegen Schritt 1, dass $\sin(\theta_0) > 0$. Ferner gilt mit Schritt 2

$$\sin^2(\theta_0) = \sin^2(\theta_0) + 0 = \sin^2(\theta_0) + \cos^2(\theta_0) = 1. \quad (145)$$

Die Behauptung folgt durch Wurzelziehen (mit positivem Vorzeichen, da $\sin(\theta_0) > 0$).

Definition 48. Die Zahl $\theta_0 \in (0, 2)$ aus der vorigen Proposition nennen wir $\frac{\pi}{2}$ und definieren somit auch die *Kreiszahl* π (als $2\theta_0$).

Beachte, dass nun gilt

$$\sin \pi = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0 \quad (146)$$

und

$$\cos \pi = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1. \quad (147)$$

Außerdem gelten die folgenden (*Anti-*)*Periodizitäten*

Proposition 49. Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + z\right) = -\sin(z) \quad \text{und} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + z\right) = \cos(z), \quad (148)$$

$$\cos(\pi + z) = -\cos(z) \quad \text{und} \quad \sin(\pi + z) = -\sin(z), \quad (149)$$

$$\cos(2\pi + z) = \cos(z) \quad \text{und} \quad \sin(2\pi + z) = \sin(z). \quad (150)$$

Beweis. Folgt sofort mit Proposition 45. Für etwas mehr Details siehe auch Übungsblatt 2.

Korollar 50. Die Funktion Abbildung $\mathbb{R} \ni \theta \mapsto e^{i\theta} \in \mathbb{C}$ ist 2π -periodisch.

Beweis. Mit dem vorigen Korollar haben wir für alle $\theta \in \mathbb{R}$

$$e^{i(2\pi+\theta)} \stackrel{(119)}{=} \cos(2\pi + \theta) + i \sin(2\pi + \theta) = \cos(\theta) + i \sin(\theta) = e^{i\theta}. \quad (151)$$

1.8 Polarkoordinaten

In diesem Abschnitt werden wir sehen, dass wir jede Zahl $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ eindeutig als $z = re^{i\theta}$ für ein $r > 0$ und ein $\theta \in (-\pi, \pi]$ darstellen können. Diese *Polarkoordinatendarstellung* ist besonders nützlich beim Multiplizieren komplexer Zahlen. In der Tat ist die Rechnung

$$(r_1 e^{i\theta_1})(r_2 e^{i\theta_2}) = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \quad (152)$$

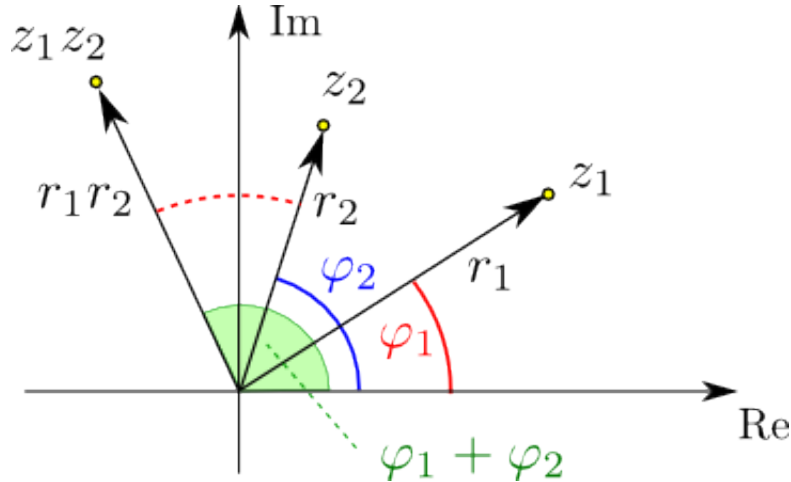


Abbildung 1: Multiplikation komplexer Zahlen grafisch dargestellt

wesentlich einfacher als das Ausmultiplizieren in (14) ff. und hat sogar eine geometrische Interpretation

Um Existenz und Eindeutigkeit dieser Darstellung zu zeigen, benötigen wir zunächst ein wenig Vorbereitung.

Korollar 51. Es sei $\mathbb{S}^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} = 1\}$. Dann ist die Abbildung

$$b : (-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{S}^1 \quad b(\theta) := (\cos(\theta), \sin(\theta)) \quad (153)$$

bijektiv.

Beweis. Da b wegen Proposition 49 2π -periodisch ist, können wir genausogut zeigen, dass $b : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{S}^1, b(\theta) := (\cos(\theta), \sin(\theta))$ bijektiv ist.

Schritt 1. Wir definieren den *ersten Quadranten* $Q_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0\}$ und zeigen zunächst, dass $b : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{S}^1 \cap Q_1$ bijektiv ist. Da $\theta \mapsto \cos(\theta)$ auf $[0, \frac{\pi}{2}]$ injektiv ist (s. 47), ist auch b injektiv. Nun zur Surjektivität. Sei $x, y \in \mathbb{S}^1 \cap Q_1$, d.h. $x, y \geq 0$ und $x^2 + y^2 = 1$. Insbesondere gilt $0 \leq x \leq \sqrt{x^2 + y^2} = 1$. Da $\cos(0) = 1 \geq x \geq 0 = \cos(\frac{\pi}{2})$ gibt es ein $\xi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ mit $\cos(\xi) = x$. Ferner gilt

$$y = \sqrt{y^2} = \sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 - \cos^2(\xi)} = \sqrt{\sin^2(\xi)} = \sin(\xi), \quad (154)$$

wobei wir in der letzten Gleichung verwendet haben, dass nach Proposition 47 gilt $\sin(\xi) \geq 0$, da $\xi \in [0, \frac{\pi}{2}] \subset [0, 2]$. Wir haben hergeleitet, dass $(x, y) = (\cos(\xi), \sin(\xi))$. Die Bijektivität von $b : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{S}^1 \cap Q_1$ folgt.

Schritt 2. Wir definieren nun den *zweiten Quadranten* $Q_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0, y \geq 0\}$. Beachte: $T_{1,2} : \mathbb{S}^1 \cap Q_1 \rightarrow \mathbb{S}^1 \cap Q_2$ gegeben durch $(x, y) \mapsto (-x, y)$ ist bijektiv. Aus Proposition 49 folgt, dass

$$b(\frac{\pi}{2} + \theta) = T_{1,2}(b(\theta)) \quad \forall \theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \quad (155)$$

Da $b : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{S}^1 \cap Q_1$ bijektiv ist, ist auch $T_{1,2} \circ b : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{S}^1 \cap Q_2$ bijektiv. Somit ist nach (155) auch $b(\cdot + \frac{\pi}{2}) : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{S}^1 \cap Q_2$ bijektiv. Man folgert leicht, dass $b : [\frac{\pi}{2}, \pi] \rightarrow \mathbb{S}^1 \cap Q_2$ bijektiv ist. Da sich $(\mathbb{S}^1 \cap Q_1)$ und $(\mathbb{S}^1 \cap Q_2)$ nur bei $(0, 1) = b(\frac{\pi}{2})$ schneiden, folgern wir daraus auch, dass $b : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{S}^1 \cap (Q_1 \cup Q_2)$ bijektiv ist.

Schritt 3. Wir definieren $Q_3 \cup Q_4 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 0\}$, und definieren $T_{(1,2),(3,4)} : \mathbb{S}^1 \cap (Q_1 \cup Q_2) \rightarrow \mathbb{S}^1 \cap (Q_3 \cup Q_4)$ durch $(x, y) \mapsto (-x, -y)$. Wieder folgern wir mit Proposition 49, dass

$$b(\pi + \theta) = T_{(1,2),(3,4)}(b(\theta)) \quad \forall \theta \in [0, \pi]. \quad (156)$$

Mit dieser Gleichung folgert man leicht wie in Schritt 2 die Bijektivität von $b : [\pi, 2\pi] \rightarrow \mathbb{S}^1 \cap (Q_3 \cup Q_4)$. Ab hier überlassen wir den Lesenden die Details als Übungsaufgabe.

Korollar 52. Es sei hier $\mathbb{S}^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Die Abbildung $\tilde{b} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ gegeben durch $\tilde{b}(\theta) := e^{i\theta}$ ist 2π -periodisch und $\tilde{b}|_{(-\pi, \pi]} : (-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{S}^1$ ist bijektiv. Es gilt sogar noch mehr: Für jedes Intervall der Form $I = (a, b]$ oder $I = [a, b)$ mit $b - a = 2\pi$ ist $\tilde{b}|_I : I \rightarrow \mathbb{S}^1$ bijektiv.

Beweis. Es sei b wie aus Korollar 51. Es gilt mit (119), dass $\tilde{b}(\theta) = e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$ und somit ist $b(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta)) = (\operatorname{Re}(\tilde{b}(\theta)), \operatorname{Im}(\tilde{b}(\theta)))$. Nun folgert man die Aussage leicht aus den Eigenschaften von b . Die Details sind den Lesenden als Übungsaufgabe überlassen.

Definition 53. ARGUMENT. Die Umkehrabbildung $a : \mathbb{S}^1 \rightarrow (-\pi, \pi]$ von $\tilde{b}|_{(-\pi, \pi]}$ (definiert wie im vorigen Korollar) nennen wir *Polarwinkelabbildung*. Für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ definieren wir außerdem das *Argument*

$$\arg(z) := a\left(\frac{z}{|z|}\right) \quad (157)$$

(Beachte: $a(\frac{z}{|z|})$ ist wohldefiniert, da $\frac{z}{|z|} \in \mathbb{S}^1$.)

Satz 54. POLARKOORDINATENDARSTELLUNG. Es sei $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dann gibt es ein eindeutiges $r \in (0, \infty)$ und $\theta \in (-\pi, \pi]$ mit

$$z = r e^{i\theta}. \quad (158)$$

Ferner ist $r = |z|$ und $\theta = \arg(z)$.

Beweis. Schritt 1. Existenz. Sei $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gegeben. Definiere nun

$$\theta := \arg(z) \in (-\pi, \pi], \quad (159)$$

wobei a wie in Definition 53 ist. Es gilt für \tilde{b} wie in Korollar 52

$$e^{i\theta} = \tilde{b}(\theta) = \tilde{b}(a(\frac{z}{|z|})) = \frac{z}{|z|} \quad (160)$$

Umgestellt gilt $z = |z|e^{i\theta}$ und mit $r := |z| > 0$ findet man $z = re^{i\theta}$.

Schritt 2. Eindeutigkeit. Angenommen es gibt $r_1, r_2 \in (0, \infty)$ und $\theta_1, \theta_2 \in (-\pi, \pi]$ so, dass $z = r_1e^{i\theta_1} = r_2e^{i\theta_2}$. Es folgt

$$|z| = |r_1e^{i\theta_1}| = |r_1| |e^{i\theta_1}| = |r_1| = r_1 \quad (161)$$

und analog

$$|z| = |r_2e^{i\theta_2}| = |r_2| |e^{i\theta_2}| = |r_2| = r_2. \quad (162)$$

Wir schließen daraus dass $r_1 = r_2 = |z|$. Wegen $z = r_1e^{i\theta_1} = r_2e^{i\theta_2}$ folgt

$$z = |z|e^{i\theta_1} = |z|e^{i\theta_2}. \quad \Rightarrow e^{i\theta_1} = e^{i\theta_2}. \quad (163)$$

Mit anderen Worten $\tilde{b}(\theta_1) = \tilde{b}(\theta_2)$. Da $\theta_1, \theta_2 \in (-\pi, \pi]$ folgt aus der Bijektivität von \tilde{b} , dass $\theta_1 = \theta_2$.

Beispiel 55. Wir stellen $z = 1 + i$ in Polarkoordinaten dar, d.h. wir wollen schreiben $1 + i = re^{i\theta}$ für $r = |z|$ und $\theta = \arg(z) \in (-\pi, \pi]$. Zuerst berechnen wir r .

$$r = |z| = |1 + i| = |1 + 1 \cdot i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \quad (164)$$

Wir suchen somit $\theta = \arg(z) \in (-\pi, \pi]$ mit $1 + i = \sqrt{2}e^{i\theta}$. Es gilt also insbesondere

$$e^{i\theta} = \frac{1 + i}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (165)$$

d.h.

$$\cos(\theta) + i \sin(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (166)$$

Wir folgern, dass

$$\cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (167)$$

Lösungsweg 1. Mit Benutzung von Resultaten aus der reellen Analysis (nicht Gegenstand dieser Vorlesung, darf aber in den Übungsaufgaben verwendet werden). Es gilt

$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{1/\sqrt{2}}{1/\sqrt{2}} = 1. \quad \Rightarrow \theta = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}. \quad (168)$$

Wir folgern $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$ und daher $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Lösungsweg 2. Ohne Benutzung von Resultaten der reellen Analysis. Es gilt

$$0 = \cos(\frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}) = \cos^2(\frac{\pi}{4}) - \sin^2(\frac{\pi}{4}) = 1 - 2\sin^2(\frac{\pi}{4}) \quad \Rightarrow \quad \sin^2(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2} \quad (169)$$

Nach Proposition 47 gilt $\sin \frac{\pi}{4} > 0$ und deswegen

$$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (170)$$

Beachte nun, dass wegen Proposition 47 $\cos(\frac{\pi}{4}) > \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$. Somit gilt

$$\cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{\cos^2 \frac{\pi}{4}} = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\pi}{4}} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (171)$$

Man folgert, dass (167) von $\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ gelöst wird.

1.9 Der komplexe Logarithmus

Mithilfe der Polarkoordinatendarstellung können wir das Bild der Exponentialfunktion beschreiben. Wir erinnern uns aus der reellen Analysis daran, dass

$$\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty) \quad (172)$$

bijektiv ist. Die Umkehrfunktion ist der *reelle natürliche Logarithmus*

$$\log_{\mathbb{R}} : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}. \quad (173)$$

Satz 56. BILD DER EXPONENTIALFUNKTION

(i) $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist surjektiv.

(ii) Für $z, w \in \mathbb{C}$ gilt

$$e^z = e^w \iff z - w \in 2\pi i\mathbb{Z} = \{2\pi ik : k \in \mathbb{Z}\} \quad (174)$$

(iii) $\exp : \{w \in \mathbb{C} : \text{Im}(w) \in (-\pi, \pi]\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist bijektiv mit Umkehrabbildung $z \mapsto \log_{\mathbb{R}} |z| + i \arg(z)$.

(iv) $\exp : \{w \in \mathbb{C} : \text{Im}(w) \in (-\pi, \pi)\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ ist bijektiv.

Beweis. Zu (i). Es sei $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dann gilt

$$z = |z|e^{i \arg(z)} = e^{\log_{\mathbb{R}} |z|} e^{i \arg(z)} = e^{\log_{\mathbb{R}} |z| + i \arg(z)}. \quad (175)$$

Für $w := \log_{\mathbb{R}} |z| + i \arg(z)$ gilt also $e^w = z$.

Zu (ii). Falls $e^z = e^w$ so gilt

$$1 = \frac{e^z}{e^w} = e^z e^{-w} = e^{z-w}. \quad (176)$$

Wir folgern

$$1 = |1| = |e^{z-w}| = e^{\text{Re}(z-w)}. \quad (177)$$

Wenden wir $\log_{\mathbb{R}}$ auf beiden Seiten an, so folgern wir

$$0 = \log_{\mathbb{R}}(1) = \log_{\mathbb{R}}(e^{\operatorname{Re}(z-w)}) = \operatorname{Re}(z-w). \quad (178)$$

Somit gilt $z-w = iy$ für ein $y \in \mathbb{R}$. Setzen wir dies in (176) ein so erhalten wir

$$1 = e^{iy}. \quad (179)$$

Wähle nun $k \in \mathbb{Z}$ so, dass $2k\pi - \pi < y \leq 2k\pi + \pi$. Beachte, dass wegen der 2π -Periodizität (siehe Proposition 49) gilt, dass $e^{\pm i2k\pi} = e^{i \cdot 0} = 1$. Es gilt ferner $y - 2k\pi \in (-\pi, \pi]$ und auch

$$1 = e^{iy} = e^{iy} e^{-i2k\pi} = e^{i(y-2k\pi)} = \tilde{b}(y-2k\pi), \quad (180)$$

wobei \tilde{b} wie in Proposition 49 ist. Mit $1 = \tilde{b}(0)$ folgern wir aus der vorigen Gleichung $\tilde{b}(y-2k\pi) = \tilde{b}(0)$. Da \tilde{b} auf $(-\pi, \pi]$ injektiv ist (vgl wiederum Proposition 49) folgt

$$y - 2k\pi = 0. \quad \Rightarrow \quad y = 2k\pi. \quad (181)$$

und somit $z-w = iy = i(2k\pi) \in 2\pi i\mathbb{Z}$.

Zu (iii). Es sei $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ beliebig. In (175) haben wir bereits gesehen, dass $z = e^w$ für $w = \log_{\mathbb{R}}(z) + i \arg(z)$. Beachte, dass $\operatorname{Im}(w) = \arg(z) \in (-\pi, \pi]$. Somit folgt die Surjektivität. Zur Injektivität. Seien $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Im}(w_1), \operatorname{Im}(w_2) \in (-\pi, \pi]$ und $e^{w_1} = e^{w_2}$. Aus Punkt (ii) lernen wir, dass

$$w_2 - w_1 = 2k\pi i \quad \text{für ein } k \in \mathbb{Z}. \quad (182)$$

Insbesondere gilt für dieses k

$$\operatorname{Im}(w_2) = \operatorname{Im}(w_1) + 2k\pi. \quad (183)$$

Da nun $\operatorname{Im}(w_1) \in (-\pi, \pi]$ gilt nach (183)

$$\operatorname{Im}(w_2) \in (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi]. \quad (184)$$

Da nun aber auch $\operatorname{Im}(w_2) \in (-\pi, \pi]$ haben wir $(-\pi, \pi] \cap (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi] \neq \emptyset$. Dies geht nur wenn $k = 0$ ist. Setzen wir diese Zusatzinformation in (182) ein so folgern wir $w_2 = w_1$. Die Injektivität ist gezeigt. Die Formel für die Umkehrabbildung haben wir im Surjektivitätsbeweis bereits gesehen.

Zu (iv). Dies ist einsichtig mit (iii) und der Tatsache, dass $\{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(w) = \pi\}$ von \exp auf $\mathbb{R}_{<0}$ abgebildet wird. In der Tat: Für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$e^{x+i\pi} = e^x e^{i\pi} = e^x (\cos(\pi) + i \sin(\pi)) \stackrel{(147)}{=} e^x (-1 + 0i) = -e^x, \quad (185)$$

weswegen

$$\{e^{x+i\pi} : x \in \mathbb{R}\} = \{-e^x : x \in \mathbb{R}\} = \{-r : r \in (0, \infty)\} = (-\infty, 0). \quad (186)$$

Die Behauptung folgt.

Definition 57. Wir definieren den (*Hauptzweig des*) *komplexen Logarithmus* durch $\log : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$\log z := \log_{\mathbb{R}} |z| + i \arg(z). \quad (187)$$

Proposition 58. Es gilt für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, dass

$$\exp(\log(z)) = z. \quad (188)$$

Ferner gilt für alle $z \in \mathbb{C}$, dass

$$\log(\exp(z)) = z - 2k\pi i \quad \text{für ein } k \in \mathbb{Z}. \quad (189)$$

Die Zahl $k \in \mathbb{Z}$ aus der vorigen Gleichung ist eindeutig charakterisiert durch die Gleichung $2k\pi - \pi < \text{Im}(z) \leq 2k\pi + \pi$.

Beweis. Zu (188) gehen wir genauso vor wie in (175). Es gilt für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$z = |z|e^{i \arg(z)} = e^{\log_{\mathbb{R}}(z)} e^{i \arg(z)} = e^{\log_{\mathbb{R}}(z) + i \arg(z)} = e^{\log(z)}. \quad (190)$$

Zu (189). Falls $2k\pi - \pi < \text{Im}(z) \leq 2k\pi + \pi$ so gilt, dass $z - 2k\pi i \in \{w \in \mathbb{C} : \text{Im}(w) \in (-\pi, \pi]\}$. Da (nach Satz 56 (iii)) \exp auf dieser Menge bijektiv ist \log die Umkehrabbildung ist, gilt

$$\log(\exp(z - 2k\pi i)) = z - 2k\pi i. \quad (191)$$

Es folgt

$$z - 2k\pi i = \log(\exp(z - 2k\pi i)) = \log(\exp(z) \underbrace{\exp(-2k\pi i)}_{=1}) = \log(\exp(z)). \quad (192)$$

Dies motiviert die Definition der *Nebenzweige*.

Definition 59. Für $k \in \mathbb{Z}$ definieren wir den *k-ten Nebenzweig des komplexen Logarithmus* durch

$$\log^{[k]}(z) := \log(z) + 2k\pi i. \quad (193)$$

Man überzeugt sich leicht mit Proposition 58, dass

$$\exp(\log^{[k]}(z)) = z \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad (194)$$

und umgekehrt

$$\log^{[k]}(\exp(z)) = z \quad \forall z \in \mathbb{C} : \quad 2k\pi - \pi < \text{Im}(z) \leq 2k\pi + \pi. \quad (195)$$

Nun können wir auch Potenzen definieren.

Definition 60. Für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $w \in \mathbb{C}$ definieren wir

$$z^w := \exp(w \log(z)). \quad (196)$$

1.10 (Einheits-)Wurzeln

In diesem Abschnitt suchen wir für gegebenes $w \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ alle Lösungen der Gleichung

$$z^n = w. \quad (197)$$

Wir fragen uns zunächst wie viele Lösungen es geben kann. Hierfür benutzen wir die nachfolgende Erkenntnisse aus der (linearen) Algebra über Nullstellen von *nichttrivialen \mathbb{C} -Polynomen*, d.h. Polynomen der Form

$$p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k \quad \text{mit } n \in \mathbb{N}_0, a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}, a_n \neq 0 \quad (198)$$

Die höchste auftretende Potenz $n \in \mathbb{N}_0$ heißt hierbei *Grad* des Polynoms p , von uns auch als $\deg(p)$ bezeichnet. Wir erinnern daran, dass wir in der Algebra zwei Polynome *gleich* nennen, wenn sie dieselben Koeffizienten haben. Außerdem wissen wir, dass Summen und Produkte von Polynomen wieder Polynome sind.

Satz 61. POLYNOMDIVISION. Besitzt ein nichttriviales \mathbb{C} -Polynom p vom Grade $n \in \mathbb{N}$ eine Nullstelle $z_0 \in \mathbb{C}$, so gibt es ein nichttriviales \mathbb{C} -Polynom q vom Grade $n - 1$ mit

$$p(z) = (z - z_0)q(z) \quad (199)$$

Beweis. Siehe (lineare) Algebra.

Eine wichtige daraus resultierende Folgerung ist

Korollar 62. Ein nichttriviales \mathbb{C} -Polynom p vom Grade $n \in \mathbb{N}_0$ besitzt höchstens n Nullstellen.

Beweis. Induktion nach $n \in \mathbb{N}_0$. Für $n = 0$ ist die Behauptung klar, weil p dann laut (198) ein konstantes Polynom $p(z) = a_0 \neq 0$ ist. Somit kann es keine Nullstellen geben. Es gelte nun für ein $n \in \mathbb{N}_0$, dass jedes Polynom vom Grade n höchstens n Nullstellen hat. **ZZ** : Jedes Polynom vom Grade $n + 1$ hat höchstens $n + 1$ Nullstellen. Angenommen es gäbe ein Polynom p^* vom Grade $n + 1$ mit mehr als $n + 1$ Nullstellen. Sei z^* eine solche Nullstelle. Mit der Polynomdivision finden wir ein Polynom q^* vom Grade n , so, dass

$$p^*(z) = (z - z^*)q^*(z) \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad (200)$$

Nun hat q^* nach Induktionshypothese maximal n Nullstellen, seien diese etwa gegeben durch z_1, \dots, z_k für ein $k \in \mathbb{N}_0, k \leq n$. Nun folgt mit (200) (und der Körpereigenschaft von

©)

$$p^*(z) = 0 \Leftrightarrow (z - z^*) = 0 \text{ oder } q^*(z) = 0. \quad (201)$$

Wir folgern $p^*(z) = 0$ genau dann wenn $z = z^*$ oder $z \in \{z_1, \dots, z_k\}$. Dies ergibt dann aber höchstens $k + 1 \leq n + 1$ Nullstellen. Ein Widerspruch.

Deswegen hat auch das \mathbb{C} -Polynom $p(z) := z^n - w$ höchstens n Nullstellen. Somit kann (197) auch nur höchstens n Lösungen besitzen.

Wir beschäftigen uns nun zunächst kurz mit dem Spezialfall $w = 1$. Hierzu definieren wir zunächst die n -ten Einheitswurzeln

Definition 63. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die n -ten Einheitswurzeln

$$\zeta_{k,n} := \exp\left(\frac{2\pi i k}{n}\right) \quad k = 0, \dots, (n-1). \quad (202)$$

Falls n aus dem Kontext ersichtlich ist so schreiben wir nur ζ_k .

Wir halten nun zunächst ein paar Eigenschaften der Einheitswurzeln fest

Proposition 64. Seien $n \in \mathbb{N}$ gegeben und $\zeta_0, \dots, \zeta_{n-1}$ die n -ten Einheitswurzeln. Dann gilt

- (i) $\zeta_0 = 1$ und $\zeta_0, \dots, \zeta_{n-1}$ sind alle paarweise verschieden.
- (ii) $\zeta_k = \zeta_1^k$ für alle $k = 0, \dots, n-1$.
- (iii) $\zeta_k^n = 1$ für alle $k = 0, \dots, n-1$.
- (iv) Es gilt $z^n = 1 \Leftrightarrow z \in \{\zeta_0, \dots, \zeta_{n-1}\}$.
- (v) $z^n - 1 = (z - \zeta_0) \cdot \dots \cdot (z - \zeta_{n-1})$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Beweis. Zu (i). $\zeta_0 = e^{\frac{2\pi i \cdot 0}{n}} = e^0 = 1$. Zur paarweise Verschiedenheit: Sei $\zeta_k = \zeta_j$ für $k, j \in \{0, \dots, n-1\}$. Dann ist $e^{\frac{2k\pi i}{n}} = e^{\frac{2j\pi i}{n}}$. Nach Satz 56 können kann $e^z = e^w$ jedoch nur gelten, wenn $z - w \in 2\pi i\mathbb{Z}$. Es gilt also

$$2\pi i\mathbb{Z} \ni \frac{2k\pi i}{n} - \frac{2j\pi i}{n} = \frac{2(k-j)\pi i}{n} = 2\pi i \frac{k-j}{n}. \quad (203)$$

Wir folgern, dass $\frac{k-j}{n} \in \mathbb{Z}$. Da $k, j \in \{0, \dots, n-1\}$ gilt $-(n-1) \leq k-j \leq n-1$. Somit haben wir $\frac{-(n-1)}{n} \leq \frac{k-j}{n} \leq \frac{n-1}{n}$. Da die einzige ganze Zahl in $[\frac{-(n-1)}{n}, \frac{(n-1)}{n}]$ die Null ist, gilt $\frac{k-j}{n} = 0$ und somit $k = j$.

Zu (ii).

$$\zeta_k = e^{\frac{2k\pi i}{n}} = \left(e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)^k = \zeta_1^k. \quad (204)$$

Zu (iii). Es gilt zunächst für $k = 1$

$$\zeta_1^n = \left(e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)^n = e^{2\pi i} = e^0 = 1. \quad (205)$$

Für beliebiges $k \in \{0, \dots, n-1\}$ erhalten wir nun mit (ii)

$$\zeta_k^n = [(\zeta_1)^k]^n = \zeta_1^{kn} = [\zeta_1^n]^k = 1^k = 1. \quad (206)$$

Zu (iv). “ \Leftarrow ” folgt bereits mit (iii). Für “ \Rightarrow ” muss gezeigt werden, dass es keine weiteren Lösungen als $\zeta_0, \dots, \zeta_{n-1}$ gibt. Da das Polynom $p(z) = z^n - 1$ jedoch nach Korollar 62 nur höchstens n Nullstellen hat folgt die Behauptung.

(Man hätte “ \Rightarrow ” auch ohne Polynomdivision begründen können. In der Tat: Erfüllt eine Zahl $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ die Gleichung $z^n = 1$, so gilt $r^n e^{in\theta} = 1$. Man folgert $r = 1$ und $n\theta = 2k\pi i$ für ein $k \in \mathbb{Z}$, d.h. $\theta = \frac{2k\pi i}{n}$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Man überlegt sich leicht wegen der 2π -Periodizität von $\theta \mapsto e^{i\theta}$, dass es genügt, $k \in \{0, \dots, n-1\}$ zu betrachten, weil sich danach die Werte wiederholen)

Zu (v). Aus (iv) wissen wir, dass die Nullstellen von $p(z) = z^n - 1$ gerade durch $\zeta_0, \dots, \zeta_{n-1}$ gegeben sind. Mit der Polynomdivision (Satz 61) lassen sich die n Linearfaktoren $(z - \zeta_i), i = 0, \dots, n-1$ sukzessive abspalten und wir erhalten nach n -maliger Anwendung von Satz 61

$$z^n - 1 = p(z) = (z - \zeta_0) \cdot \dots \cdot (z - \zeta_n)q(z), \quad (207)$$

wobei q ein Polynom vom Grade 0 ist. Da jedes Polynom vom Grade Null konstant (und nicht verschwindend) ist, gibt es ein $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $q(z) = a$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Wir folgern

$$z^n - 1 = a(z - \zeta_0) \cdot \dots \cdot (z - \zeta_n). \quad (208)$$

Nun machen wir einen Koeffizientenvergleich. Der führende Koeffizient (vor z^n) auf der linken Seite ist 1, wohingegen man durch Ausmultiplizieren der rechten Seite sieht, dass

$$a(z - \zeta_0) \cdot \dots \cdot (z - \zeta_n) = az^n + \dots \quad (209)$$

Wir folgern, dass $a = 1$. Die Behauptung ist gezeigt.

Beispiel 65. Es gilt

$$\prod_{k=0}^{n-1} \zeta_k = (-1)^{n-1} \quad (210)$$

Dies kann man auf zwei Arten einsehen.

LÖSUNGSWEG 1. Direktes Nachrechnen

$$\prod_{k=0}^{n-1} \zeta_k \stackrel{=}{=} \prod_{\zeta_0=1}^{n-1} \zeta_k = \prod_{k=1}^{n-1} e^{\frac{2k\pi i}{n}} = \exp\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{2k\pi i}{n}\right) = \exp\left(\frac{2\pi i}{n} \sum_{k=1}^{n-1} k\right) \quad (211)$$

$$\stackrel{\text{Gauß'sche Summenformel}}{=} \exp\left(\frac{2\pi i}{n} \frac{(n-1)n}{2}\right) = e^{i\pi(n-1)} = (e^{i\pi})^{n-1} = (-1)^{n-1}. \quad (212)$$

LÖSUNGSWEG 2. Es gilt $z^n - 1 = (z - \zeta_0) \cdot \dots \cdot (z - \zeta_{n-1})$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Setzen wir $z = 0$ ein so gilt

$$-1 = 0^n - 1 = (0 - \zeta_0) \cdot \dots \cdot (0 - \zeta_{n-1}) = (-1)^n \zeta_0 \cdot \dots \cdot \zeta_{n-1}. \quad (213)$$

Die Behauptung folgt durch Multiplikation beider Seiten mit $(-1)^{n-2}$.

Nun können wir die komplexe n -te Wurzel auch für $w \neq 1$ einführen.

Proposition 66. Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, etwa $w = re^{i\theta}$ für $r = |w| \in (0, \infty)$ und $\theta = \arg(w) \in (-\pi, \pi]$. Konsistent mit Definition 60 setzen wir

$$\sqrt[n]{w} := w^{1/n} = e^{\frac{1}{n} \log(w)}. \quad (214)$$

Dann gilt

- (i) $\sqrt[n]{w} = r^{1/n} e^{i\frac{\theta}{n}} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$,
- (ii) $(\sqrt[n]{w})^n = w$,
- (iii) $z^n = w \Leftrightarrow z \in \{\sqrt[n]{w}\zeta_0, \dots, \sqrt[n]{w}\zeta_{n-1}\}$ (mit $\zeta_0, \dots, \zeta_{n-1}$ die n -ten Einheitswurzeln).

Beweis. Sei $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ wie in der Aussage und $r = |w|$ sowie $\theta = \arg(w)$. Zuerst zeigen wir (i), d.h., dass $\sqrt[n]{w} = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}}$. Dazu berechnen wir $\log(w) = \log_{\mathbb{R}} |w| + i \arg(w) = \log(r) + i\theta$. Somit gilt

$$\sqrt[n]{w} = e^{\frac{1}{n} \log(w)} = e^{\frac{\log(r) + i\theta}{n}} = e^{\frac{\log(r)}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}} = r^{1/n} e^{i\frac{\theta}{n}}. \quad (215)$$

Nun zu (iii). Für “ \Leftarrow ” berechnen wir, dass für alle $k \in \{0, \dots, n-1\}$

$$(\sqrt[n]{w}\zeta_k)^n = (\sqrt[n]{w})^n \zeta_k^n \stackrel{\text{Prop. 64 (iii)}}{=} (\sqrt[n]{w})^n \cdot 1 = (e^{\frac{1}{n} \log(w)})^n = e^{\log(w)} \stackrel{(188)}{=} w. \quad (216)$$

Wir entnehmen insbesondere aus dem Spezialfall $k = 0$, dass $(\sqrt[n]{w})^n = (\sqrt[n]{w}\zeta_0)^n = w$, woraus (ii) bereits folgt. Einen Beweis von (ii) müssen wir also nicht mehr liefern. Für “ \Rightarrow ” könnten wir wiederum damit argumentieren, dass das Polynom $p(z) = z^n - w$ höchstens n Nullstellen hat. Alternativ könnten wir aber auch wie folgt vorgehen. Sei $z \in \mathbb{C}$ so, dass $z^n = w$. Dann gilt

$$\left(\frac{z}{\sqrt[n]{w}}\right)^n = \frac{z^n}{(\sqrt[n]{w})^n} = \frac{z^n}{w} = 1. \quad (217)$$

Somit muss nach Proposition 64 $\frac{z}{\sqrt[n]{w}}$ eine n -te Einheitswurzel sein, d.h. $\frac{z}{\sqrt[n]{w}} \in \{\zeta_0, \dots, \zeta_{n-1}\}$. Die Behauptung folgt durch Multiplizieren mit $\sqrt[n]{w}$.

Definition 67. Wir nennen für $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $n \in \mathbb{N}$ die komplexe Zahl $\sqrt[n]{w}$ *Hauptzweig* der n -ten Wurzel und für $k = 1, \dots, n-1$ heißt $\sqrt[n]{w}\zeta_k$ der k -te *Nebenzweig* der n -ten Wurzel.

Bemerkung 68. Man stellt zwischen den Nebenzweigen der n -ten Wurzel und den Nebenzweigen des Logarithmus folgenden Zusammenhang fest: Es gilt für alle $k = 0, \dots, n-1$ und alle $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$\sqrt[n]{w}\zeta_k = e^{\frac{1}{n} \log^{[k]}(w)}. \quad (218)$$

Beispiel 69. Wir bestimmen alle Zahlen $z \in \mathbb{C}$ mit $z^4 = 1 + i$. In Beispiel 55 haben wir bereits gesehen, dass $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. Nach Proposition 244 gilt dann

$$\sqrt[4]{1+i} = (\sqrt{2})^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{\pi}{16}} = 2^{1/8} e^{i\frac{\pi}{16}}. \quad (219)$$

Ferner erhalten wir alle weiteren Lösungen durch Multiplikation mit den 4-ten Einheitswurzeln. Diese sind $\zeta_0 = 1$,

$$\zeta_1 = e^{\frac{2\pi i}{4}} = e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = i \quad (220)$$

sowie

$$\zeta_2 = \zeta_1^2 = i^2 = -1, \quad \zeta_3 = \zeta_1^3 = i^3 = -i. \quad (221)$$

Die Lösungen von $z^4 = 1 + i$ sind also gegeben durch

$$z_0 = 2^{1/8} e^{i\frac{\pi}{16}}, \quad z_1 = iz_0, \quad z_2 = -z_0, \quad z_3 = -iz_0. \quad (222)$$

1.11 Die Riemann'sche Zahlenkugel

In Folgenden definieren wir die *Riemann'sche Zahlenkugel* – ein gutes Modell um die komplexen Zahlen zu erweitern und für uns auch der erste Kontakt mit einer *Riemann'schen Fläche*.

Definition 70. Die *Riemann'sche Zahlenkugel* (oder auch *Riemann-Sphäre*) ist eine zweidimensionale Sphäre in \mathbb{R}^3 , gegeben durch

$$\mathbb{S}_{Rm}^2 := \{(\eta_1, \eta_2, \eta_3) \in \mathbb{R}^3 : \eta_1^2 + \eta_2^2 + (\eta_3 - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}\}. \quad (223)$$

Der Punkt $N = (0, 0, 1) \in \mathbb{S}_{Rm}^2$ heißt *Nordpol* von \mathbb{S}_{Rm}^2 und $S = (0, 0, 0) \in \mathbb{S}_{Rm}^2$ heißt *Südpol*.

Wie erweitert die Riemann'sche Zahlenkugel unsere Sicht auf die komplexe Zahlenebene?

Gedankenexperiment 71. Für $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) \in \mathbb{S}_{Rm}^2 \setminus \{N\}$ definieren wir die Gerade

$$L := \overline{N\eta} := \{\eta + t(N - \eta) : t \in \mathbb{R}\} \quad (224)$$

durch den Nordpol N und η . Wir untersuchen nun wo L sich mit der Ebene $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ schneidet. Dazu beobachte

$$\eta + t(N - \eta) = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) + t((0, 0, 1) - (\eta_1, \eta_2, \eta_3)) = ((1 - t)\eta_1, (1 - t)\eta_2, \eta_3 + t(1 - \eta_3)). \quad (225)$$

Damit $\eta + t^*(N - \eta)$ in $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ ist muss also gelten $\eta_3 + t^*(1 - \eta_3) = 0$. Da $\eta_3 \neq 1$ (weil $\eta \neq N$) können wir nach t^* auflösen und erhalten

$$t^* = \frac{-\eta_3}{1 - \eta_3}. \quad (226)$$

Insbesondere gilt

$$1 - t^* = 1 + \frac{\eta_3}{1 - \eta_3} = \frac{1 - \eta_3}{1 - \eta_3} + \frac{\eta_3}{1 - \eta_3} = \frac{1}{1 - \eta_3}. \quad (227)$$

Somit haben wir herausgefunden, dass der einzige Schnittpunkt von L und $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ gegeben ist durch

$$\eta + t^*(N - \eta) \stackrel{(225)}{=} ((1 - t^*)\eta_1, (1 - t^*)\eta_2, 0) = \left(\frac{\eta_1}{1 - \eta_3}, \frac{\eta_2}{1 - \eta_3}, 0\right). \quad (228)$$

Identifiziert man nun $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ mit \mathbb{C} durch $(x, y, 0) \equiv x + iy$, so wird die rechte Seite von (228) mit

$$\psi(\eta_1, \eta_2, \eta_3) := \frac{\eta_1 + i\eta_2}{1 - \eta_3} \quad (229)$$

identifiziert. Diese Formel charakterisiert also den eindeutigen Schnittpunkt zwischen der Gerade $L = \overline{N\eta}$ und der Ebene.

Wir werden später zeigen (eventuell ist es geometrisch schon anschaulich) dass $\mathbb{S}_{Rm}^2 \setminus \{N\}$ durch $\psi(\eta_1, \eta_2, \eta_3) := \frac{\eta_1 + i\eta_2}{1 - \eta_3}$ bijektiv auf \mathbb{C} abgebildet wird. Somit kann \mathbb{C} mit $\mathbb{S}_{Rm}^2 \setminus \{N\}$ identifiziert werden. Jetzt sehen wir auch wie \mathbb{C} erweitert werden kann: $\mathbb{S}_{Rm}^2 \setminus \{N\}$ kann leicht durch N ergänzt werden und wir erhalten die gesamte Riemann-Sphäre. Dadurch wird \mathbb{C} um einen Punkt erweitert. Wir fassen diesen Punkt oft als *Punkt im Unendlichen* auf und schreiben $\mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Aus Abbildung 2 wird eventuell klar warum wir diesen Punkt als Punkt im Unendlichen sehen: Punkte in \mathbb{S}_{Rm}^2 die "nah" am Nordpol N sind, werden durch ψ auf komplexe Zahlen mit sehr großer Norm abgebildet!

Definition 72. STEREOGRAPHISCHE PROJEKTION Wir definieren die *stereographische*

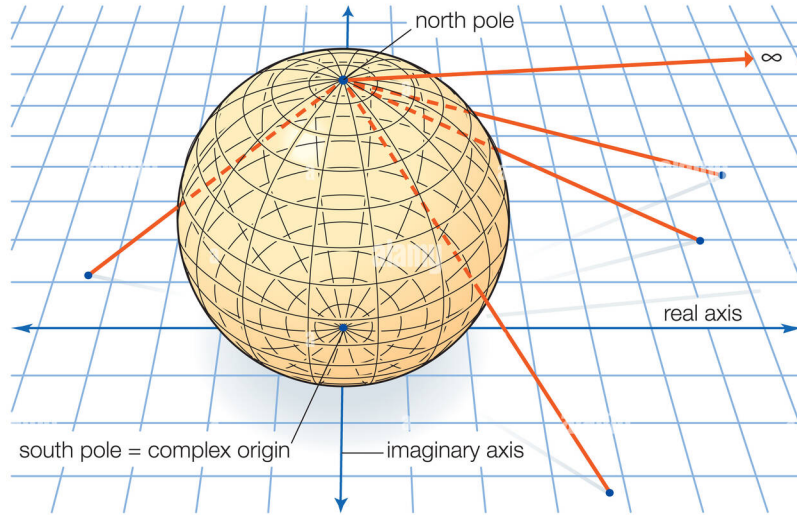


Abbildung 2: Die Riemann-Sphäre und die stereographische Projektion

Projektion $\psi : \mathbb{S}_{Rm}^2 \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ durch

$$\psi(\eta_1, \eta_2, \eta_3) := \begin{cases} \frac{\eta_1 + i\eta_2}{1 - \eta_3} & \eta_3 \neq 1 \\ \infty & \eta_3 = 1 \end{cases} \quad (230)$$

Die stereographische Projektion erlaubt uns eine neue sichtweise auf die komplexen Zahlen – jedenfalls sofern wir gezeigt haben, dass die bijektiv ist

Proposition 73. Die stereographische Projektion $\psi : \mathbb{S}_{Rm}^2 \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ ist bijektiv. Ihre Umkehrabbildung ist gegeben durch $\psi^{-1} : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{S}_{Rm}^2$ mit

$$\psi^{-1}(z) := \begin{cases} \left(\frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|^2+1}, \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2}{|z|^2+1} \right) & z \in \mathbb{C} \\ N & z = \infty \end{cases} \quad (231)$$

Beweis. Der schnellste Weg, die obige Proposition zu beweisen wäre, durch direktes Nachrechnen zu zeigen, dass die Abbildung in (231) die Umkehrabbildung ist. Wir wollen dies an der Stelle aber etwas konstruktiver machen.

Zur Surjektivität. Es sei $z \in \mathbb{C}_\infty$. Falls $z = \infty$ so gilt $z = \psi(N)$ und somit brauchen wir diesen Fall nicht mehr zu betrachten. Sei also $z \in \mathbb{C}$. Wir suchen nun ein $\eta \in \mathbb{S}_{Rm}^2 \setminus \{N\}$ mit $\psi(\eta) = z$. Für ein solches $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ muss gelten

$$\frac{\eta_1 + i\eta_2}{1 - \eta_3} = z. \quad (232)$$

Wir folgern

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{\eta_1}{1 - \eta_3}, \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{\eta_2}{1 - \eta_3} \quad (233)$$

und

$$|z|^2 = \frac{|\eta_1 + i\eta_2|^2}{(1 - \eta_3)^2} = \frac{\eta_1^2 + \eta_2^2}{(1 - \eta_3)^2}. \quad (234)$$

Mit der Gleichung der Riemann'schen Zahlenkugel (223) gilt $\eta_1^2 + \eta_2^2 = \frac{1}{4} - (\eta_3 - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} - (\eta_3^2 - \eta_3 - \frac{1}{4}) = \eta_3 - \eta_3^2$. Dies in (234) eingesetzt ergibt

$$|z|^2 = \frac{\eta_3 - \eta_3^2}{(1 - \eta_3)^2} = \frac{\eta_3(1 - \eta_3)}{(1 - \eta_3)^2} = \frac{\eta_3}{1 - \eta_3}. \quad (235)$$

Wir lösen diese Gleichung nach η_3 auf:

$$|z|^2 = \frac{\eta_3}{1 - \eta_3} \Leftrightarrow (1 - \eta_3)|z|^2 = \eta_3 \Leftrightarrow |z|^2 = \eta_3(1 + |z|^2). \quad (236)$$

Somit folgt

$$\eta_3 = \frac{|z|^2}{1 + |z|^2}. \quad (237)$$

Insbesondere gilt auch

$$1 - \eta_3 = 1 - \frac{|z|^2}{1 + |z|^2} = \frac{1}{1 + |z|^2}. \quad (238)$$

Diese Information in (233) eingesetzt liefert

$$\eta_1 = (1 - \eta_3)\operatorname{Re}(z) = \frac{\operatorname{Re}(z)}{1 + |z|^2} \quad (239)$$

sowie

$$\eta_2 = (1 - \eta_3)\operatorname{Im}(z) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{1 + |z|^2}. \quad (240)$$

Es folgt, dass

$$\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) = \left(\frac{\operatorname{Re}(z)}{1 + |z|^2}, \frac{\operatorname{Im}(z)}{1 + |z|^2}, \frac{|z|^2}{1 + |z|^2} \right). \quad (241)$$

das Gewünschte leistet.

Zur Injektivität. Diese ist den Lesenden als Übungsaufgabe überlassen. Dadurch, dass wir die Umkehrabbildung bereits mit (241) konstruiert haben, sollte das Nachrechnen kein Problem sein.

Anstatt der komplexen Zahlenebene \mathbb{C} haben wir nun eine neue Anschauung der komplexen Zahlen als $\mathbb{S}_{Rm}^2 \setminus \{N\}$. Warum benötigen wir überhaupt eine neue Anschauung? Reicht uns die Betrachtung als Zahlenebene nicht? Eventuell überzeugt Sie das nachfolgende Beispiel: Viele Abbildungen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ (oder auch $f : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$) sind auf der Riemann'schen Zahlenkugel viel leichter zu verstehen. Das bedeutet konkret: Die Abbildung $\tilde{f} := \psi^{-1} \circ f \circ \psi : \mathbb{S}_{Rm}^2 \rightarrow \mathbb{S}_{Rm}^2$ hat eventuell eine viel einfachere Gestalt!

Beispiel 74. Wir betrachten $f : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ gegeben durch

$$f(z) := \begin{cases} \frac{1}{z} & z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ \infty & z = 0 \\ 0 & z = \infty \end{cases} \quad (242)$$

und definieren $\tilde{f} := \psi^{-1} \circ f \circ \psi : \mathbb{S}_{Rm}^2 \rightarrow \mathbb{S}_{Rm}^2$.

Behauptung.

$$\tilde{f}(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = (\eta_1, -\eta_2, 1 - \eta_3) \quad \forall \eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) \in \mathbb{S}_{Rm}^2. \quad (243)$$

Bevor wir diese Behauptung zeigen, überlegen wir zunächst, was das bedeutet. Wir definieren die *Spielgelungen* $\sigma_i : \mathbb{S}_{Rm}^2 \rightarrow \mathbb{S}_{Rm}^2$, $i = 1, 2, 3$ durch

$$\sigma_1(\eta_1, \eta_2, \eta_3) := (-\eta_1, \eta_2, \eta_3), \quad (244)$$

$$\sigma_2(\eta_1, \eta_2, \eta_3) := (\eta_1, -\eta_2, \eta_3), \quad (245)$$

und

$$\sigma_3(\eta_1, \eta_2, \eta_3) := (\eta_1, \eta_2, 1 - \eta_3). \quad (246)$$

Man überzeugt sich leicht davon, dass $\sigma_i : \mathbb{S}_{Rm}^2 \rightarrow \mathbb{S}_{Rm}^2$ wohldefiniert sind und, dass σ_1 die Spiegelung an der $\eta_2\eta_3$ -Achse ist, σ_2 die Spiegelung an der $\eta_1\eta_3$ -Achse und σ_3 die Spiegelung an der $\eta_1\eta_2$ -Achse. Man sieht nun leicht, dass $f = \sigma_2 \circ \sigma_3$. Das komplexe Dividieren ist also auf der Riemann-Sphäre nichts anderes als ein Paar Spiegelungen. Dadurch bekommt das komplexe Dividieren eine völlig neue, elementargeometrische Interpretation.

Beweis der Behauptung. Wir berechnen nun zunächst für $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) \in \mathbb{S}_{Rm}^2 \setminus \{N\}$

$$(f \circ \psi)(\eta) = f\left(\frac{\eta_1 + i\eta_2}{1 - \eta_3}\right) = \begin{cases} \frac{1 - \eta_3}{\eta_1 + i\eta_2} & \eta_1 + i\eta_2 \neq 0 \\ \infty & \eta_1 + i\eta_2 = 0 \end{cases} \quad (247)$$

Wir zeigen betrachten ab hier nur den ersten Fall $\eta_1 + i\eta_2 \neq 0$ und überlassen den anderen Fall den Lesenden als Übungsaufgabe. Es gilt falls $\eta_1 + i\eta_2 \neq 0$

$$(f \circ \psi)(\eta) = \frac{1 - \eta_3}{\eta_1 + i\eta_2} = \frac{(1 - \eta_3)(\eta_1 - i\eta_2)}{|\eta_1 + i\eta_2|^2} = \frac{(1 - \eta_3)}{\eta_1^2 + \eta_2^2}(\eta_1 - i\eta_2). \quad (248)$$

Wiederum mit der Gleichung der Riemann-Sphäre (223) erhalten wir

$$\eta_1^2 + \eta_2^2 = \frac{1}{4} - \left(\eta_3 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - \left(\eta_3^2 - \eta_3 + \frac{1}{4}\right) = \eta_3 - \eta_3^2 = \eta_3(1 - \eta_3). \quad (249)$$

Dies in (248) eingesetzt liefert uns

$$(f \circ \psi)(\eta) = \frac{1 - \eta_3}{\eta_3(1 - \eta_3)}(\eta_1 - i\eta_2) = \frac{\eta_1 - i\eta_2}{\eta_3} \quad (250)$$

Um nun $\tilde{f} = \psi^{-1} \circ f \circ \psi$ zu berechnen, könnte man nun die Formel in (231) berechnen. Um uns etwas Schreibarbeit zu sparen werden wir einen Trick anwenden. Wir beobachten zunächst

$$(f \circ \psi)(\eta) = \frac{\eta_1 - i\eta_2}{\eta_3} = \frac{\eta_1 + i(-\eta_2)}{1 - (1 - \eta_3)}. \quad (251)$$

Nun ist (wie man als leichte Übungsaufgabe zeigt) $(\eta_1, -\eta_2, 1 - \eta_3) \in \mathbb{S}_{Rm}^2$ und es gilt

$$\psi(\eta_1, -\eta_2, 1 - \eta_3) = \frac{\eta_1 + i(-\eta_2)}{1 - (1 - \eta_3)} \stackrel{(251)}{=} (f \circ \psi)(\eta). \quad (252)$$

Verketten wir diese Gleichung mit ψ^{-1} so folgt die Behauptung.

1.12 Der chordale Abstand

Nun haben wir durch die stereographische Projektion die Mengen \mathbb{C}_∞ und \mathbb{S}_{Rm}^2 miteinander identifizieren können. Die Zahlenebene \mathbb{C} war für uns aber immer viel mehr als nur eine Menge: Es war zB ein *Körper*, ein *Vektorraum* und ein *vollständiger metrischer Raum*! Dass wir die Körperstruktur und Vektorraumstruktur verlieren, wenn wir uns einfach einen Punkt ∞ *dazuerrfinden*, ist eventuell einsichtig. Wir sind nun noch daran interessiert, ob wir \mathbb{C}_∞ immerhin noch die Struktur eines metrischen Raumes geben können. Dazu überlegen wir uns zunächst, dass wir auf \mathbb{S}_{Rm}^2 bereits eine Metrik haben: Als Teilmenge von \mathbb{R}^3 können wir es stets mit dem *Euklidischen Abstand* ausstatten, d.h.

$$d_{euc}((\eta_1, \eta_2, \eta_3), (\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2, \tilde{\eta}_3)) := \sqrt{(\eta_1 - \tilde{\eta}_1)^2 + (\eta_2 - \tilde{\eta}_2)^2 + (\eta_3 - \tilde{\eta}_3)^2}. \quad (253)$$

Definition 75. CHORDALER ABSTAND. Für $z, w \in \mathbb{C}_\infty$ definieren wir den *chordalen Abstand*

$$\chi(z, w) := d_{euc}(\psi^{-1}(z), \psi^{-1}(w)). \quad (254)$$

Proposition 76. Der Raum $(\mathbb{C}_\infty, \chi)$ ist ein metrischer Raum

Beweis. Wir müssen nachrechnen, dass χ die Axiome einer Metrik erfüllt. Seien hierzu $z, w \in \mathbb{C}$ beliebig.

ZUR DEFINITHEIT. Dass $\chi(z, w) \geq 0$ folgt sofort aus der Tatsache, dass $d_{euc} \geq 0$. Außerdem gilt wegen der Definitheit von d_{euc} und der Bijektivität von ψ^{-1}

$$\chi(z, w) = 0 \Leftrightarrow d_{euc}(\psi^{-1}(z), \psi^{-1}(w)) = 0 \Leftrightarrow \psi^{-1}(z) = \psi^{-1}(w) \Leftrightarrow z = w. \quad (255)$$

ZUR SYMMETRIE. Diese erbt sich von der Symmetrie von d_{euc} . Es gilt

$$\chi(w, z) = d_{euc}(\psi^{-1}(w), \psi^{-1}(z)) = d_{euc}(\psi^{-1}(z), \psi^{-1}(w)) = \chi(z, w). \quad (256)$$

ZUR DREIECKSUNGLEICHUNG. Diese überlassen wir den Lesenden als Übungsaufgabe. (Sie erbt sich auch von der Dreiecksungleichung für d_{euc}).

Der chordale Abstand auf \mathbb{C}_∞ ist nicht dasselbe wie unsere bereits bekannte Metrik $d := d_{|\cdot|}$ auf \mathbb{C} . Insbesondere eine Eigenschaft ist anders:

Proposition 77. Der metrische Raum $(\mathbb{C}_\infty, \chi)$ ist *kompakt*, d.h. jede Folge in $(\mathbb{C}_\infty, \chi)$ besitzt eine bezüglich χ konvergente Teilfolge.

Beweis. Folgt direkt aus der Kompaktheit von $(\mathbb{S}_{Rm}^2, d_{euc})$ (welche wiederum daraus folgt, dass \mathbb{S}_{Rm}^2 eine kompakte Teilmenge von \mathbb{R}^3 ist).

Beachte, dass (\mathbb{C}, d) nicht kompakt ist. Zum Beispiel besitzt die Folge $(n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ keine konvergente Teilfolge. Wir werden später sehen, dass diese Folge in $(\mathbb{C}_\infty, \chi)$ gegen ∞ konvergiert.

Obwohl die Metriken d und χ nicht dieselben sind, sind sie auf beschränkten Teilmengen von \mathbb{C} miteinander *vergleichbar*, wie wir an den expliziten Formeln (281) sehen können.

Somit haben $(\mathbb{C}_\infty, \chi)$ und (\mathbb{C}, d) “weit weg von ∞ ” ähnliche Eigenschaften. Und doch stellt die Hinzunahme des Punktes ∞ eine zusätzliche Eigenschaft her: Die *Kompaktheit*.

Man nennt \mathbb{C}_∞ daher auch *Ein-Punkt-Kompaktifizierung* von \mathbb{C} . Mit ein wenig mehr Topologie könnten wir den Begriff auch noch abstrakter fassen. Wir sparen das an dieser Stelle aus.

Proposition 78.

(i) Für $z, w \in \mathbb{C}$ gilt

$$\chi(z, w) = \frac{|z - w|}{\sqrt{1 + |z|^2} \sqrt{1 + |w|^2}} = \frac{d(z, w)}{\sqrt{1 + |z|^2} \sqrt{1 + |w|^2}}. \quad (257)$$

(ii) Für $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\chi(z, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1 + |z|^2}}. \quad (258)$$

Beweis. Zu (i). Wir verwenden die Formel (231). Es gilt für alle $z \in \mathbb{C}$

$$\psi^{-1}(z) = \left(\frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|^2+1}, \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2}{|z|^2+1} \right) \in \mathbb{S}_{Rm}^2 \quad (259)$$

Wir definieren nun $\eta_1(z) := \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|^2+1}$, $\eta_2(z) := \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|^2+1}$ und $\eta_3(z) := \frac{|z|^2}{|z|^2+1}$ und lernen aus (259) und (223), dass

$$\eta_1(z)^2 + \eta_2(z)^2 + \left(\eta_3(z) - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}. \quad (260)$$

Nun gilt

$$\chi(z, w)^2 = d_{euc}((\eta_1(z), \eta_2(z), \eta_3(z)), (\eta_1(w), \eta_2(w), \eta_3(w)))^2 \quad (261)$$

$$= (\eta_1(z) - \eta_1(w))^2 + (\eta_2(z) - \eta_2(w))^2 + (\eta_3(z) - \eta_3(w))^2 \quad (262)$$

$$= (\eta_1(z) - \eta_1(w))^2 + (\eta_2(z) - \eta_2(w))^2 + ((\eta_3(z) - \frac{1}{2}) - (\eta_3(w) - \frac{1}{2}))^2 \quad (263)$$

$$= \underbrace{\eta_1(z)^2 + \eta_2(z)^2 + (\eta_3(z) - \frac{1}{2})^2}_{=1/4 \text{ wegen (260)}} + \underbrace{\eta_1(w)^2 + \eta_2(w)^2 + (\eta_3(w) - \frac{1}{2})^2}_{=1/4 \text{ wegen (260)}} \quad (264)$$

$$- 2\eta_1(z)\eta_1(w) - 2\eta_2(z)\eta_2(w) - 2(\eta_3(z) - \frac{1}{2})(\eta_3(w) - \frac{1}{2}) \quad (265)$$

$$= \frac{1}{2} - 2(\eta_1(z)\eta_1(w) + \eta_2(z)\eta_2(w)) - 2(\eta_3(z) - \frac{1}{2})(\eta_3(w) - \frac{1}{2}). \quad (266)$$

Nun gilt mit der Definition von η_1, η_2

$$\eta_1(z)\eta_1(w) + \eta_2(z)\eta_2(w) = \frac{\operatorname{Re}(z)\operatorname{Re}(w)}{(|z|^2 + 1)(|w|^2 + 1)} + \frac{\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)}{(|z|^2 + 1)(|w|^2 + 1)}. \quad (267)$$

$$= \frac{\operatorname{Re}(z)\operatorname{Re}(w) + \operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)}{(|z|^2 + 1)(|w|^2 + 1)}. \quad (268)$$

Mit (52) lernen wir

$$\eta_1(z)\eta_1(w) + \eta_2(z)\eta_2(w) = \frac{\langle z, w \rangle}{(1 + |z|^2)(1 + |w|^2)}. \quad (269)$$

Nun beachte, dass $\eta_3(z) - \frac{1}{2} = \frac{|z|^2}{|z|^2 + 1} - \frac{1}{2} = \frac{2|z|^2 - (|z|^2 + 1)}{2(|z|^2 + 1)} = \frac{|z|^2 - 1}{2(|z|^2 + 1)}$. Wir folgern

$$(\eta_3(z) - \frac{1}{2})(\eta_3(w) - \frac{1}{2}) = \frac{(|z|^2 - 1)(|w|^2 - 1)}{4(|z|^2 + 1)(|w|^2 + 1)} = \frac{1 - |z|^2 - |w|^2 + |z|^2|w|^2}{4(|z|^2 + 1)(|w|^2 + 1)} \quad (270)$$

$$= \frac{1 + |z|^2 + |w|^2 + |z|^2|w|^2 - 2(|z|^2 + |w|^2)}{4(|z|^2 + 1)(|w|^2 + 1)} = \frac{(1 + |z|^2)(1 + |w|^2) - 2(|z|^2 + |w|^2)}{4(1 + |z|^2)(1 + |w|^2)} \quad (271)$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \frac{|z|^2 + |w|^2}{(1 + |z|^2)(1 + |w|^2)}. \quad (272)$$

Eingesetzt in (266) erhalten wir

$$\chi(z, w)^2 = \frac{1}{2} - \frac{2\langle z, w \rangle}{(1 + |z|^2)(1 + |w|^2)} - 2 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \frac{|z|^2 + |w|^2}{(1 + |z|^2)(1 + |w|^2)} \right) \quad (273)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{2\langle z, w \rangle}{(1 + |z|^2)(1 + |w|^2)} - \frac{1}{2} + \frac{|z|^2 + |w|^2}{(1 + |z|^2)(1 + |w|^2)} \quad (274)$$

$$= \frac{|z|^2 - 2\langle z, w \rangle + |w|^2}{(1 + |z|^2)(1 + |w|^2)} = \frac{|z - w|^2}{(1 + |z|^2)(1 + |w|^2)}. \quad (275)$$

Hierbei haben wir im letzten Schritt verwendet, dass

$$|z - w|^2 = \langle z - w, z - w \rangle = \langle z, z \rangle - 2\langle z, w \rangle + \langle w, w \rangle = |z|^2 - 2\langle z, w \rangle + |w|^2. \quad (276)$$

Ziehen wir die Wurzel, so folgt die Behauptung aus (275).

Zu (ii). Wir berechnen mit $\psi^{-1}(\infty) = N = (0, 0, 1)$

$$\chi(z, \infty)^2 = d_{\text{euc}}(\psi^{-1}(z), \psi^{-1}(\infty))^2 = d_{\text{euc}}\left(\left(\frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|^2+1}, \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2}{|z|^2+1}\right), (0, 0, 1)\right)^2 \quad (277)$$

$$= \frac{\operatorname{Re}(z)^2}{(|z|^2+1)^2} + \frac{\operatorname{Im}(z)^2}{(|z|^2+1)^2} + \left(\frac{|z|^2}{|z|^2+1} - 1\right)^2 \quad (278)$$

$$= \frac{\operatorname{Re}(z)^2}{(|z|^2+1)^2} + \frac{\operatorname{Im}(z)^2}{(|z|^2+1)^2} + \left(\frac{-1}{|z|^2+1}\right)^2 \quad (279)$$

$$= \frac{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2 + 1}{(|z|^2+1)^2} = \frac{|z|^2+1}{(|z|^2+1)^2} = \frac{1}{1+|z|^2}. \quad (280)$$

Die Behauptung folgt wiederum durch Wurzelziehen.

Nun können wir $\chi : \mathbb{C}_\infty \times \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ als Abbildungsvorschrift hinschreiben.

Korollar 79. Es gilt für $z, w \in \mathbb{C}$

$$\chi(z, w) = \begin{cases} \frac{|z-w|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|w|^2}} & z, w \in \mathbb{C} \\ \frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}} & z \in \mathbb{C}, w = \infty \\ \frac{1}{\sqrt{1+|w|^2}} & w \in \mathbb{C}, z = \infty \\ 0 & z = w = \infty. \end{cases} \quad (281)$$

Beweis. Folgt sofort aus der vorigen Proposition.

Mit dieser Formel können wir Konvergenz und Topologie von \mathbb{C}_∞ besser verstehen.

Beispiel 80.

BEHAUPTUNG. Die Folge $(n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert in $(\mathbb{C}_\infty, \chi)$ gegen ∞ .

BEWEIS DER BEHAUPTUNG.

$$\chi(n^2, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1+n^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+n^4}} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \quad (282)$$

Wir klären nun abschließend den Zusammenhang zwischen der Konvergenz $(\mathbb{C}, d_{|\cdot|})$ und in $(\mathbb{C}_\infty, \chi)$

Proposition 81. Es sei $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ eine Folge

- (i) Konvergiert $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in (\mathbb{C}, d) gegen ein $z \in \mathbb{C}$, so konvergiert $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auch in $(\mathbb{C}_\infty, \chi)$ gegen z .
- (ii) Konvergiert $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $(\mathbb{C}_\infty, \chi)$ gegen ein $z \in \mathbb{C}_\infty$, so tritt einer der zwei folgenden Fälle ein.
 - FALL 1. $(|z_n|)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ ist beschränkt (in \mathbb{R}). Dann ist $z \in \mathbb{C}$ und es konvergiert $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in (\mathbb{C}, d) gegen z .
 - FALL 2. $(|z_n|)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ ist unbeschränkt. Dann ist $z = \infty$ und es gilt $|z_n| \rightarrow \infty$ (in \mathbb{R}).

Beweis. Zu (i). Es konvergiere $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ in (\mathbb{C}, d) gegen z , d.h. $|z_n - z| \rightarrow 0, (n \rightarrow \infty)$. Dann gilt

$$\chi(z_n, z) = \frac{|z_n - z|}{\sqrt{(1 + |z_n|^2)(1 + |z|^2)}} \leq \frac{|z_n - z|}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{1}} = |z_n - z| = d(z_n, z) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \quad (283)$$

Zu (ii). Es konvergiere $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ in $(\mathbb{C}_\infty, \chi)$ gegen $z \in \mathbb{C}_\infty$, d.h. $\chi(z_n, z) \rightarrow 0, (n \rightarrow \infty)$. ZU FALL 1. Falls $(|z_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt ist, so gibt es ein $L > 0$ so, dass $|z_n| \leq L$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Insbesondere gilt

$$d(z_n, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1 + |z_n|^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{1 + L^2}} \not\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \quad (284)$$

Das bedeutet $z \neq \infty$, d.h. $z \in \mathbb{C}$. Deswegen können wir den ersten Fall in (281) verwenden und folgern

$$|z_n - z| = \chi(z_n, z) \sqrt{1 + |z|^2} \sqrt{1 + |z_n|^2} \quad (285)$$

$$\leq \chi(z_n, z) \sqrt{1 + |z|^2} \sqrt{1 + L^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \cdot \sqrt{1 + |z|^2} \sqrt{1 + L^2} = 0. \quad (286)$$

ZU FALL 2. Falls $(|z_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ unbeschränkt ist, gibt es eine Teilfolge $(l_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ mit $|z_{l_n}| \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)$. Da Teilfolgen konvergenter Folgen stets gegen denselben Grenzwert konvergent sind, gilt auch $\chi(z_{l_n}, z) \rightarrow 0$ für $z \rightarrow \infty$. Wir beobachten nun

$$\chi(z_{l_n}, \infty) \stackrel{(281)}{=} \frac{1}{\sqrt{1 + |z_{l_n}|^2}} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \quad (287)$$

Somit gilt

$$\chi(z, \infty) \leq \chi(z, z_{l_n}) + \chi(z_{l_n}, \infty) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad (288)$$

und es folgt $z = \infty$. Noch \mathbf{Z} : $|z_n| \rightarrow \infty$. Dies folgt direkt aus

$$0 \stackrel{\leftarrow}{\underset{n \rightarrow \infty}{\lim}} \chi(z_n, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1 + |z_n|^2}}. \quad (289)$$

Jetzt wo wir die Folgenkonvergenz in $(\mathbb{C}_\infty, \chi)$ verstanden haben können wir auch abgeschlossene/offene Mengen in \mathbb{C}_∞ verstehen.

Proposition 82. Eine Menge $A \subset (\mathbb{C}_\infty, \chi)$ ist abgeschlossen genau dann wenn eine der folgenden Bedingungen zutrifft

- (1) $A \subset \mathbb{C}$ ist abgeschlossen und beschränkt in (\mathbb{C}, d) .
- (2) $A = \mathbb{C}_\infty \setminus U$ wobei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge in (\mathbb{C}, d) ist.

Beweis. “ \Rightarrow ”. Es sei $A \subset (\mathbb{C}_\infty, \chi)$ abgeschlossen. Wir zeigen, dass Bedingung (1) oder (2) erfüllt sein muss.

FALL 1. $\infty \notin A$. Wir behaupten, dass dann A beschränkt in (\mathbb{C}, d) ist. In der Tat: Wäre A nicht beschränkt in (\mathbb{C}, d) , so gäbe es eine Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ mit $|z_n| \rightarrow \infty$. Dann würde aber auch gelten

$$\chi(z_n, \infty) \stackrel{(281)}{=} \frac{1}{\sqrt{1 + |z_n|^2}} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \quad (290)$$

Deswegen hat man $z_n \rightarrow \infty$ in $(\mathbb{C}_\infty, \chi)$. Da A aber abgeschlossen in $(\mathbb{C}_\infty, \chi)$ ist (und $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$), folgt $\infty \in A$. Noch \mathbf{Z} : A abgeschlossen in (\mathbb{C}, d) . Es sei dazu $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ eine Folge mit $z_n \rightarrow z$ in (\mathbb{C}, d) . \mathbf{Z} : $z \in A$. Wegen Proposition 81 (i) gilt auch $\chi(z_n, z) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Da nun A aber in $(\mathbb{C}_\infty, \chi)$ abgeschlossen ist, folgt $z \in A$, was zu zeigen war.

FALL 2. $\infty \in A$. Definiere $U := \mathbb{C}_\infty \setminus A$. Sicherlich gilt dann $U \subset \mathbb{C}$. \mathbf{Z} : U ist offen in (\mathbb{C}, d) . Angenommen nun U ist nicht offen in (\mathbb{C}, d) . Dann gibt es ein $z \in U$ und eine Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C} \setminus U$ mit $z_n \rightarrow z$ in (\mathbb{C}, d) . Beachte, dass $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C} \setminus U \subset A$ und nach Proposition 81 (i) gilt auch $z_n \rightarrow z$ in $(\mathbb{C}_\infty, \chi)$. Aus der Abgeschlossenheit von A in $(\mathbb{C}_\infty, \chi)$ folgt dann $z \in A$, was $z \in U = \mathbb{C} \setminus A$ widerspricht.

“ \Leftarrow ” überlassen wir den Lesenden als Übungsaufgabe (siehe Übungsblatt 4).

Wir wissen also nun explizit, was abgeschlossene (und somit auch offene) Teilmengen von $(\mathbb{C}_\infty, \chi)$ sind. Man sagt, wir haben die *Topologie* von $(\mathbb{C}_\infty, \chi)$ verstanden.

1.13 Möbiustransformationen

Im folgenden lernen wir die *Möbiustransformationen* kennen. Sie bilden eine wichtige Klasse von Abbildungen auf \mathbb{C}_∞ .

Definition 83. MÖBIUSTRANSFORMATIONEN. Für komplexe Zahlen $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ mit $ad - bc \neq 0$ definieren wir die zu $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ assoziierte *Möbiustransformation* T :

$\mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ durch

$$\text{Fall 1: } c \neq 0. \quad T(z) := \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & z \in \mathbb{C}, cz+d \neq 0 \\ \infty & z \in \mathbb{C} : cz+d = 0 \\ \frac{a}{c} & z = \infty. \end{cases} \quad (291)$$

$$\text{Fall 2: } c = 0. \quad T(z) := \begin{cases} \frac{az+b}{d} & z \in \mathbb{C} \\ \infty & z = \infty. \end{cases} \quad (292)$$

(Man beachte, dass im zweiten Fall das Teilen durch d wohldefiniert ist weil aus $c = d = 0$ folgen würde, dass $ad - bc = 0$). Wir bezeichnen die Menge aller Möbiustransformationen mit $\text{Moeb}(\mathbb{C}_\infty)$.

Die Forderung $ad - bc \neq 0$ hat eine spannende Parallele zur linearen Algebra. Es gilt nämlich dann

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc \neq 0, \quad (293)$$

d.h. die Matrix ist invertierbar in $\mathbb{C}^{2 \times 2}$. Somit gibt es einen Zusammenhang zwischen den invertierbaren 2×2 -Matrizen und den Möbiustransformationen. Um uns ein wenig Arbeit zu sparen schreiben wir für die zu $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ assoziierte Möbiustransformation auch oft kurz $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, d.h. wir schreiben die Funktionsvorschrift für $T(\infty)$ nicht explizit hin (und ignorieren auch den Fall $cz+d=0$). Man sollte aber stets beachten, dass $T(\infty)$ eigentlich stets gemäß (291)f. definiert ist.

Beispiel 84. Wichtige Möbiustransformationen sind:

1. Die *Translation*, d.h. $T(z) = z + b$ für ein $b \in \mathbb{C}$, assoziiert zu $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Die *Drehstreckung*, d.h. $T(z) = az$ für ein $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, assoziiert zu $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3. Die *Möbius-Inversion*, d.h. $T(z) = \frac{1}{z}$, assoziiert zu $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Dass die zweite Klasse von Möbiustransformationen eine *Drehstreckung* ist, kann wie folgt gesehen werden. Schreibt man in Polarkoordinaten $a = re^{i\theta}$ für ein $r \in (0, \infty)$ und $\theta \in (-\pi, \pi]$ so gilt

$$az = e^{i\theta}(rz) \quad \forall z \in \mathbb{C}. \quad (294)$$

Nun ist $z \mapsto rz$ stets eine Streckung mit *Streckfaktor* r und $w \mapsto e^{i\theta}w$ eine Drehung mit *Drehwinkel* θ , siehe Abbildung 1.

Wir werden später sehen, dass sich jede Möbiustransformation als Verkettung der oben genannten drei Typen schreiben lässt. Eine wichtige Erkenntnis auf dem Weg dorthin ist die folgende Proposition

Proposition 85. Es sei $T_1 : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ die zu $M_1 := \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ assoziierte Möbiustransformation sowie $T_2 : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ die zu $M_2 := \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ assoziierte Möbiustransformation. Dann ist $T_1 \circ T_2$ auch eine Möbiustransformation, assoziiert zum Matrixprodukt der beiden Matrizen $M_1 M_2$.

Beweis. Es seien $T_1, T_2 : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ und die Matrizen $M_1 := \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, M_2 := \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ wie in der Aussage. Wir berechnen zunächst das Matrixprodukt

$$M_1 M_2 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 + b_1 c_2 & a_1 b_2 + b_1 d_2 \\ c_1 a_2 + d_1 c_2 & c_1 b_2 + d_1 d_2 \end{pmatrix} =: M_3. \quad (295)$$

Es sei nun T_3 die zu M_3 assoziierte Möbiustransformation. **Z:** $T_1(T_2(z)) = T_3(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}_\infty$. Wir werden diese Behauptung nur im Spezialfall $z \in \mathbb{C} : c_2 z + d_2 \neq 0, c_1 T_2(z) + d_1 \neq 0$ beweisen. Die Verifikation der anderen Fälle überlassen wir den Lesenden als Übungsaufgabe. In dem oben genannten Spezialfall gilt

$$T_1(T_2(z)) = T_1 \left(\frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} \right) = \frac{a_1 \left(\frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} \right) + b_1}{c_1 \left(\frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} \right) + d_1} = \frac{a_1(a_2 z + b_2) + b_1(c_2 z + d_2)}{c_1(a_2 z + b_2) + d_1(c_2 z + d_2)} \quad (296)$$

$$= \frac{(a_1 a_2 + b_1 c_2)z + (a_1 b_2 + b_1 d_2)}{(c_1 a_2 + d_1 c_2)z + (c_1 b_2 + d_1 d_2)} = T_3(z). \quad (297)$$

Die Behauptung ist (im oben genannten Spezialfall) gezeigt.

Eine besonders wichtige Konsequenz ist die folgende Beobachtung

Korollar 86. Jede Möbiustransformation ist bijektiv auf \mathbb{C}_∞ . Konkreter: Ist $T : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ die zu $M \in GL_2(\mathbb{C})$ assoziierte Möbiustransformation, so ist die zu M^{-1} assoziierte Möbiustransformation die Umkehrabbildung von T .

Beweis. Es sei T die zu M assoziierte Möbiustransformation und \tilde{T} die zu M^{-1} assoziierte Möbiustransformation. Dann ist $T \circ \tilde{T}$ die zu $MM^{-1} = I_2$ assoziierte Möbiustransformation. Diese ist gegeben durch

$$(T \circ \tilde{T})(z) = \frac{1 \cdot z + 0}{0 \cdot z + 1} = z, \quad (298)$$

das bedeutet $T \circ \tilde{T} = \text{id}_{\mathbb{C}_\infty}$. Analog zeigt man $\tilde{T} \circ T = \text{id}_{\mathbb{C}_\infty}$.

Wir wiederholen an dieser Stelle nochmal, dass sich für $M \in GL_2(\mathbb{C})$ die inverse Matrix M^{-1} sehr dankbar berechnen lässt, mithilfe der folgenden Formel

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \quad (299)$$

Algebraisch haben wir hier gerade folgendes beobachtet: die Menge aller Möbiustransformationen $\text{Moeb}(\mathbb{C}_\infty)$ bildet eine *Untergruppe* der Gruppe aller Bijektionen auf \mathbb{C}_∞ (d.h. von $\text{Bij}(\mathbb{C}_\infty, \mathbb{C}_\infty)$, welche eine Gruppe bezüglich der Verkettung \circ von Abbildungen ist).

Proposition 85 zeigt, dass es einen *Gruppenhomomorphismus* zwischen $GL_2(\mathbb{C}) := \{M \in \mathbb{C}^{2 \times 2} : M \text{ invertierbar}\}$ und $\text{Moeb}(\mathbb{C}_\infty)$ gibt. Dieser ist gegeben durch $\Phi : GL_2(\mathbb{C}) \rightarrow \text{Moeb}(\mathbb{C}_\infty)$,

$$\Phi(M) := \text{die zu } M \text{ assoziierte Möbiustransformation.} \quad (300)$$

Unsere Behauptung, dass jede Möbiustransformation aus einer Verkettung der drei Typen aus Beispiel 84 erzeugt werden kann, lässt sich nun auf ein reines Problem aus der linearen Algebra zurückführen: Die Zerlegung einer invertierbaren Matrix als *Produkt von Elementarmatrizen*.

Proposition 87. Es sei $M \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ eine invertierbare Matrix. Dann gibt es endlich viele invertierbare Matrizen $S_1, \dots, S_N \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ mit $M = S_N \cdot S_{N-1} \cdot \dots \cdot S_1$ und jede Matrix S_i ist entweder gegeben durch $S_i = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ für ein $b \in \mathbb{C}$ oder $S_i = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ für ein $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ oder $S_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Beweis. Wir wissen aus der linearen Algebra, dass sich jede invertierbare Matrix $M \in GL_2(\mathbb{C})$ aus der Einheitsmatrix $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ durch das Ausführen endlich vieler *elementarer Zeilenoperationen* erhalten lässt. Elementare Zeilenoperationen sind

1. Addieren eines beliebigen Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile.
2. Multiplizieren einer Zeile mit einem Faktor ungleich Null.
3. Vertauschen zweier Zeilen.

Da wir aufgrund der dritten Operation alle Zeilen immer vertauschen dürfen, würden es auch genügen, die Operationen von Typ 1 und 2 nur auf der ersten Zeile zuzulassen. Das bedeutet es genügen auch folgende Operationen

- 1'. Addieren eines beliebigen Vielfachen der zweiten Zeile zur ersten Zeile.
- 2'. Multiplizieren der ersten Zeile mit einem Faktor ungleich Null.
- 3'. Vertauschen der beiden Zeilen.

Die Operation 1' entspricht nun der Multiplikation mit der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (von links) für ein $b \in \mathbb{C}$. In der Tat:

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ w_3 & w_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 + bw_3 & w_2 + bw_4 \\ w_2 & w_4 \end{pmatrix} \quad (301)$$

entspricht der Addition des b -fachen der zweiten Zeile zur ersten Zeile. Die Operation 2' wiederum entspricht der Multiplikation mit $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (von links) für ein $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. In der Tat:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ w_3 & w_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aw_1 & aw_2 \\ w_2 & w_4 \end{pmatrix} \quad (302)$$

entspricht dem Multiplizieren der ersten Zeile mit dem Faktor $a \neq 0$. Die Operation 3' entspricht der Multiplikation mit $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (von links). In der Tat:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ w_3 & w_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_3 & w_4 \\ w_1 & w_2 \end{pmatrix} \quad (303)$$

entspricht dem Vertauschen der beiden Zeilen. Man nehme nun die Einheitsmatrix I_2 und führe $N \in \mathbb{N}$ Operationen der Form 1', 2', 3' aus bis man M erhält. Zu jeder dieser Operationen ist eine Matrix S_i ($i = 1, \dots, N$) wie in der Aussage assoziiert. Dann gilt

$$M = S_N \cdot S_{N-1} \cdot \dots \cdot S_1 \cdot I = S_N \cdot \dots \cdot S_1. \quad (304)$$

Die Behauptung folgt.

Korollar 88. Jede Möbiustransformation $T : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ ist Verkettung endlich vieler *Translationen*, *Drehstreckungen* und *Möbiusinversionen* (im Sinne von Beispiel 84).

Beweis. Es sei $T : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ eine Möbiustransformation, assoziiert zu $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$. Aus der vorigen Proposition wissen wir, dass $M = S_N \cdot \dots \cdot S_1$, wobei jede der Matrizen S_i von der Form $S_i = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ für ein $b \in \mathbb{C}$ oder $S_i = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ für ein $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ oder $S_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist. Es sei nun $T_i : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ die zu S_i assoziierte Möbiustransformation ($i = 1, \dots, N$). Nach Beispiel 84 ist jedes der T_i entweder eine Translation, Drehstreckung oder Möbius-Inversion. Mit Proposition 85 (sukzessive angewendet) folgt aus $M = S_N \cdot \dots \cdot S_1$ die Gleichung

$$T = T_N \circ \dots \circ T_1 \quad (305)$$

und somit die Behauptung.

Als nächstes werden wir zeigen, dass jede Möbiustransformation durch ihren Wert auf drei verschiedenen Punkten $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}_\infty$ eindeutig bestimmt ist. Dazu zunächst folgendes Beispiel

Beispiel 89. Es seien drei verschiedene Zahlen $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ gegeben. Wir werden nun eine Möbiustransformation $T : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ konstruieren mit

$$T(z_1) = 0, T(z_2) = 1 \text{ und } T(z_3) = \infty. \quad (306)$$

Um $T(z_1) = 0$ und $T(z_3) = \infty$ zu bewerkstelligen, ist es sinnvoll, den Quotienten $\frac{z-z_1}{z-z_3}$ vorkommen zu lassen. Unser Ansatz ist also

$$T(z) \stackrel{!}{=} \xi \frac{z-z_1}{z-z_3} \quad \text{für ein festes } \xi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \quad (307)$$

Nun wird ξ so bestimmt dass $T(z_2) = 1$. Das bedeutet

$$1 \stackrel{!}{=} T(z_2) = \xi \frac{z_2-z_1}{z_2-z_3}. \quad \Rightarrow \quad \xi = \frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}. \quad (308)$$

Wir erhalten

$$T(z) = \frac{(z_2-z_3)(z-z_1)}{(z_2-z_1)(z-z_3)} = \frac{(z_2-z_3)z - (z_2-z_3)z_1}{(z_2-z_1)z - (z_2-z_1)z_3}. \quad (309)$$

Dies definiert eine Möbiustransformation mit assoziierter Matrix

$$M := \begin{pmatrix} z_2-z_3 & -(z_2-z_3)z_1 \\ z_2-z_1 & (z_2-z_1)z_3 \end{pmatrix}. \quad (310)$$

Beispiel 90. Nun ist es auch möglich für alle verschiedenen $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ und alle verschiedenen $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}$ eine Möbiustransformation $T^* : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ zu konstruieren mit $T^*(z_1) = w_1$, $T^*(z_2) = w_2$ und $T^*(z_3) = w_3$. In der Tat: Nach dem vorigen Beispiel finden wir Möbiustransformationen $T, \tilde{T} : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ mit

$$T(z_1) = 0, \quad T(z_2) = 1, \quad T(z_3) = \infty \quad (311)$$

$$\tilde{T}(w_1) = 0, \quad \tilde{T}(w_2) = 1, \quad \tilde{T}(w_3) = \infty. \quad (312)$$

Vorschriften für T und \tilde{T} lassen sich leicht explizit angeben mit (309). Seien M und \tilde{M} die assoziierten Matrizen (vgl. (310)). Definiere nun $T^* := \tilde{T}^{-1} \circ T : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$. Dass T^* eine Möbiustransformation ist, folgt aus Proposition 86. Ferner gilt

$$T^*(z_1) = \tilde{T}^{-1}(T(z_1)) = \tilde{T}^{-1}(0) = w_1, \quad (313)$$

$$T^*(z_2) = \tilde{T}^{-1}(T(z_2)) = \tilde{T}^{-1}(1) = w_2, \quad (314)$$

$$T^*(z_3) = \tilde{T}^{-1}(T(z_3)) = \tilde{T}^{-1}(\infty) = w_3, \quad (315)$$

Die assoziierte Matrix ist dann $M^* := \tilde{M}^{-1}M$. Mithilfe dieser Formel kann man M^* explizit bestimmen und damit auch eine Vorschrift für T^* explizit angeben.

Nun, wo wir einige Spezialfälle diskutiert haben, können wir die folgende allgemeine Proposition beweisen

Proposition 91. Es seien drei verschiedene $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}_\infty$ und drei verschiedene $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}_\infty$ gegeben. Dann gibt es genau eine Möbiustransformation $T : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ mit $T(z_1) = w_1, T(z_2) = w_2, T(z_3) = w_3$.

Beweis. Schritt 1. Existenz. Es genügt, die Behauptung im Spezialfall $w_1 = 0, w_2 = 1$ und $w_3 = \infty$ zu zeigen. Denn dann können wir wie in Beispiel 90 vorgehen und erhalten die Behauptung für alle paarweise verschiedenen $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}_\infty$. Wir suchen nun also für paarweise verschiedene $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}_\infty$ eine Möbiustransformation $T : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ mit

$$T(z_1) = 0, \quad T(z_2) = 1, \quad T(z_3) = \infty \quad (316)$$

FALL 1. $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$. Diesen Spezialfall haben wir bereits in Beispiel 89 studiert.

FALL 2. $z_1, z_2 \in \mathbb{C}, z_3 = \infty$. Da in dem Fall $T(\infty) = \infty$ machen wir den Ansatz $T(z) \stackrel{!}{=} az + b$. Mit $T(z_1) = 0, T(z_2) = 1$ erhalten wir

$$\begin{cases} az_1 + b = 0 & \text{(I)} \\ az_2 + b = 1 & \text{(II)} \end{cases} \xrightarrow{\text{(II)-(I)}} \begin{cases} az_1 + b = 0 \\ a(z_2 - z_1) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} az_1 + b = 0 \\ a = \frac{1}{z_2 - z_1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -\frac{z_1}{z_2 - z_1} \\ a = \frac{1}{z_2 - z_1} \end{cases} \quad (317)$$

Somit leistet $T(z) := \frac{1}{z_2 - z_1}z + \frac{-z_1}{z_2 - z_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$ das Gewünschte, auch $T(\infty) = \infty$!

FALL 3. $z_3 \in \mathbb{C}, \infty \in \{z_1, z_2\}$. Betrachte die Möbiustransformation $F(z) = \frac{1}{z - z_3}$. Diese erfüllt $F(z_3) = \infty$ und $F(z_1), F(z_2) \in \mathbb{C}$. Nach Fall 2 gibt es dann eine Möbiustransformation $\tilde{T} : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ mit $\tilde{T}(F(z_1)) = 0, \tilde{T}(F(z_2)) = 1$ und $\tilde{T}(F(z_3)) = \infty$. Nun ist aber auch $T := \tilde{T} \circ F : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ eine Möbiustransformation. Diese leistet das Gewünschte, denn $T(z_1) = \tilde{T}(F(z_1)) = 0$ und analog $T(z_2) = \tilde{T}(F(z_2)) = 1, T(z_3) = \tilde{T}(F(z_3)) = \infty$.

Schritt 2. Eindeutigkeit. Seien $T, \tilde{T} : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ Möbiustransformationen mit

$$T(z_1) = w_1, \quad T(z_2) = w_2, \quad T(z_3) = w_3, \quad (318)$$

$$\tilde{T}(z_1) = w_1, \quad \tilde{T}(z_2) = w_2, \quad \tilde{T}(z_3) = w_3. \quad (319)$$

Definiere $\hat{T} := T \circ \tilde{T}^{-1}$, was nach Proposition 85 und Korollar 86 wiederum eine Möbiustransformation ist. Diese erfüllt $\hat{T}(w_1) = w_1, \hat{T}(w_2) = w_2$ und $\hat{T}(w_3) = w_3$. Sei \hat{T} etwa assoziiert zu $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

FALL 1. $\infty \in \{w_1, w_2, w_3\}$. Wir nehmen an, dass $w_3 = \infty, w_1, w_2 \in \mathbb{C}$. Die anderen Fälle sind analog. In diesem Fall gilt $c = 0$, da $\hat{T}(\infty) = \infty$, siehe Definition 83. Somit gibt es $a, b, d \in \mathbb{C}, ad \neq 0$ mit $\hat{T}(w) = \frac{a}{d}w + \frac{b}{d}$. Nun gilt $\hat{T}(w_i) = w_i$ für alle $i = 1, 2$ und daher

$$\frac{a}{d}w_i + \frac{b}{d} = w_i \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{a}{d} - 1\right)w_i - \frac{b}{d} = 0 \quad \forall i = 1, 2. \quad (320)$$

Somit hat das \mathbb{C} -Polynom $p(z) = \left(\frac{a}{d} - 1\right)z + \frac{b}{d}$ zwei verschiedene Nullstellen $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$. Nun kann p also kein nichttriviales \mathbb{C} -Polynom sein, denn dann wäre p vom Grade höchstens 1

und hätte damit höchstens eine Nullstelle. Wir folgern $p \equiv 0$ und somit $\frac{a}{d} = 1$ und $\frac{b}{d} = 0$. Es gilt dann

$$\hat{T}(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = z \quad \forall z \in \mathbb{C}. \quad (321)$$

Somit gilt $\hat{T} = \text{id}_{\mathbb{C}_\infty}$, d.h. $T \circ \tilde{T}^{-1} = \text{id}_{\mathbb{C}_\infty}$. Verketteten wir beide Seiten von rechts mit \tilde{T} so folgern wir $T = \tilde{T}$.

FALL 2. $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}$. In dem Fall folgt aus $\hat{T}(w_i) = w_i$ für alle $i = 1, 2, 3$, dass

$$\frac{aw_i + b}{cw_i + d} = w_i \quad \forall i = 1, 2, 3. \quad (322)$$

Beachte, dass $cw_i + d \neq 0$ für alle i , denn andernfalls wäre $w_i = \hat{T}(w_i) = \infty$. Wir folgern für $i = 1, 2, 3$

$$aw_i + b = w_i(cw_i + d). \quad \Rightarrow \quad cw_i^2 + (d - a)w_i - b = 0. \quad (323)$$

Somit hat das \mathbb{C} -Polynom $q(z) := cz^2 + (d - a)z - b$ drei Nullstellen w_1, w_2, w_3 . Wäre nun p ein nichttriviales \mathbb{C} -Polynom, so könnte es aufgrund seines Grades wiederum nur maximal 2 Nullstellen haben. Es folgt $q \equiv 0$ und somit $c = b = 0$ und $a = d$. Wir folgern

$$\hat{T}(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{az + 0}{0z + a} = z. \quad (324)$$

Es folgt wiederum $\text{id}_{\mathbb{C}_\infty} = \hat{T} = T \circ \tilde{T}^{-1}$ und daher $T = \tilde{T}$. Die Eindeutigkeit ist bewiesen.

Zum Schluss zeigen wir noch, dass jede Möbiustransformation Geraden (oder Kreise) auf Geraden oder Kreise abbildet. Man spricht bei Geraden oder Kreisen auch von *verallgemeinerten Kreisen* und nennt diese Eigenschaft daher *Kreistreue*.

Proposition 92. KREISTREUE. Es sei $T : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ eine Möbiustransformation und sei $A \subset \mathbb{C}_\infty$ entweder eine Gerade oder ein Kreis. Dann ist das Bild $T(A)$ entweder eine Gerade oder ein Kreis. Hierbei ist eine *Gerade* stets eine Menge der Form

$$L := L(w_1, w_2) := \{w_1 + tw_2 : t \in \mathbb{R}\} \cup \{\infty\} \quad w_1, w_2 \in \mathbb{C}, w_2 \neq 0, \quad (325)$$

und ein *Kreis* stets eine Menge der Form

$$C := C(a, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a| = r\} \quad a \in \mathbb{C}, r > 0. \quad (326)$$

Beweis. Es genügt wegen Korollar 88 die Behauptung unter der Annahme zu zeigen, dass T eine Translation, Drehstreckung oder Möbius-Inversion ist. Ist T eine Translation oder eine Drehstreckung, so ist die Behauptung anschaulich klar. Wir überlassen den Lesenden die Details als Übungsaufgabe. Spannender ist es bei der Möbius-Inversion. Wir

wiederholen nochmal, dass diese nach (251) gegeben ist durch $I : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$

$$I(z) := \begin{cases} \frac{1}{z} & z \in \mathbb{C}, z \neq 0 \\ \infty & z = 0 \\ 0 & z = \infty \end{cases} \quad (327)$$

Beachte, dass $I \circ I = \text{id}_{\mathbb{C}_\infty}$, d.h. $I = I^{-1}$.

Schritt 1. Wir zeigen, dass für alle Geraden L und alle Kreise C gilt, dass $I(L)$ und $I(C)$ eine Teilmenge einer Gerade oder eines Kreises ist.

Schritt 1.1 Es sei zuerst $L = L(w_1, w_2)$ eine Gerade.

FALL 1. $0 \in L$. Dann kann $w_1 = 0$ gewählt werden und insbesondere gilt $L = \{tw : t \in \mathbb{R}\} \cup \{\infty\}$. Wir behaupten nun, dass $I(L) \subset \{uw^{-1} : u \in \mathbb{R}\} \cup \{\infty\}$. In der Tat: Sei $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann gilt für $u := \frac{1}{t}$.

$$I(tw) = \frac{1}{tw} = \frac{1}{t} \frac{1}{w} = uw^{-1}. \quad (328)$$

Da außerdem $I(0) = \infty$ und $I(\infty) = 0$ folgt die Behauptung.

FALL 2. $0 \notin L$. In diesem Fall ist es möglich, $w_1 \neq 0$ so zu wählen, dass $w_1 \perp w_2$ bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}}$. Wir verweisen hier auf die lineare Algebra (für das entsprechende Resultat in \mathbb{R}^2). Dann gilt für alle $t \in \mathbb{R}$ und $a := \frac{1}{2w_1}$, dass

$$\left| \frac{1}{w_1 + tw_2} - \frac{1}{2w_1} \right|^2 = \left| \frac{2w_1 - (w_1 + tw_2)}{(w_1 + tw_2)(2w_1)} \right|^2 = \left| \frac{w_1 - tw_2}{(w_1 + tw_2)2w_1} \right|^2 = \frac{1}{2|w_1|} \frac{|w_1 - tw_2|^2}{|w_1 + tw_2|^2}. \quad (329)$$

Nun gilt wegen den Linearitätseigenschaften des Skalarproduktes

$$|w_1 \pm tw_2|^2 = \langle w_1 \pm tw_2, w_1 \pm tw_2 \rangle = \langle w_1, w_1 \rangle \pm 2t \langle w_1, w_2 \rangle + t^2 \langle w_2, w_2 \rangle. \quad (330)$$

Da $\langle w_1, w_2 \rangle = 0$ fällt der Term mit “ \pm ” weg und man hat

$$|w_1 + tw_2|^2 = |w_1 - tw_2|^2. \quad (331)$$

Es folgt, dass die linke Seite von (329) unabhängig von t (und gleich $\frac{1}{2|w_1|}$) ist. Wir haben gezeigt, dass

$$|I(w_1 + tw_2) - \frac{1}{2w_1}| = \frac{1}{2|w_1|}. \quad (332)$$

Somit ist $I(L) \subset C(\frac{1}{2w_1}, \frac{1}{2|w_1|})$

Schritt 1.2. Sei nun $C = C(a, r)$ für $a \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ ein Kreis. Für alle $z \in C(a, r)$ folgt aus $|z - a|^2 = r^2$

$$r^2 = |z - a|^2 = |z|^2 + |a|^2 - 2\langle z, a \rangle = |z|^2 + |a|^2 - 2\text{Re}(a\bar{z}). \quad (333)$$

FALL 1. $0 \notin C$. In diesem Fall gilt insbesondere $|a|^2 \neq r^2$. Wir betrachten nun für

$z \in C(a, r)$ (insbesondere $z \neq 0$)

$$\left| I(z) - \frac{\bar{a}}{|a|^2 - r^2} \right|^2 = \left| \frac{1}{z} - \frac{\bar{a}}{|a|^2 - r^2} \right|^2 = \left| \frac{|a|^2 - r^2 - \bar{a}z}{z(|a|^2 - r^2)} \right|^2 = \frac{1}{|z|^2 | |a|^2 - r^2 |^2} | |a|^2 - r^2 - \bar{a}z |^2 \quad (334)$$

$$= \frac{1}{|z|^2 | |a|^2 - r^2 |^2} [(|a|^2 - r^2)^2 - 2(|a|^2 - r^2)\operatorname{Re}(a\bar{z}) + |a|^2|z|^2] \quad (335)$$

Nach (333) gilt nun $2\operatorname{Re}(a\bar{z}) = |a|^2 - r^2 + |z|^2$. Dies eingesetzt in (335) ergibt

$$\left| I(z) - \frac{\bar{a}}{|a|^2 - r^2} \right|^2 = \frac{1}{|z|^2 | |a|^2 - r^2 |^2} [(|a|^2 - r^2)^2 - (|a|^2 - r^2)(|a|^2 - r^2 + |z|^2) + |a|^2|z|^2] \quad (336)$$

$$= \frac{1}{|z|^2 | |a|^2 - r^2 |^2} (r^2|z|^2) = \frac{r^2}{| |a|^2 - r^2 |^2}. \quad (337)$$

Wir finden also $|I(z) - \frac{\bar{a}}{|a|^2 - r^2}| = \frac{r}{| |a|^2 - r^2 |}$ und somit

$$I(C(a, r)) \subset C\left(\frac{\bar{a}}{|a|^2 - r^2}, \frac{r}{| |a|^2 - r^2 |}\right). \quad (338)$$

FALL 2. $0 \in C$. Dann gilt $|a| = r$, etwa $a = re^{i\theta}$ für ein $\theta \in (-\pi, \pi]$. Sei nun $z \in C(a, r) \setminus \{0\}$. Dann ist $\frac{z-a}{r} \in C(0, 1) = \mathbb{S}^1$. Somit gibt es ein $\varphi \in (\theta - \pi, \theta + \pi]$ mit $\frac{z-a}{r} = e^{i\varphi}$, d.h. $z = a + re^{i\varphi}$ für ein $\varphi \in (-\theta - \pi, \theta + \pi]$. (Normalerweise hätte man jetzt $\varphi \in (-\pi, \pi]$ erwartet, aber wegen der 2π -Periodizität können wir genausogut $\varphi \in (-\theta - \pi, \theta + \pi]$ eindeutig wählen). Mit der Polarkoordinatendarstellung von a gilt $z = r(e^{i\theta} + e^{i\varphi})$. Da $z \neq 0$ angenommen wurde, folgern wir daher auch $e^{i\varphi} \neq -e^{i\theta}$, d.h. $\varphi \neq \theta + \pi$ und somit $\varphi \in (\theta - \pi, \theta + \pi)$. Somit gilt für $z \in C(a, r) \setminus \{0\}$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r e^{i\theta} + e^{i\varphi}} = \frac{1}{r \frac{e^{-i\frac{\theta+\varphi}{2}}}{e^{i\frac{\theta-\varphi}{2}} + e^{i\frac{\varphi-\theta}{2}}} = \frac{1}{r \frac{e^{-i\frac{\theta+\varphi}{2}}}{e^{i\frac{\theta-\varphi}{2}} + e^{-i\frac{\theta-\varphi}{2}}} = \frac{1}{r} \frac{e^{-i\theta} e^{i\frac{\theta-\varphi}{2}}}{2 \cos \frac{\theta-\varphi}{2}} \quad (339)$$

$$= \frac{e^{-i\theta} \cos \frac{\theta-\varphi}{2} + i \sin \frac{\theta-\varphi}{2}}{2r \cos \frac{\theta-\varphi}{2}} = \frac{1}{2r e^{i\theta}} \left(1 + i \tan \frac{\theta-\varphi}{2} \right) = \frac{1}{2a} + \tan \frac{\theta-\varphi}{2} \frac{i}{2a}. \quad (340)$$

Beachte nun, dass wegen $\varphi \in (-\theta - \pi, \theta + \pi)$ gilt, dass $\frac{\theta-\varphi}{2} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Definieren wir $t := \tan \frac{\theta-\varphi}{2} \in \mathbb{R}$ so erhalten wir

$$I(z) = \frac{1}{2a} + t \frac{i}{2a} \in L\left(\frac{1}{2a}, \frac{i}{2a}\right). \quad (341)$$

und damit $I(C(a, r) \setminus \{0\}) \subset L\left(\frac{1}{2a}, \frac{i}{2a}\right)$. Man beachte außerdem, dass $I(0) = \infty \in L\left(\frac{1}{2a}, \frac{i}{2a}\right)$. Somit folgt dann schlussendlich $I(C(a, r)) \subset L\left(\frac{1}{2a}, \frac{i}{2a}\right)$.

Schritt 2. Anstatt Teilmengeninklusionen gilt in Schritt 1 sogar stets Gleichheit. Dazu:

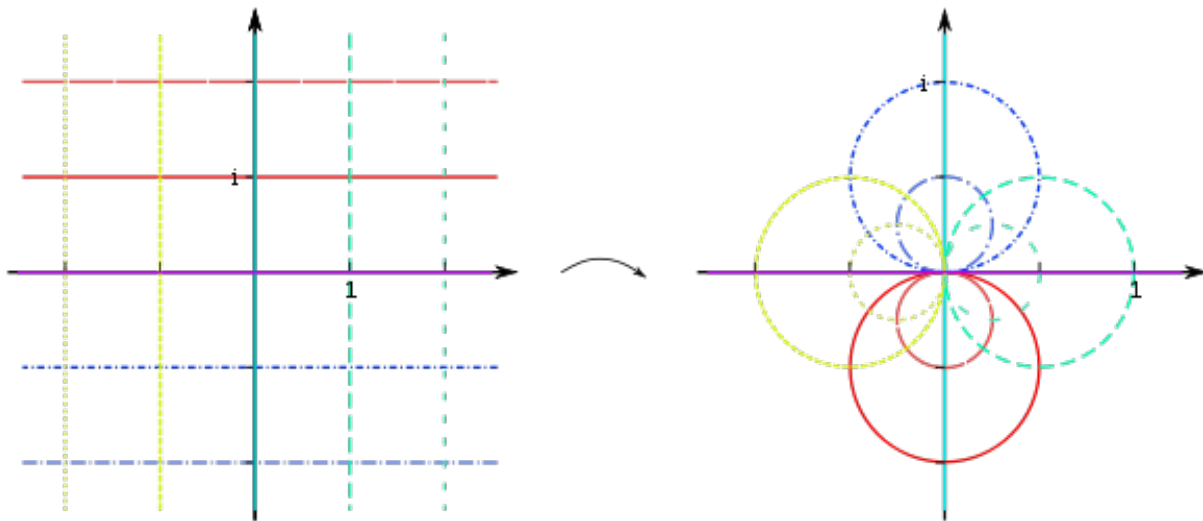


Abbildung 3: Bilder verschiedener Geraden unter der Möbiusinversion $I(z) = \frac{1}{z}$.

Angenommen es gäbe eine Menge $A \subset \mathbb{C}_\infty$ Gerade oder Kreis und eine Menge $B \subset \mathbb{C}_\infty$ Gerade oder Kreis mit $I(A) \subsetneq B$. Dann gilt (wegen $I \circ I = \text{id}$ und der Bijektivität von I)

$$A = (I \circ I)(A) = I(I(A)) \subsetneq I(B). \quad (342)$$

Da $I(B)$ nun aber eine Teilmenge einer Gerade oder eines Kreises ist und A bereits eine vollständige Gerade oder ein vollständiger Kreis, folgt $A = I(B)$. Insbesondere gilt, wegen der Bijektivität von I

$$B = I^{-1}(A) \stackrel{I=I^{-1}}{=} I(A) \subsetneq B. \quad (343)$$

Ein Widerspruch.

Die vorige Proposition lässt die Frage aufkommen, was Geraden und Kreise gemeinsam haben. Dies ist mit der stereographischen Projektion relativ leicht zu beantworten:

Bemerkung 93. Ist $A \subset \mathbb{C}_\infty$ eine Gerade oder ein Kreis, so ist $\psi^{-1}(A)$ ein Kreis auf \mathbb{S}_{Rm}^2 . Das bedeutet es gibt eine affine Ebene $E \subset \mathbb{R}^3$ so, dass $\psi^{-1}(A) = E \cap \mathbb{S}_{Rm}^2$. Wir verweisen für den Beweis auf Übungsblatt 5.

2 Holomorphe Funktionen

Nun kommen wir endlich zum hauptsächlichen Studienobjekt der Funktionentheorie, den *holomorphen Funktionen*. In diesem Kapitel führen wir zunächst die Grundlagen der Differentialrechnung im Komplexen ein. Es sei im Folgenden stets $D \subset \mathbb{C}$ eine offene, zusammenhängende und nichtleere Menge.

2.1 Definition und grundlegende Eigenschaften

Definition 94. Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *komplex differenzierbar* in einem Punkt $z_0 \in D$ falls

$$f'(z_0) := \lim_{z \rightarrow z_0, z \neq z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \in \mathbb{C} \quad (344)$$

existiert. (Genauer: Falls die Funktion $q_{z_0} : D \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch $q_{z_0}(z) := \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ einen Funktionsgrenzwert im Sinne von Definition 24 für $z \rightarrow z_0$ besitzt. Dieser wird dann $f'(z_0)$ genannt).

Wir nennen $f'(z_0)$ die *Ableitung* von f an der Stelle z_0 . Oft schreiben wir nur $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ und meinen damit implizit $\lim_{z \rightarrow z_0, z \neq z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$.

Eine weitere Notation, die wir einführen möchten ist

$$\partial_z f(z_0) := f'(z_0). \quad (345)$$

Dass hierbei das Differenziationszeichen einer partiellen Ableitung ∂_z verwendet wird, sieht zunächst merkwürdig aus, denn schließlich hängt f je nur von einer (komplexen) Variablen ab. Eine Erklärung liefert Übungsblatt 5.

Wir werden später noch viele Beispiele für komplex differenzierbare Funktionen diskutieren. Eine Klasse von Beispielen, die wir aber vorher schon brauchen sind die *konstanten Funktionen*. Man überzeugt sich leicht, dass diese komplex differenzierbar sind.

Für die Analysis typisch ist es, den Zusammenhang zwischen Differenzierbarkeit und Stetigkeit zu untersuchen

Proposition 95. Ist $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ bei $z_0 \in D$ komplex differenzierbar, so ist f auch stetig bei z_0 .

Beweis. Es sei $q_{z_0} : D \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ wie in Definition 94. Dann gilt

$$f(z) = \begin{cases} f(z_0) + q_{z_0}(z)(z - z_0) & z \neq z_0 \\ f(z_0) & z = z_0 \end{cases}. \quad (346)$$

Da $\lim_{z \rightarrow z_0} q_{z_0}(z) = f'(z_0)$, gibt es ein $\delta > 0$ so, dass $|q_{z_0}(z)| \leq |f'(z_0)| + 1$ für alle $z \in B_\delta(z_0)$. Wir folgern dann aus (346), dass

$$|f(z) - f(z_0)| \leq (|f'(z_0)| + 1)|z - z_0| \quad \forall z \in B_\delta(z_0) \quad (347)$$

Aus dieser Gleichung liest man leicht heraus, dass

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0). \quad (348)$$

Die Behauptung folgt.

Jedoch ist nicht jede stetige Funktion komplex differenzierbar. Es sind sogar Funktionen nicht komplex differenzierbar, von denen man es intuitiv eventuell erwartet hätte.

Beispiel 96. BEHAUPTUNG. Die Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch $f(z) = \bar{z}$ ist nirgends differenzierbar.

BEWEIS. Sei $z_0 \in \mathbb{C}$. Wir müssen zeigen, dass

$$\lim_{z \rightarrow z_0, z \neq z_0} \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0, z \neq z_0} \frac{\overline{z - z_0}}{z - z_0} \quad (349)$$

nicht existiert. Angenommen der Grenzwert in (349) existiert, etwa sei $\xi \in \mathbb{C}$ dieser Grenzwert. Betrachte zunächst die Folge $(z_0 + \frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$. Diese konvergiert gegen z_0 und deswegen gilt nach Definition 24

$$\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overline{(z_0 + \frac{1}{n}) - z_0}}{(z_0 + \frac{1}{n}) - z_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overline{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1. \quad (350)$$

Es folgt $\xi = 1$. Nun betrachte die Folge $(z_0 + \frac{i}{n})_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$. Diese konvergiert wiederum gegen z_0 und deswegen gilt

$$1 = \xi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overline{(z_0 + \frac{i}{n}) - z_0}}{(z_0 + \frac{i}{n}) - z_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overline{\frac{i}{n}}}{\frac{i}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-i}{i} = \lim_{n \rightarrow \infty} -1 = -1. \quad (351)$$

Ein Widerspruch.

Dieses Beispiel ist insbesondere aus folgendem Grund erstaunlich: Für $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ kann man stets die *assoziierte Funktion* $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definiert durch

$$\tilde{f}(x, y) := \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(f(x + iy)) \\ \operatorname{Im}(f(x + iy)) \end{pmatrix}, \quad (352)$$

betrachten. Für $f(z) := \bar{z}$ ist diese gegeben durch

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(f(x + iy)) \\ \operatorname{Im}(f(x + iy)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(\overline{x + iy}) \\ \operatorname{Im}(\overline{x + iy}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(x - iy) \\ \operatorname{Im}(x - iy) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}. \quad (353)$$

Die Funktion $\tilde{f}(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$ ist jedoch auf ganz \mathbb{R}^2 differenzierbar - sogar unendlich oft!

Differenzierbarkeit in \mathbb{R}^2 und in \mathbb{C} müssen also unterschiedliche Konzepte sein. Unser Ziel in diesem Kapitel ist es, Gemeinsamkeiten und Unterschiede zu verstehen.

Zunächst aber einige übliche *Rechenregeln für das Differenzieren*.

Proposition 97. SUMMEN-/PRODUKT-/QUOTIENTENREGEL. Es seien $f, g : D \rightarrow \mathbb{C}$ bei $z_0 \in D$ komplex differenzierbar und $\lambda \in \mathbb{C}$.

- (i) $f + \lambda g$ ist bei z_0 komplex differenzierbar und es gilt $(f + \lambda g)'(z_0) = f'(z_0) + \lambda g'(z_0)$.

(ii) $f \cdot g$ ist bei z_0 komplex differenzierbar und es gilt $(f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$.

(iii) Ist $g(z_0) \neq 0$, so ist $\frac{f}{g}$ bei z_0 komplex differenzierbar und $(\frac{f}{g})'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}$.

Beweis. Seien $f, g : D \rightarrow \mathbb{C}$, $z_0 \in D$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ wie in der Aussage. Zu (i).

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(f + \lambda g)(z) - (f + \lambda g)(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \underbrace{\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}}_{\rightarrow f'(z_0)} + \lambda \underbrace{\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}}_{\rightarrow g'(z_0)} = f'(z_0) + \lambda g'(z_0). \quad (354)$$

Zu (ii).

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(f \cdot g)(z) - (f \cdot g)(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)g(z) - f(z_0)g(z_0)}{z - z_0} \quad (355)$$

$$= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)g(z) - f(z_0)g(z) + f(z_0)g(z) - f(z_0)g(z_0)}{z - z_0} \quad (356)$$

$$= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(f(z) - f(z_0))g(z) + f(z_0)(g(z) - g(z_0))}{z - z_0} \quad (357)$$

$$= \lim_{z \rightarrow z_0} \underbrace{\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}}_{\rightarrow f'(z_0)} \underbrace{g(z)}_{\rightarrow g(z_0)} + f(z_0) \underbrace{\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}}_{\rightarrow g'(z_0)} \quad (358)$$

$$= f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0). \quad (359)$$

Hierbei wurde in (358) verwendet, dass g bei z_0 stetig ist (laut Proposition 95). Zu (iii). Wir zeigen die Behauptung nun im Spezialfall $f \equiv 1$, d.h. für $\frac{1}{g}$.

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\frac{1}{g(z)} - \frac{1}{g(z_0)}}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{g(z)g(z_0)} \frac{g(z_0) - g(z)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \underbrace{\frac{-1}{g(z)g(z_0)}}_{\rightarrow -g(z_0)^{-2}} \underbrace{\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}}_{\rightarrow g'(z_0)} = -\frac{g'(z_0)}{g(z_0)^2}. \quad (360)$$

Hierbei haben wir wieder die Stetigkeit von g benutzt (vgl. 95). Somit gilt $(\frac{1}{g})'(z_0) = -\frac{g'(z_0)}{g(z_0)^2}$. Sei nun $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ beliebig (und bei z_0 komplex differenzierbar). Mit (ii) gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(z_0) \stackrel{(ii)}{=} f'(z_0) \frac{1}{g(z_0)} + f(z_0) \left(-\frac{g'(z_0)}{g(z_0)^2}\right) = \frac{f'(z_0)}{g(z_0)} - \frac{f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}. \quad (361)$$

Erweitern wir den ersten Summanden mit $g(z_0)$ so erhalten wir

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}. \quad (362)$$

Neben den oben genannten üblichen drei Regeln des Differenzierens gibt es auch noch die *Kettenregel*.

Proposition 98. KETTENREGEL. Es seien $f : D_1 \rightarrow \mathbb{C}$ und $g : D_2 \rightarrow \mathbb{C}$ und $z_0 \in D_2$ so, dass $g(z_0) \in D_1$. Ist g bei z_0 komplex diffbar und f bei $g(z_0)$ komplex diffbar, so ist $(f \circ g)$ bei z_0 komplex diffbar und es gilt

$$(f \circ g)'(z_0) = f'(g(z_0))g'(z_0) \quad (363)$$

Beweis. Da f bei $g(z_0)$ komplex differenzierbar ist, gibt es eine Funktion $q_{g(z_0)} : D_1 \setminus \{g(z_0)\} \rightarrow \mathbb{C}$ wie in Definition 94 so, dass $\lim_{w \rightarrow g(z_0)} q_{g(z_0)}(w) = f'(g(z_0))$ und

$$f(w) = f(g(z_0)) + q_{g(z_0)}(w)(w - g(z_0)) \quad \forall w \in D \setminus \{g(z_0)\}. \quad (364)$$

Wir definieren nun die stetige Funktion $\tilde{q} : D_1 \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$\tilde{q}(w) := \begin{cases} q_{g(z_0)}(w) & w \neq g(z_0) \\ f'(g(z_0)) & w = g(z_0) \end{cases}. \quad (365)$$

Wir erhalten

$$f(w) = f(g(z_0)) + \tilde{q}(w)(w - g(z_0)) \quad \forall w \in D_1. \quad (366)$$

Umgestellt bedeutet das auch

$$f(w) - f(g(z_0)) = \tilde{q}(w)(w - g(z_0)) \quad \forall w \in D_1. \quad (367)$$

Man beachte: Da $g(z_0) \in D_1$ und D_1 offen ist, gibt es ein $\delta > 0$ so, dass $g(z) \in D_1$ für alle $z \in B_\delta(z_0)$. Wir bilden nun den Differenzenquotienten und verwenden (367) mit $w = g(z)$.

$$\frac{(f \circ g)(z) - (f \circ g)(z_0)}{z - z_0} = \frac{f(g(z)) - f(g(z_0))}{z - z_0} \quad (368)$$

$$\stackrel{(367)}{=} \frac{\tilde{q}(g(z))(g(z) - g(z_0))}{z - z_0} = \tilde{q}(g(z)) \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}. \quad (369)$$

Nun gilt $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = g'(z_0)$. Außerdem gilt (weil g bei z_0 stetig ist, dass $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = g(z_0)$) und somit $\lim_{z \rightarrow z_0} \tilde{q}(g(z)) \stackrel{(365)}{=} \tilde{q}(g(z_0)) = f'(g(z_0))$. Somit gilt

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(f \circ g)(z) - (f \circ g)(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \tilde{q}(g(z)) \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = f'(g(z_0))g'(z_0). \quad (370)$$

Bemerkung 99. Wir werden auch häufig eine weitere Kettenregel verwenden, die man analog zeigen kann: Es sei $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben und sei $(a, b) \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Sei eine Kurve $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben, die bei einem $t_0 \in (a, b)$ differenzierbar ist (in dem Sinne, dass $\operatorname{Re}(\gamma)$ und $\operatorname{Im}(\gamma)$ bei t_0 differenzierbar sind). Ferner sei $\gamma(t_0) \in D$ und f bei $\gamma(t_0)$ komplex differenzierbar. Dann ist $(f \circ \gamma) : (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$ bei t_0 differenzierbar und es

gilt

$$(f \circ \gamma)'(t_0) = f'(\gamma(t_0))\gamma'(t_0). \quad (371)$$

Im Folgenden betrachten wir meistens Funktionen, die überall auf einer gesamten offenen Menge komplex differenzierbar sind. Diese nennen wir holomorph.

Definition 100. Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *holomorph* auf D falls f in jedem Punkt (der offenen, zusammenhängenden Menge D) komplex differenzierbar ist. Wir notieren die Menge aller auf D holomorphen Funktionen mit $\mathcal{H}(D)$.

2.2 Beispiele für holomorphe Funktionen

Eine wichtige Klasse von holomorphen Funktionen ist durch *Potenzreihen* gegeben.

Proposition 101. Es sei für $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{C}$ die Potenzreihe

$$P(z) := \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_1)^n \quad (372)$$

um ein $z_1 \in \mathbb{C}$ gegeben. Es sei $R = R_P \in [0, \infty]$ der Konvergenzradius von P . Dann ist $f_P : B_R(z_1) \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch $f_P(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_1)^n$ auf $B_R(z_1)$ holomorph. Konkreter: Die Potenzreihe

$$P'(z) := \sum_{n \geq 1} n a_n (z - z_1)^{n-1} \quad (373)$$

hat denselben Konvergenzradius wie P und es gilt

$$(f_P)'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_1)^{n-1} = f_{P'}(z) \quad \forall z \in B_R(z_1). \quad (374)$$

(Hierbei gilt die Konvention $B_0(z_1) := \emptyset$ und $B_{\infty}(z_1) := \mathbb{C}$)

Beweis. SCHRITT 1. Wir zeigen nun zuerst, dass P' denselben Konvergenzradius wie P hat. Dazu müssen wir P' zunächst als Potenzreihe gemäß Definition 33 darstellen. Nach einer Indexverschiebung gilt

$$P'(z) = \sum_{n \geq 0} (n+1) a_{n+1} (z - z_1)^n = \sum_{n \geq 0} b_n (z - z_1)^n. \quad (375)$$

Hierbei definieren wir $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{C}$ durch $b_n := (n+1) a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach Proposition 35 gilt (mit der Konvention $\frac{1}{0} := \infty$ und $\frac{1}{\infty} := 0$)

$$R_P = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \quad (376)$$

und auch

$$R_{P'} = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n|}} = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|(n+1)a_{n+1}|}}. \quad (377)$$

Nun gilt

$$\sqrt[n]{|a_{n+1}|} = |a_{n+1}|^{\frac{1}{n}} = (|a_{n+1}|^{\frac{1}{n+1}})^{\frac{n+1}{n}} = \exp\left(\frac{n+1}{n} \log(|a_{n+1}|^{\frac{1}{n+1}})\right). \quad (378)$$

Wir berechnen

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}|^{\frac{1}{n+1}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n+1]{|a_{n+1}|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \stackrel{(376)}{=} \frac{1}{R_P}. \quad (379)$$

Da $\frac{n+1}{n} \rightarrow 1$ für $n \rightarrow \infty$ folgern wir aus (378) und (379)

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_{n+1}|} \stackrel{(378)}{=} \limsup_{n \rightarrow \infty} \exp\left(\frac{n+1}{n} \log(|a_{n+1}|^{\frac{1}{n+1}})\right) \stackrel{(379)}{=} \exp(\log \frac{1}{R_P}) = \frac{1}{R_P}. \quad (380)$$

Mit (380) können wir (377) umformen und erhalten

$$R_{P'} = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n+1} \sqrt[n]{|a_{n+1}|}} = \frac{1}{1 \cdot \frac{1}{R_P}} = R_P, \quad (381)$$

wobei wir hier benutzt haben, dass $\sqrt[n]{n+1} \rightarrow 1$ für $n \rightarrow \infty$.

SCHRITT 2. OBdA $z_1 = 0$, denn beliebige $z_1 \in \mathbb{C}$ können durch eine Verschiebung erreicht werden.

Sei $R = R_P$. Wir zeigen, dass f_P in $B_R(0)$ diff'bar ist und weisen die Ableitungsformel (374) nach. OBDA $R > 0$, denn sonst ist $B_R(0) = \emptyset$ und es ist nichts zu zeigen. Sei $z \in B_R(0)$, d.h. $|z| < R$. Dann gibt es auch ein $R' \in (0, R)$ so, dass $|z| < R'$. Berechne nun für $h \in \mathbb{C}$ mit $|h| < R' - |z|$

$$\frac{f_P(z+h) - f_P(z)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \frac{1}{h} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z+h)^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \quad (382)$$

$$= \frac{1}{h} \left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z+h)^n - \left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \right) \right) - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \quad (383)$$

$$= \frac{1}{h} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n (z+h)^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \right) - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{(z+h)^n - z^n}{h} - n z^{n-1} \right). \quad (384)$$

Nun gilt

$$\frac{(z+h)^n - z^n}{h} - nz^{n-1} = \frac{1}{h} [(z+h)^n - z^n - nhz^{n-1}] \quad (385)$$

$$= \frac{1}{h} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} h^k z^{n-k} - z^n - nhz^{n-1} \right) \quad (386)$$

$$= \frac{1}{h} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} h^k z^{n-k} - \binom{n}{0} h^0 z^n - \binom{n}{1} h^1 z^{n-1} \right) \quad (387)$$

$$= \frac{1}{h} \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} h^k z^{n-k} = \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} h^{k-1} z^{n-k} \quad (388)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k+2} h^{k+1} z^{n-(k+2)} = h \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k+2} h^k z^{n-(k+2)} \quad (389)$$

$$= h \sum_{k=0}^{n-2} \frac{n!}{(n-k-2)!(k+2)!} h^k z^{(n-2)-k} \quad (390)$$

$$= h \sum_{k=0}^{n-2} \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2-k)!(k+2)(k+1)k!} h^k z^{(n-2)-k} \quad (391)$$

$$= h \sum_{k=0}^{n-2} \frac{n(n-1)}{(k+2)(k+1)} \binom{n-2}{k} h^k z^{(n-2)-k}. \quad (392)$$

Als Folgerung erhalten wir

$$\left| \frac{(z+h)^n - z^n}{h} - nz^{n-1} \right|_{\Delta\text{-Ungl.}} \leq |h| \sum_{k=0}^{n-2} \frac{n(n-1)}{(k+2)(k+1)} \binom{n-2}{k} |h|^k |z|^{(n-2)-k} \quad (393)$$

$$\leq |h| \sum_{k=0}^{n-2} n(n-1) \binom{n-2}{k} |h|^k |z|^{(n-2)-k} \quad (394)$$

$$= |h|n(n-1) \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} |h|^k |z|^{(n-2)-k} = |h|n(n-1)(|h| + |z|)^{n-2}. \quad (395)$$

Erinnern wir uns daran, dass $|h| \leq R' - |z|$, d.h. $|z| + |h| \leq R'$, so erhalten wir

$$\left| \frac{(z+h)^n - z^n}{h} - nz^{n-1} \right| \leq |h|n(n-1)(R')^{n-2}. \quad (396)$$

Mit (384) ergibt sich

$$\left| \frac{f_P(z+h) - f_P(z)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \left| \frac{(z+h)^n - z^n}{h} - n z^{n-1} \right| \quad (397)$$

$$\stackrel{(396)}{\leq} |h| \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n(n-1) (R')^{n-2} \quad (398)$$

Wir behaupten nun, dass die Reihe $\sum_{n \geq 1} |a_n| n(n-1) (R')^{n-2}$ gegen einen endlichen Wert konvergiert. Wir werden dafür das Wurzelkriterium verwenden (vgl. Satz 31). Dazu:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n| n(n-1) (R')^{n-2}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \sqrt[n]{n} \sqrt[n]{(n-1)} \sqrt[n]{(R')^{-2}} (R'). \quad (399)$$

Weil $\sqrt[n]{n}$, $\sqrt[n]{n-1}$, $\sqrt[n]{(R')^{-2}} \rightarrow 1$ und $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}$ (vgl. (376)) erhalten wir

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n| n(n-1) (R')^{n-2}} \stackrel{(399)}{=} \frac{1}{R} (R') < 1 \quad (400)$$

und somit konvergiert $\sum_{n \geq 1} |a_n| n(n-1) (R')^{n-2}$ nach dem Wurzelkriterium. Wir folgern mit dieser Erkenntnis aus (398), dass

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f_P(z+h) - f_P(z)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \right| = 0 \quad (401)$$

und somit die Behauptung.

Man beachte: Nach Proposition 35 ist für eine Potenzreihe $P(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_1)^n$ der Ball $B_{R_P}(z_1)$ stets die Menge aller *inneren Punkte* des Konvergenzbereichs. Wir haben somit gesehen, dass alle Potenzreihen im Inneren ihres Konvergenzbereiches *gliedweise differenzierbar* sind. Gliedweise Differenzierbarkeit ist hier so gemeint, dass jeder Summand von P einzeln wie in der reellen Analysis differenziert werden kann.

Korollar 102. Jedes Polynom $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch

$$p(z) = \sum_{k=0}^m a_k z^k \quad \text{für } a_0, \dots, a_m \in \mathbb{C} \quad (402)$$

ist auf ganz \mathbb{C} komplex differenzierbar und es gilt

$$p'(z) = \sum_{k=1}^m k a_k z^{k-1} \quad \forall z \in \mathbb{C}. \quad (403)$$

Beweis. Polynome sind abbrechende Potenzreihen, d.h. das Polynom p aus (402) ist gegeben durch

$$p(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k, \quad (404)$$

wobei

$$b_k = \begin{cases} a_k & k \leq m \\ 0 & k > m \end{cases}. \quad (405)$$

Man folgert leicht, dass $R_p = \infty$. Wendet man die gliedweise Differentiationsregel auf (404) so folgert man die Behauptung.

Nun können wir auch die uns bekannten Potenzreihen, z.B. die *Exponentialfunktion* differenzieren und erhalten folgende Aussagen.

Korollar 103. Es gilt für alle $z \in \mathbb{C}$

- (i) $\exp'(z) = \exp(z)$,
- (ii) $\cos'(z) = -\sin(z)$,
- (iii) $\sin'(z) = \cos(z)$,
- (iv) $\cosh'(z) = \sinh(z)$,
- (v) $\sinh'(z) = \cosh(z)$.

Beweis. Zu (i). Laut (99) gilt

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k. \quad (406)$$

Das gliedweise Differenzieren (vgl Proposition 101) ergibt

$$\exp'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{1}{k!} z^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k(k-1)!} z^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} z^{k-1} \stackrel{(*)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k = \exp(z). \quad (407)$$

Hierbei haben wir in (*) eine Indexverschiebung $k \rightarrow k + 1$ gemacht.

Zu (ii). Dies folgt nun aus Definition 43. Nach dieser gilt nämlich $\cos(z) = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}$. Mit der Kettenregel und Teil (i) berechnen wir zunächst

$$\partial_z \exp(\pm iz) = \exp(\pm iz)(\pm i). \quad (408)$$

Nach der Summenregel des Differenzierens gilt

$$\cos'(z) = \frac{i \exp(iz) - i \exp(-iz)}{2} = i \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2} \quad (409)$$

$$= i^2 \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i} = - \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i} = -\sin(z). \quad (410)$$

Wir überlassen (iii),(iv) und (v) den Lesenden als Übungsaufgabe.

Zum Abschluss dieser Sektion sehen wir noch eine nützliche Formel, die die Koeffizienten einer Potenzreihe P aus (höheren) Ableitungen der Funktion f_P rekonstruiert.

Definition 104. HÖHERE ABLEITUNGEN. Es sei $f \in \mathcal{H}(D)$. Ist auch $f' \in \mathcal{H}(D)$ so nennen wir für $z_0 \in D$

$$f^{(2)}(z_0) := f''(z_0) := (f')'(z_0) \quad (411)$$

die *zweite Ableitung* von f an der Stelle z_0 . Induktiv definieren wir auch die höheren Ableitungen: Ist für ein $k \in \mathbb{N}_{>2}$ die Funktion $f^{(k-1)} \in \mathcal{H}(D)$ so nennen wir

$$f^{(k)}(z_0) := (f^{(k-1)})'(z_0) \quad (412)$$

die *k-te Ableitung* von f an der Stelle z_0 .

Wir haben schon in der Einleitung diskutiert, dass man die Existenz der höheren Ableitungen eigentlich nicht fordern muss — denn es wird sich herausstellen, dass holomorphe Funktionen bereits unendlich oft differenzierbar sind. Deswegen führen wir in der obigen Definition Begrifflichkeiten wie *zweimal komplex diff'bar* auch gar nicht erst ein.

Proposition 105. Es sei für $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{C}$ und $z_1 \in \mathbb{C}$

$$P(z) := \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_1)^n \quad (413)$$

eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R = R_P$ und Wertefunktion

$$f_P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_1)^n \quad (z \in B_R(z_1)). \quad (414)$$

Dann ist f_P auf $B_R(z_1)$ unendlich oft differenzierbar. Ferner gilt für alle $k \in \mathbb{N}_0$

$$a_k = \frac{f_P^{(k)}(z_1)}{k!}. \quad (415)$$

Beweis. Zur höheren Differenzierbarkeit. Dies folgt direkt aus der Tatsache, dass die Ableitung von f_P wieder die Wertefunktion einer Potenzreihe mit demselben Konvergenzradius ist, vgl. Proposition 101. Nun zu (415). Sei nun $k \in \mathbb{N}_0$. k -maliges Anwenden von

Proposition 101 liefert für alle $z \in B_R(z_1)$

$$f_P^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) a_n (z-z_1)^{n-k}. \quad (416)$$

Setzt man $z = z_1$ in die obige Formel ein, so liefert nur der Summand für $n = k$ einen Beitrag, denn $(z_1 - z_1)^\alpha = 0$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Wir erhalten

$$f_P^{(k)}(z_1) = k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot (k-k+1) \cdot a_k \cdot (z_1 - z_1)^0 = k! a_k \cdot 1 = k! a_k. \quad (417)$$

Die Behauptung folgt durch Umstellen der Formel nach a_k .

2.3 Die Cauchy-Riemann-Gleichungen

In diesem Abschnitt verstehen wir den Zusammenhang zwischen komplexer Differenzierbarkeit und Differenzierbarkeit von Abbildungen in \mathbb{R}^2 . Die hauptsächliche Erkenntnis in diesem Abschnitt wird sein, dass $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ genau dann holomorph ist, wenn $u(x, y) := \operatorname{Re}(f(x+iy))$ und $v(x, y) := \operatorname{Im}(f(x+iy))$ differenzierbare Funktionen auf \mathbb{R}^2 sind und u, v die *Cauchy-Riemann-Gleichungen* lösen, d.h.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \end{cases}. \quad (\text{CR})$$

Im Folgenden verwenden wir die Kurznotation $\partial_x u := \frac{\partial u}{\partial x}$ und $\partial_y u := \frac{\partial u}{\partial y}$ (sofern diese Ableitungen existent sind).

Beobachtung 106. Zuerst eine Erinnerung: Für eine Abbildung $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ kann man stets die *assoziierte Funktion* $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definiert durch

$$\tilde{f}(x, y) := \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(f(x+iy)) \\ \operatorname{Im}(f(x+iy)) \end{pmatrix} \quad (418)$$

betrachten. Umgekehrt kann man für eine Abbildung $g = (g_1, g_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Abbildung $g^* : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch

$$g^*(z) := g_1(\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z)) + ig_2(\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z)) \quad (419)$$

betrachten.

Die Funktion f und \tilde{f} sowie g und g^* enthalten dieselben Informationen und ihr Abbildungsverhalten in der Zahlenebene lässt sich identisch veranschaulichen. Der einzige Unterschied ist, wie Definitionen- und Wertebereich der Abbildungen interpretiert werden. Wir weisen auch darauf hin, dass $\tilde{f}^* = f$ und $\tilde{g}^* = g$. Ferner hat man

$$|\tilde{f}(x, y)|_{\mathbb{R}^2} = \sqrt{\operatorname{Re}(f(x+iy))^2 + \operatorname{Im}(f(x+iy))^2} = |f(x+iy)|, \quad (420)$$

und analog

$$|g^*(z)| = |g(\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z))|_{\mathbb{R}^2}. \quad (421)$$

Wir erinnern uns auch an die Definition der Differenzierbarkeit für Abbildungen von \mathbb{R}^2 nach \mathbb{R}^2 .

Definition 107. Es sei $G \subset \mathbb{R}^2$ offen. Eine Funktion $g : G \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt (*reell*) *differenzierbar* in einem Punkt $(x_0, y_0) \in G$ falls es eine (\mathbb{R} -)lineare Abbildung $L_{(x_0, y_0)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^m$ gibt, mit

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - g(x_0, y_0) - L_{(x_0, y_0)}(h_1, h_2)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0. \quad (422)$$

Ferner nennen wir $L_{(x_0, y_0)}$ eine *Ableitung* von g an der Stelle (x_0, y_0) .

Bemerkung 108. Es sei $g = (g_1, g_2) : G \rightarrow \mathbb{R}^2$ wie in der vorigen Definition. In der reellen Analysis haben wir gesehen, dass $L_{(x_0, y_0)}$ eindeutig bestimmt ist und gegeben ist durch

$$L_{(x_0, y_0)}(h_1, h_2) = \begin{pmatrix} \partial_x g_1(x_0, y_0) & \partial_y g_1(x_0, y_0) \\ \partial_x g_2(x_0, y_0) & \partial_y g_2(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}. \quad (423)$$

Wir nennen die Matrix in (423) auch *Jacobi-Matrix* und notieren sie mit $Dg(x_0, y_0)$. Insbesondere gilt $L(h) = Dg(x_0, y_0)h$.

Jetzt können wir auch die Idee hinter den Cauchy-Riemann-Gleichungen erklären.

Motivation 109. Um zu verstehen warum die Cauchy-Riemann-Gleichungen so aussehen wie in (CR) betrachte folgende Rechnung. Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben. Ist

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(f(x + iy)) \\ \operatorname{Im}(f(x + iy)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} \quad (424)$$

so gilt für die Jacobimatrix

$$D\tilde{f} = \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix}. \quad (425)$$

Nun gilt

$$(CR) \Leftrightarrow \begin{cases} \partial_x u = \partial_y v \\ \partial_x v = -\partial_y u \end{cases} \quad (426)$$

$$\Leftrightarrow D\tilde{f} \text{ ist von der Gestalt } \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \quad (427)$$

$$\stackrel{(36)}{\Leftrightarrow} D\tilde{f} \text{ stellt eine } \mathbb{C}\text{-lineare Abbildung dar.} \quad (428)$$

Wir sehen also: Der Grund dafür, dass die Cauchy-Riemann-Gleichungen gelten ist, dass die Ableitung \mathbb{C} -linear sein muss. Dies wollen wir im Folgenden noch konkretisieren.

Lemma 110. Es sei für $D \subset \mathbb{C}$ offen die Abbildung $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben und $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$. Definiere $\tilde{D} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + iy \in D\}$ und \tilde{f} wie in (418). Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

- (i) $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ ist bei z_0 komplex differenzierbar.
- (ii) $\tilde{f} : \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist bei (x_0, y_0) reell differenzierbar und für die Ableitung $L_{(x_0, y_0)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gilt, dass $L_{(x_0, y_0)}^* : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine \mathbb{C} -lineare Abbildung ist.

Beweis. Zu “(i) \Rightarrow (ii)”. Es sei f bei z_0 komplex differenzierbar. Dann gibt es ein $w \in \mathbb{C}$ mit

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = f'(z_0) =: w. \quad (429)$$

Man definiere nun die (\mathbb{C} -lineare) Abbildung $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ durch $\phi(z) := wz$. Definiere nun $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ durch $L := \tilde{\phi}$ im Sinne von (418). Man überzeugt sich leicht davon, dass L eine \mathbb{R} -lineare Abbildung definiert. Es sei nun $(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$. Falls $(x_0 + h_1, y_0 + h_2) \in \tilde{D}$ definiere

$$r(h_1, h_2) := \frac{\tilde{f}(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - \tilde{f}(x_0, y_0) - L(h_1, h_2)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}. \quad (430)$$

Wir zeigen, dass $\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow 0} |r(h_1, h_2)|_{\mathbb{R}^2} = 0$. Dazu betrachten wir zunächst r^* . Da $\tilde{f}^* = f$ und $L^* = \tilde{\phi}^* = \phi$ gilt für $h = h_1 + ih_2$ mit $z_0 + h = (x_0 + h_1) + i(y_0 + h_2) \in D$

$$r^*(h) = \frac{f(z_0 + h) - f(z_0) - \phi(h)}{|h|}. \quad (431)$$

Hierbei haben wir benutzt, dass $|h_1 + ih_2| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$. Nun gilt wegen der Definition von ϕ

$$r^*(h) = \frac{f(z_0 + h) - f(z_0) - wh}{|h|} = \frac{h}{|h|} \left[\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} - w \right]. \quad (432)$$

Wegen (429) geht der Ausdruck in eckigen Klammern gegen Null. Wir folgern, dass

$$\lim_{h \rightarrow 0} |r^*(h)| = \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{h}{|h|} \left[\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} - w \right] \right| = \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} - w \right| = 0. \quad (433)$$

Weil (wegen (432)) $|r(h_1, h_2)|_{\mathbb{R}^2} = |r^*(h_1 + ih_2)|$ folgt

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow 0} |r(h_1, h_2)| = 0, \quad (434)$$

was zu zeigen war. Wir folgern, dass \tilde{f} bei (x_0, y_0) reell differenzierbar ist mit Ableitung $L_{(x_0, y_0)} = L$. Insbesondere ist auch $L_{(x_0, y_0)}^* = L^* = \tilde{\phi}^* = \phi$ eine \mathbb{C} -lineare Abbildung.

Zu "(ii) \Rightarrow (i)". Es sei $\tilde{f} : \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}^2$ bei (x_0, y_0) reell differenzierbar mit Ableitung $L_{(x_0, y_0)}$ und $\phi := L_{(x_0, y_0)}^* : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine \mathbb{C} -lineare Abbildung. Dann gibt es laut Proposition 8 ein $w \in \mathbb{C}$ mit $\phi(z) = zw$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Nun gilt für $h = h_1 + ih_2 \in \mathbb{C}$ mit $z_0 + h \in D$

$$\left| \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} - w \right| = \frac{|f(z_0 + h) - f(z_0) - wh|}{|h|} = \frac{|f(z_0 + h) - f(z_0) - \phi(h)|}{|h|} \quad (435)$$

$$\stackrel{(423)}{=} \frac{|\tilde{f}(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - \tilde{f}(x_0, y_0) - \tilde{\phi}(h_1, h_2)|_{\mathbb{R}^2}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \quad (436)$$

$$\stackrel{\text{Def. von } \phi}{=} \frac{|\tilde{f}(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - \tilde{f}(x_0, y_0) - L_{(x_0, y_0)}(h_1, h_2)|_{\mathbb{R}^2}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \quad (437)$$

$$= \left| \frac{\tilde{f}(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - \tilde{f}(x_0, y_0) - L_{(x_0, y_0)}(h_1, h_2)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \right|_{\mathbb{R}^2} \quad (438)$$

Wir folgern

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} - w \right| \quad (439)$$

$$= \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)} \left| \frac{\tilde{f}(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - \tilde{f}(x_0, y_0) - L_{(x_0, y_0)}(h_1, h_2)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \right|_{\mathbb{R}^2} = 0. \quad (440)$$

Somit ist f bei z_0 komplex differenzierbar mit Ableitung $f'(z_0) = w$. Die Behauptung folgt.

Als Konsequenz erhalten wir eine Charakterisierung von komplexer Differenzierbarkeit über die sogenannten *Cauchy-Riemann'schen Differenzialgleichungen*.

Satz 111. Es sei $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ und $z_0 = x_0 + iy_0$. Man definiere $\tilde{D} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + iy \in D\}$ sowie $u, v : \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}$ durch $u(x, y) = \operatorname{Re}(f(x + iy))$ und $v(x, y) = \operatorname{Im}(f(x + iy))$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent

- (i) $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ ist bei z_0 komplex differenzierbar
- (ii) $u, v : \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}$ sind beide bei (x_0, y_0) reell differenzierbar und es gelten die *Cauchy-Riemann'schen Differenzialgleichungen*

$$\begin{cases} \partial_x u(x_0, y_0) = \partial_y v(x_0, y_0) \\ \partial_y u(x_0, y_0) = -\partial_x v(x_0, y_0) \end{cases} \quad (441)$$

Beweis. Wir haben bereits gesehen dass (i) äquivalent dazu ist, dass $\tilde{f} = (\tilde{f}_1, \tilde{f}_2) : \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}^2$ reell differenzierbar ist mit Ableitung $L_{(x_0, y_0)}$, wobei $L_{(x_0, y_0)}^*$ eine \mathbb{C} -lineare Abbildung ist. Man beachte nach (418), dass $\tilde{f}_1(x, y) = \operatorname{Re}(f(x + iy)) = u(x, y)$ und $\tilde{f}_2(x, y) = \operatorname{Im}(f(x + iy)) = v(x, y)$ für alle $(x, y) \in D$. Man folgert mit Bemerkung 108, dass

$$L_{(x_0, y_0)}(h_1, h_2) = \begin{pmatrix} \partial_x \tilde{f}_1(x_0, y_0) & \partial_y \tilde{f}_1(x_0, y_0) \\ \partial_x \tilde{f}_2(x_0, y_0) & \partial_y \tilde{f}_2(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x u(x_0, y_0) & \partial_y u(x_0, y_0) \\ \partial_x v(x_0, y_0) & \partial_y v(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \quad (442)$$

Wir wissen aus Proposition 5, dass $L_{(x_0, y_0)}^*$ genau dann \mathbb{C} -linear ist, wenn es $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$L_{(x_0, y_0)}^*(1) = \alpha + \beta i \quad \text{und} \quad L_{(x_0, y_0)}^*(i) = -\beta + \alpha i. \quad (443)$$

Dies ist äquivalent zu

$$\operatorname{Re}(L_{(x_0, y_0)}^*(1)) = \operatorname{Im}(L_{(x_0, y_0)}^*(i)) \quad \text{und} \quad \operatorname{Im}(L_{(x_0, y_0)}^*(1)) = -\operatorname{Re}(L_{(x_0, y_0)}^*(i)). \quad (444)$$

Mit der Funktionsvorschrift von $L_{(x_0, y_0)}^*$ berechnet man

$$\operatorname{Re}(L_{(x_0, y_0)}^*(1)) \stackrel{(419)}{=} \text{erste Komponente von } L_{(x_0, y_0)}(\operatorname{Re}(1), \operatorname{Im}(1)) \quad (445)$$

$$= \text{erste Komponente von } L_{(x_0, y_0)}(1, 0) \quad (446)$$

$$\stackrel{(442)}{=} \text{erste Komponente von } \begin{pmatrix} \partial_x u(x_0, y_0) & \partial_y u(x_0, y_0) \\ \partial_x v(x_0, y_0) & \partial_y v(x_0, y_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (447)$$

$$= \text{erste Komponente von } \begin{pmatrix} \partial_x u(x_0, y_0) \\ \partial_x v(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \partial_x u(x_0, y_0) \quad (448)$$

Analog zeigt man

$$\operatorname{Im}(L_{(x_0, y_0)}^*(1)) = \partial_y u(x_0, y_0), \quad (449)$$

$$\operatorname{Re}(L_{(x_0, y_0)}^*(i)) = \partial_x v(x_0, y_0), \quad (450)$$

$$\operatorname{Im}(L_{(x_0, y_0)}^*(i)) = \partial_y v(x_0, y_0). \quad (451)$$

Damit ist (444) äquivalent zu

$$\partial_x u(x_0, y_0) = \partial_y v(x_0, y_0) \quad \text{und} \quad \partial_y u(x_0, y_0) = -\partial_x v(x_0, y_0). \quad (452)$$

Die Behauptung folgt

Wir halten fest: $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ ist holomorph genau dann wenn $D\tilde{f}(x, y)$ für alle $(x, y) \in \tilde{D}$ existiert und von der Gestalt

$$D\tilde{f}(x, y) = \begin{pmatrix} \alpha(x, y) & -\beta(x, y) \\ \beta(x, y) & \alpha(x, y) \end{pmatrix} \quad \forall (x, y) \in D \quad (453)$$

ist.

Beispiel 112. Betrachten wir nochmal die Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch $f(z) = \bar{z}$. Es gilt dann $u(x, y) = \operatorname{Re}(f(x + iy)) = x$ und $v(x, y) = \operatorname{Im}(f(x + iy)) = -y$. Die Cauchy-Riemann-Gleichungen sind daher nirgends erfüllt, denn

$$1 = \partial_x u(x, y) \neq \partial_y v(x, y) = -1 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (454)$$

Bemerkung 113. Es seien $f \in \mathcal{H}(D)$ und $z_0 = x_0 + iy_0$ sowie u, v wie in Satz 111. Wir haben schon gesehen, dass

$$D\tilde{f}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \partial_x u(x_0, y_0) & \partial_y u(x_0, y_0) \\ \partial_x v(x_0, y_0) & \partial_y v(x_0, y_0) \end{pmatrix} \quad (455)$$

Wir möchten noch einmal kurz darauf eingehen, dass in dieser Matrix dieselbe Information wie in der komplexen Zahl $f'(x_0 + iy_0)$ steckt. Dazu beobachten wir

$$f'(x_0 + iy_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + iy_0 + h) - f(x_0 + iy_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0, h \in \mathbb{R}} \frac{f((x_0 + h) + iy_0) - f(x_0 + iy_0)}{h} \quad (456)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0, h \in \mathbb{R}} \frac{[u((x_0 + h, y_0) - u(x_0, y_0))] + i[v(x_0 + h, y_0) - v(x_0, y_0)]}{h} \quad (457)$$

$$= \partial_x u(x_0, y_0) + i\partial_x v(x_0, y_0) \quad (458)$$

Somit lässt sich $f'(x_0 + iy_0)$ aus den Einträgen von $D\tilde{f}(x_0, y_0)$ errechnen.

Ein wichtiges Korollar ist die *Harmonizität* von Real/Imaginärteilen holomorpher Funktionen. Dazu zunächst eine Definition.

Definition 114. HARMONISCHE FUNKTIONEN. Für eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion $u : G \rightarrow \mathbb{R}$, $u = u(x, y)$ definieren wir den *Laplace-Operator* durch

$$\Delta u(x, y) := \partial_x^2 u(x, y) + \partial_y^2 u(x, y) \quad (x, y) \in G. \quad (459)$$

Wir nennen u *harmonisch* auf G falls $\Delta u \equiv 0$ auf G .

Korollar 115. Es sei $f \in \mathcal{H}(D)$, \tilde{D} wie in Satz 111 und $u, v : \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch $u(x, y) = \operatorname{Re}(f(x + iy))$ und $v(x, y) = \operatorname{Im}(f(x + iy))$. Dann sind u und v harmonisch (sofern sie zweimal stetig partiell differenzierbar sind).

Beweis. Es seien u, v wie in der Aussage. Dann gilt mit den Cauchy-Riemann-Gleichungen (444)

$$\begin{aligned} \Delta u(x, y) &= \partial_x^2 u(x, y) + \partial_y^2 u(x, y) = \partial_x(\partial_x u(x, y)) + \partial_y(\partial_y u(x, y)) & (460) \\ &\stackrel{(444)}{=} \partial_x(\partial_y v(x, y)) + \partial_y(-\partial_x v(x, y)) = \partial_{xy}^2 v(x, y) - \partial_{yx}^2 v(x, y) \stackrel{\text{Satz v. Schwarz}}{=} 0. \end{aligned}$$

Analoge Argumentation kann man für v wiederholen.

Wir werden später sehen, dass man beim vorigen Korollar auf die in Klammern geschriebene Voraussetzung “(sofern sie zweimal stetig partiell differenzierbar sind)” verzichten kann, weil holomorphe Funktionen automatisch unendlich oft differenzierbar sind.

Wir haben also gesehen, dass Real- und Imaginärteile holomorpher Funktionen stets harmonisch sind. Ist $D \subset \mathbb{R}^2$ sternförmig, so gibt es sogar eine Art 1-zu-1-Korrespondenz zwischen holomorphen Funktionen und harmonischen Funktionen. Diesen werden wir im Folgenden im Detail aufklären.

Definition 116. STERNFÖRMIGKEIT. Ein Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$ heißt *sternförmig* falls es ein $a \in G$ derart gibt, dass für alle $p \in G$ die *Verbindungsstrecke*

$$\overline{pa} := \{tp + (1-t)a : t \in [0, 1]\} \quad (461)$$

komplett in G enthalten ist. Ein solcher Punkt a heißt *Sternzentrum* von G . Ein Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ heißt sternförmig falls $\tilde{D} := \{(x, y) : x + iy \in D\}$ sternförmig ist.

Definition 117. GRADIENTENFELD. Sei $G \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ ein Gebiet und $F = (F_1, \dots, F_n) \in C^0(G; \mathbb{R}^n)$ ein Vektorfeld. Wir nennen F ein Gradientenfeld, falls es eine Funktion $U \in C^1(G; \mathbb{R})$ gibt mit $F = \nabla U$. Ein solches U nennen wir *Potential* von F .

Satz 118. LEMMA VON POINCARÉ. Sei $G \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ ein Gebiet und $F = (F_1, \dots, F_n)^T \in C^1(G; \mathbb{R}^n)$ ein Vektorfeld.

1. Ist F ein Gradientenfeld, so gilt $\partial_i F_j = \partial_j F_i$ für alle $i, j = 1, \dots, n$
2. Ist G sternförmig und $\partial_i F_j = \partial_j F_i$ für alle $i, j = 1, \dots, n$, so ist F ein Gradientenfeld.

Beweis. Wir haben Punkt ‘1.’ bereits in GDG bewiesen. Zur Wiederholung: Ist $F = \nabla U \in C^1(G; \mathbb{R}^n)$, so ist $U \in C^2(G; \mathbb{R})$. Nach dem Satz von Schwarz gilt dann

$$\partial_i F_j = \partial_i(\partial_j U) = \partial_j(\partial_i U) = \partial_j F_i. \quad (462)$$

Einen sehr ähnlichen Beweis wie den von Punkt 2 werden wir an späterer Stelle nochmal studieren, wenn wir das *Lemma von Morera* beweisen.

Proposition 119. Es sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein sternförmiges Gebiet, $u \in C^2(G; \mathbb{R})$ harmonisch und $G^* := \{x + iy : (x, y) \in G\}$. Dann gibt es ein $f \in \mathcal{H}(G^*)$ mit $u = \operatorname{Re}(f)$.

Beweis. Da u harmonisch ist gilt

$$\partial_x^2 u(x, y) = -\partial_y^2 u(x, y) \quad \forall (x, y) \in G. \quad (463)$$

Definiere $F : G \rightarrow \mathbb{R}^2$ durch

$$F(x, y) := \begin{pmatrix} -\partial_y u(x, y) \\ \partial_x u(x, y) \end{pmatrix} \quad (464)$$

Dann gilt $F \in C^1(G; \mathbb{R}^2)$. Außerdem gilt für $(x, y) \in G$ (mit der Konvention $x_1 = x, x_2 = y$)

$$\partial_2 F_1(x, y) = \partial_y(-\partial_y u(x, y)) = -\partial_y^2 u(x, y) \stackrel{(463)}{=} \partial_x^2 u(x, y) = \partial_x(\partial_x u(x, y)) = \partial_1 F_2(x, y). \quad (465)$$

Wir folgern aus dem Lemma von Poincaré 118, dass es ein Potential $v \in C^2(G; \mathbb{R}^2)$ gibt mit

$$\begin{pmatrix} \partial_x v(x, y) \\ \partial_y v(x, y) \end{pmatrix} = \nabla v(x, y) = F(x, y) = \begin{pmatrix} -\partial_y u(x, y) \\ \partial_x u(x, y) \end{pmatrix}. \quad (466)$$

Es folgt, dass auf G die Cauchy-Riemann-Gleichungen gelten, d.h.

$$\begin{cases} \partial_x u = \partial_y v \\ \partial_x v = -\partial_y u \end{cases} \quad (467)$$

Definiere nun $f : G^* \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$f(z) := u(\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z)) + iv(\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z)). \quad (468)$$

BEHAUPTUNG. $f \in \mathcal{H}(G^*)$. Dazu verwenden wir den Satz 111: Es gilt $\operatorname{Re}(f(x + iy)) = u(x, y)$ und $\operatorname{Im}(f(x + iy)) = v(x, y)$. Diese Funktionen sind also beide auf G differenzierbar. Da für u und v die Cauchy-Riemann-Gleichungen gelten folgt die Holomorphie aus der Aussage von Satz 111 “(ii) \Rightarrow (i)”.

2.4 Biholomorphe Abbildungen

Biholomorphe Funktionen sind holomorphe Funktionen, deren Umkehrabbildung auch holomorph ist. Wir lernen in diesem Abschnitt, unter welchen Bedingungen es holomorphe Umkehrfunktionen gibt und wiederholen dabei einen wichtigen Satz aus der Analysis — den *lokalen Umkehrsatz*.

Definition 120. Seien wie immer $D, U \subset \mathbb{C}$ offen. Es sei $f : D \rightarrow U$ eine Funktion. f heißt *biholomorph* oder *holomorpher Diffeomorphismus*, wenn

(i) $f \in \mathcal{H}(D)$

(ii) $f : D \rightarrow U$ ist bijektiv mit Umkehrabbildung $f^{-1} : U \rightarrow D$.

(iii) $f^{-1} \in \mathcal{H}(U)$.

Die Ableitung der Umkehrfunktion kann wie aus der reellen Analysis gewohnt berechnet werden.

Proposition 121. Es sei $f : D \rightarrow U$ biholomorph. Dann gilt $f'(w) \neq 0$ für alle $w \in D$ und

$$(f^{-1})'(z) = \frac{1}{f'(f^{-1}(z))} \quad \forall z \in U. \quad (469)$$

Beweis. Wir beginnen mit der Beobachtung, dass

$$z = f(f^{-1}(z)) \quad \forall z \in U. \quad (470)$$

Wir differenzieren nun beide Seiten. Mit der Kettenregel folgt

$$1 = f'(f^{-1}(z))(f^{-1})'(z) \quad \forall z \in U. \quad (471)$$

Da $f'(f^{-1}(z))$ somit stets ein multiplikatives Inverses haben muss, gilt $f'(f^{-1}(z)) \neq 0$ für alle $z \in U$. Da f^{-1} bijektiv ist, folgt auch $f'(w) \neq 0$ für alle $w \in D$. Außerdem impliziert (471)

$$(f^{-1})'(z) = \frac{1}{f'(f^{-1}(z))} \quad \forall z \in U. \quad (472)$$

Die Behauptung folgt.

Nun stellt sich die Frage, wie man herausfinden kann, ob die Umkehrfunktion holomorph sind, ohne, dass man sie explizit bestimmen muss (denn das ist oft nicht möglich). Hierzu studieren wir eine Konsequenz aus dem *lokalen Umkehrsatz* aus der reellen Analysis. Diesen Satz wollen wir kurz in \mathbb{R}^2 wiederholen.

Satz 122. LOKALER UMKEHRSAZ. Es seien $G \subset \mathbb{R}^2$ offen, $(x_0, y_0) \in G$ und $F : G \rightarrow \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar mit $\det(DF(x_0, y_0)) \neq 0$. Dann gibt es eine offene Umgebung $V \subset G$ von (x_0, y_0) so, dass $U := F(V)$ eine offene Umgebung von $F(x_0, y_0)$ ist, $F|_V : V \rightarrow U$ bijektiv ist und $(F|_V)^{-1} : U \rightarrow V$ stetig differenzierbar ist mit

$$D(F|_V)^{-1}(F(x, y)) = (DF(x, y))^{-1} \quad \text{für alle } (x, y) \in V. \quad (473)$$

Beweis. Wir verweisen auf die reelle Analysis.

Proposition 123. UMKEHRSAZ IM KOMPLEXEN. Es sei $f \in \mathcal{H}(D)$ und $z_0 \in D$ so, dass $f'(z_0) \neq 0$. Ferner sei $f' : D \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Dann gibt es eine offene Umgebung $\Omega \subset D$ von z_0 so, dass $U := f(\Omega)$ offen ist und $f|_\Omega : \Omega \rightarrow U$ biholomorph ist.

Beweis. Sei $z_0 = x_0 + iy_0$. Betrachte $\tilde{f} : \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\tilde{D} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + iy \in D\}$ definiert wie in (418). Beachte, dass wegen den Voraussetzungen f auf \tilde{D} stetig differenzierbar ist. Wir wollen nun Satz 122 anwenden und zeigen dafür, dass $\det(D\tilde{f}(x_0, y_0)) \neq 0$. Seien dafür u, v wie in Satz 111. Aus (474) und den Cauchy-Riemann-Gleichungen wissen wir

$$D\tilde{f}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \partial_x u(x_0, y_0) & \partial_y u(x_0, y_0) \\ \partial_x v(x_0, y_0) & \partial_y v(x_0, y_0) \end{pmatrix} \stackrel{(444)}{=} \begin{pmatrix} \partial_x u(x_0, y_0) & -\partial_x v(x_0, y_0) \\ \partial_x v(x_0, y_0) & \partial_x u(x_0, y_0) \end{pmatrix}. \quad (474)$$

Somit gilt

$$\det(D\tilde{f}(x_0, y_0)) = \partial_x u(x_0, y_0) \cdot \partial_x u(x_0, y_0) - (-\partial_x v(x_0, y_0)) \cdot \partial_x v(x_0, y_0) \quad (475)$$

$$= (\partial_x u(x_0, y_0))^2 + (\partial_x v(x_0, y_0))^2. \quad (476)$$

Wir wiederholen nun aus Gleichung (458), dass $f'(z_0) = \partial_x u(x_0, y_0) + i\partial_x v(x_0, y_0)$. Man folgert daraus und aus $f'(z_0) \neq 0$

$$0 < |f'(z_0)|^2 = (\partial_x u(x_0, y_0))^2 + (\partial_x v(x_0, y_0))^2 \stackrel{(476)}{=} \det(D\tilde{f}(x_0, y_0)). \quad (477)$$

Wir haben also nachgewiesen, dass $\det(D\tilde{f}(x_0, y_0)) \neq 0$. Satz 122 impliziert nun, dass es eine offene Umgebung $\tilde{\Omega} \subset \tilde{D}$ von (x_0, y_0) gibt so, dass $\tilde{U} := \tilde{f}(\tilde{\Omega})$ offen ist und $\tilde{f}|_{\tilde{\Omega}} : \tilde{\Omega} \rightarrow \tilde{U}$ bijektiv ist und eine (reell) differenzierbare Umkehrabbildung hat. Definiert man nun $U := \{x + iy : (x, y) \in \tilde{U}\}$ so erhält man, dass auch $f|_{\tilde{\Omega}} : \tilde{\Omega} \rightarrow U$ bijektiv ist (und U offen ist). Wir wollen aber noch mehr: denn f^{-1} soll auch holomorph sein. Wir zeigen dafür, dass $(\tilde{f}|_{\tilde{\Omega}})^{-1}$ die Cauchy-Riemann-Gleichungen erfüllt. Der Einfachheit schreiben wir ab sofort nur \tilde{f}^{-1} und nicht $(\tilde{f}|_{\tilde{\Omega}})^{-1}$. Wir beobachten, dass nach (473) gilt

$$D\tilde{f}^{-1}(x, y) = [D\tilde{f}(\tilde{f}^{-1}(x, y))]^{-1} \quad \forall (x, y) \in \tilde{U}. \quad (478)$$

Nun ist wegen der Holomorphie von f die Matrix $D\tilde{f}(\tilde{f}^{-1}(x, y))$ von der Gestalt

$$\begin{pmatrix} \alpha(x, y) & -\beta(x, y) \\ \beta(x, y) & \alpha(x, y) \end{pmatrix}, \quad (479)$$

vgl. (453). Das Inverse hat dann (vgl. (299)) die Gestalt

$$\frac{1}{\alpha(x, y)^2 + \beta(x, y)^2} \begin{pmatrix} \alpha(x, y) & \beta(x, y) \\ -\beta(x, y) & \alpha(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}(x, y) & -\tilde{\beta}(x, y) \\ \tilde{\beta}(x, y) & \tilde{\alpha}(x, y) \end{pmatrix}, \quad (480)$$

mit $\tilde{\alpha}(x, y) := \frac{\alpha(x, y)}{\alpha(x, y)^2 + \beta(x, y)^2}$ und $\tilde{\beta}(x, y) := \frac{-\beta(x, y)}{\alpha(x, y)^2 + \beta(x, y)^2}$. Wir folgern, dass die Einträge von $D\tilde{f}^{-1}$ die Cauchy-Riemann Gleichungen erfüllen. Dies impliziert die Holomorphie von f^{-1} .

Auf die Voraussetzung, dass \tilde{f} stetig differenzierbar ist, werden wir später verzichten können.

Ein wichtiges Korollar ist die (Bi-)Holomorphie des komplexen Logarithmus, jedoch nicht

auf ganz $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, sondern nur auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$! Das liegt daran, dass das Bild einer biholomorphen Abbildung stets offen sein muss. Dies wäre bei $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ nicht der Fall, vgl. Satz 56 (iii).

Korollar 123. Die Abbildung

$$\log : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0} \rightarrow \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) \in (-\pi, \pi)\} \quad (481)$$

ist holomorph und es gilt

$$\log'(z) = \frac{1}{z} \quad \forall z \in \mathbb{C}. \quad (482)$$

Beweis. Es sei $D := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) \in (-\pi, \pi)\}$. Nach Satz 56 (iv) ist $\exp|_D : D \rightarrow \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ bijektiv und \log ist die Umkehrfunktion. Ferner gilt $\exp'(z) = \exp(z) \neq 0$ für alle $z \in D$ nach Satz 56 (i). Wegen Proposition 123 hat also jedes $z \in D$ eine Umgebung Ω so, dass $U := \exp(\Omega)$ eine offene Umgebung von $\exp(z)$ ist und $\exp|_\Omega : \Omega \rightarrow U$ eine holomorphe Umkehrfunktion besitzt. Wegen der Eindeutigkeit der Umkehrfunktion schließen wir, dass diese Umkehrfunktion durch $\log|_U$ gegeben sein muss. Somit ist $\log|_U$ holomorph. Insbesondere ist \log also komplex differenzierbar bei $\exp(z)$ für alle $z \in D$. Wir folgern, dass \log auf $\exp(D) = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ holomorph ist. Insbesondere haben wir gezeigt, dass $\exp|_D : D \rightarrow \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ biholomorph ist (vgl. Definition 120). Mit Proposition 121 folgt

$$\log'(z) = (\exp^{-1})'(z) = \frac{1}{\exp'(\exp^{-1}(z))} \stackrel{\text{Korollar 103(i)}}{=} \frac{1}{\exp(\exp^{-1}(z))} = \frac{1}{z}. \quad (483)$$

Bemerkung 124. Jetzt, wo wir die Ableitung des komplexen Logarithmus kennen, können wir auch eine *Potenzreihendarstellung* des Logarithmus in $B_1(1)$ finden. Dazu beobachte zuerst, dass für alle $z \in B_1(1)$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1 - (1 - z)} \stackrel{\text{geom. Reihe}}{\text{vgl. Bsp. 34}} = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z - 1)^n. \quad (484)$$

Nun *integrieren* wir (formell) auf der rechten Seite einmal und definieren $f : B_1(1) \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (z-1)^{n+1}. \quad (485)$$

Dann ist nach Proposition 101

$$f'(z) = \partial_z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (z-1)^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n \stackrel{(484)}{=} \frac{1}{z} = \log'(z). \quad (486)$$

Wir folgern also $(f - \log)'(z) = 0$ für alle $z \in B_1(1)$. Es folgt (siehe Übungsblatt 6 Aufgabe

1), dass $f - \log$ konstant sein muss. Nun gilt aber

$$f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (1-1)^{n+1} = 0 \quad \text{und} \quad \log(1) = \log_{\mathbb{R}} |1| + i \arg(1) = 0. \quad (487)$$

Somit gilt $f(1) - \log(1) = 0$. Weil $f - \log$ konstant ist, folgt daraus $f - \log \equiv 0$. Also

$$\log(z) = f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (z-1)^{n+1} \quad \forall z \in B_1(1). \quad (488)$$

Man beachte, dass außerhalb von $B_1(1)$ die Potenzreihendarstellung nicht gilt (auch wenn \log sogar auf der größeren Menge $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ holomorph ist).

3 Kurvenintegrale

In diesem Kapitel wollen wir komplexe *Kurvenintegrale* definieren. Bevor wir dies tun, sollten wir aber erstmal ganz grundlegend ein wenig Notation für die Integralrechnung im komplexen einführen.

Es seien stets $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Wir nennen eine Funktion $h : (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$ *integrierbar* wenn ihr Realteil und Imaginärteil integrierbar sind. Wir definieren für eine integrierbare Funktion $h : (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$

$$\int_a^b h(t) dt := \int_{(a,b)} h(t) dt := \int_a^b \operatorname{Re}(h(t)) dt + i \int_a^b \operatorname{Im}(h(t)) dt. \quad (489)$$

Ferner treffen wir die Konvention

$$\int_b^a h(t) dt = - \int_a^b h(t) dt. \quad (490)$$

Bemerkung 125. Man überzeugt sich leicht, dass folgende elementare Eigenschaften des Integrals auch in \mathbb{C} gelten

(i) *Linearität.* Für $h_1, h_2 : (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$ integrierbar und $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt stets

$$\int_a^b (h_1(t) + \lambda h_2(t)) dt := \int_a^b h_1(t) dt + \lambda \int_a^b h_2(t) dt. \quad (491)$$

(ii) *Additivität.* Ist $h : (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$ integrierbar, so gilt

$$\int_a^b h(t) dt = \int_a^c h(t) dt + \int_c^b h(t) dt \quad (492)$$

(iii) *Dreiecksungleichung.* Es gilt für $h : (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$ integrierbar

$$\left| \int_a^b h(t) dt \right| \leq \int_a^b |h(t)| dt. \quad (493)$$

(iv) *Hauptsatz der Differential -und Integralrechnung.* Ist $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, und auf (a, b) stetig differenzierbar mit integrierbarer Ableitung $h' : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ so gilt

$$\int_a^b h'(t) dt = h(b) - h(a). \quad (494)$$

Hierbei ist mit der Aussage “ h stetig differenzierbar auf (a, b) ” so gemeint, dass $\operatorname{Re}(h)$ und $\operatorname{Im}(h)$ auf (a, b) stetig diffbar sind.

(v) *Substitutionsregel.* Es sei $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und $\tau : [c, d] \rightarrow [a, b]$ stetig und auf (c, d) stetig differenzierbar (mit integrierbarer Ableitung). Dann gilt

$$\int_c^d h(\tau(t))\tau'(t) dt = \int_{\tau(c)}^{\tau(d)} h(u) du. \quad (495)$$

(vi) *Partielle Integration.* Es seien $h_1, h_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und stetig differenzierbar auf (a, b) mit integrierbaren Ableitungen $h'_1, h'_2 : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\int_a^b h'_1(t)h_2(t) dt = h_1(b)h_2(b) - h_1(a)h_2(a) - \int_a^b h_1(t)h'_2(t) dt. \quad (496)$$

(vii) *Differenzieren unter dem Integral.* Es sei $h : (s_0, s_1) \times [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und für alle $t \in [a, b]$ sei $s \mapsto h(s, t)$ differenzierbar. Ferner sei für alle $s \in (s_0, s_1)$ die Funktion $t \mapsto \partial_s h(s, t)$ stetig auf $[a, b]$. Dann gilt

$$\frac{d}{ds} \int_a^b h(s, t) dt = \int_a^b \partial_s h(s, t) dt \quad \forall s \in (s_0, s_1). \quad (497)$$

Wir werden diese Eigenschaften im Folgenden benutzen. Beweise müssen wir nicht durchführen – die Aussagen sind bereits aus der reellen Analysis hinreichend bekannt. Für Aussage (vii) verweisen wir z.B. auf Proposition 2.31 aus dem Maß -und Integrationstheorie-Skript von F. Pogorzelski.

Wir definieren nun die Kurven über die wir integrieren.

Definition 126. Eine stetige Abbildung $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ heißt

- (a) *C^1 -Kurve*, falls γ auf (a, b) stetig differenzierbar ist und $\lim_{t \rightarrow a+} \gamma'(t)$ bzw. $\lim_{t \rightarrow b-} \gamma'(t)$ existieren. Wir bezeichnen die beiden Limites mit $\gamma'(a+)$ bzw. $\gamma'(b-)$.
- (b) *stückweise C^1 -Kurve*, falls γ auf $[a, b]$ stetig ist und es eine Unterteilung $a = a_0 <$

$a_1 < \dots < a_m = b$ gibt derart, dass für alle $j = 1, \dots, m$ die Einschränkung $\gamma|_{[a_{j-1}, a_j]}$ eine C^1 -Kurve ist.

(c) *geschlossen*, falls $\gamma(a) = \gamma(b)$.

(d) *einfach geschlossen*, falls γ geschlossen und auf $[a, b)$ injektiv ist.

Wir bei Teil (b) der vorigen Definition die Stetigkeit von γ nochmal zusätzlich betont, obwohl wir es nicht machen müssten. Grund dafür ist, dass klar werden soll, dass γ bei den Unterteilungspunkten a_0, \dots, a_m keine *Sprungstelle* haben darf. Die Ableitung hingegen darf schon eine Sprungstelle haben, denn $\gamma'(a_j-) = \gamma'(a_j+)$ ist nirgends verlangt.

Beispiel 127. Seien $r_1, r_2 > 0$ vorgegeben. Die Kurve $\gamma^{(r_1, r_2)+-} : [0, 4] \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch

$$\gamma^{(r_1, r_2)}(t) = \begin{cases} r_1 t & t \in [0, 1) \\ r_1 + ir_2(t-1) & t \in [1, 2) \\ r_1(1 - (t-2)) + ir_2 & t \in [2, 3) \\ ir_2(1 - (t-3)) & t \in [3, 4) \end{cases} = \begin{cases} r_1 t & t \in [0, 1) \\ r_1 + ir_2(t-1) & t \in [1, 2) \\ r_1(3-t) + ir_2 & t \in [2, 3) \\ ir_2(4-t) & t \in [3, 4) \end{cases} \quad (498)$$

durchläuft den Rand des Quadrates $Q(r_1, r_2) := \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq r_1, 0 \leq \operatorname{Im}(z) \leq r_2\}$. Sie ist eine stückweise C^1 -Kurve. Eine mögliche Unterteilung wäre $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 4$. Man darf jedoch aber auch immer mehr Punkte dazunehmen, z.B. ist $a_0 = 0, a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 3, a_5 = 4$ auch eine zulässige Unterteilung.

Definition 128. KURVENLÄNGE. Für eine C^1 -Kurve definieren $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ definieren wir

$$L(\gamma) := L(\gamma, [a, b]) := \int_a^b |\gamma'(t)| dt. \quad (499)$$

Für eine stückweise C^1 -Kurve definieren wir

$$L(\gamma) := L(\gamma, [a, b]) := \sum_{j=1}^m L(\gamma, [a_{j-1}, a_j]), \quad (500)$$

wobei $a = a_0 < a_1 < \dots < a_m = b$ eine Unterteilung wie in Definition 126 ist.

Man müsste an dieser Stelle eigentlich zeigen, dass die Definition in (500) unabhängig von der gewählten Unterteilung a_0, \dots, a_m ist. Hierzu folgende Beobachtung: Mit Bemerkung 125 (ii) gilt

$$L(\gamma) = \sum_{j=1}^m L(\gamma, [a_{j-1}, a_j]) = \sum_{j=1}^m \int_{a_{j-1}}^{a_j} |\gamma'(t)| dt = \int_{a_0}^{a_m} |\gamma'(t)| dt = \int_a^b |\gamma'(t)| dt. \quad (501)$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite ist unabhängig von der Unterteilung. Man muss aber dazu sagen, dass $|\gamma'(t)|$ eigentlich bei den Unterteilungspunkten $\{a_0, a_1, \dots, a_m\}$ gar nicht

definiert ist. Dies spielt für den Wert des Integrals aber keine Rolle, da es sich bei diesen endlich vielen Punkten um eine *Nullmenge* handelt.

Man kann zeigen, dass die Kurvenlänge $L(\gamma)$ tatsächlich das ergibt, was man aus dem Alltag als Kurvenlänge gewohnt ist. Der Grund dafür ist, dass

$$L(\gamma) = \sup \left\{ \sum_{j=1}^n |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| \mid \{t_0, \dots, t_n\} \subset [a, b] : n \in \mathbb{N}, a = t_0 < \dots < t_n = b \right\} \quad (502)$$

Das bedeutet wir approximieren die Länge von γ durch die Summe der Längen der *Verbindungsstrecken* zwischen $\gamma(t_{j-1})$ und $\gamma(t_j)$ für eine beliebig feine Unterteilung $\{t_0, \dots, t_n\}$ des Intervalls $[a, b]$ (vgl. (502)). Die Vereinigung dieser Verbindungsstrecken nennt man *Polygonzug*. Wählen wir die Unterteilung $\{t_0, \dots, t_n\}$ sehr fein, so liefert der zugehörige Polygonzug eine sehr gute Approximation an die Länge, vgl. Abbildung 4.

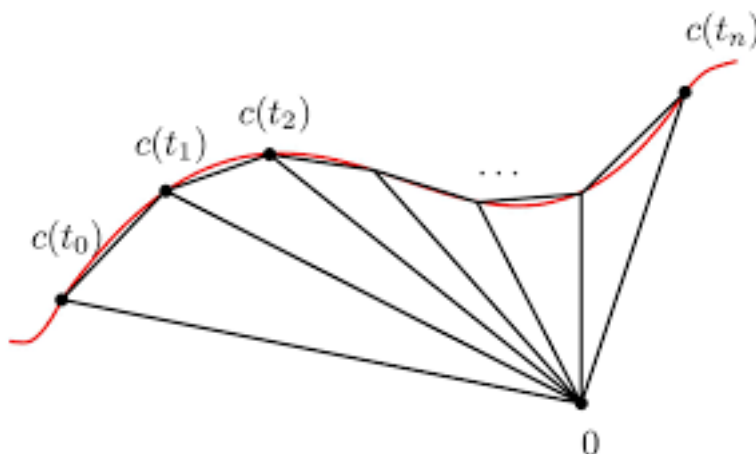


Abbildung 4: Länge der roten Kurve c wird approximiert durch den schwarzen Polygonzug

Beispiel 129. Betrachten wir nochmal die Kurve $\gamma^{(r_1, r_2)} : [0, 4] \rightarrow \mathbb{C}$ aus Beispiel 127. Man rechnet leicht nach, dass

$$(\gamma^{(r_1, r_2)})'(t) = \begin{cases} r_1 & t \in (0, 1) \\ ir_2 & t \in (1, 2) \\ -r_1 & t \in (2, 3) \\ -ir_2 & t \in (3, 4) \end{cases} \quad (503)$$

Mit Gleichung (501) berechnen wir

$$L(\gamma^{(r_1, r_2)}) = \int_0^4 |(\gamma^{(r_1, r_2)})'(t)| dt = \int_0^1 r_1 dt + \int_1^2 r_2 dt + \int_2^3 r_1 dt + \int_3^4 r_2 dt = 2(r_1 + r_2). \quad (504)$$

3.1 Grundlagen der Integralrechnung über Kurven

Nun definieren wir das *komplexe Kurvenintegral* über eine (zumindest mal stetige) Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$

Definition 130. Es sei $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ eine stückweise C^1 -Kurve mit $\gamma([a, b]) \subset D$. Dann definieren wir das *komplexwertige Kurvenintegral*

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt. \quad (505)$$

Man beachte, dass es für die Definition keine Rolle spielt, wenn γ' an endlich vielen Punkten nicht existiert, siehe auch (501).

Definition 131. INTEGRALE ÜBER SPEZIELLE KURVEN

(i) *Kreiswege.* Es sei $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$ und $k \in \mathbb{N}$. Dann definieren wir

$$\int_{(\partial B_r(a))^k} f(z) dz := \int_{\gamma_{r,a,k}} f(z) dz, \quad (506)$$

wobei $\gamma_{r,a,k} : [0, 2k\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben ist durch

$$\gamma_{r,a,k}(t) := a + re^{it}, \quad (507)$$

d.h. $\gamma_{r,a,k}$ durchläuft $\partial B_r(a)$ k -mal. Im Fall $k = 1$ schreiben wir auch

$$\int_{\partial B_r(a)} f(z) dz := \int_{\partial B_r(a)^1} f(z) dz. \quad (508)$$

Außerdem definieren wir $L(\partial B_r(a)) := L(\gamma_{a,r,1}) [= 2\pi r]$.

(ii) *Rechteckswege.* Sei $a \in \mathbb{C}$, $r_1, r_2 > 0$. Wir definieren für $Q_a(r_1, r_2) := \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re}(z - a) \leq r_1, 0 \leq \operatorname{Im}(z - a) \leq r_2\}$

$$\int_{\partial Q_a(r_1, r_2)} f(z) dz := \int_{c_{a,r_1,r_2}} f(z) dz, \quad (509)$$

wobei $c_{a,r_1,r_2} : [0, 4] \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben ist durch $c_{a,r_1,r_2}(t) = a + \gamma^{(r_1, r_2)}(t)$, wobei $\gamma^{(r_1, r_2)}$ wie in Beispiel 127 ist. Falls $a = 0$ und $r_1 = r_2 = 1$ schreiben wir einfach

$$\int_{\partial Q} f(z) dz = \int_{\partial Q_0(1,1)} f(z) dz. \quad (510)$$

Außerdem definieren wir $L(\partial Q_a(r_1, r_2)) := L(c_{a,r_1,r_2}) [= 2(r_1 + r_2)]$.

Insbesondere gilt also

$$\int_{(\partial B_r(a))^k} f(z) dz = \int_0^{2k\pi} f(a + re^{it}) ire^{it} dt. \quad (511)$$

Man beachte: in beiden Fällen in Definition 131 werden die Ränder $\partial B_r(a)$ und $\partial Q_a(r_1, r_2)$ gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen. Wir werden später sehen: Möchte man die Kurven stattdessen mit dem Uhrzeigersinn durchlaufen, so ändert sich das Vorzeichen des Integrals.

Beispiel 132. Wir berechnen für $a \in \mathbb{C}$ und $r > 0$

$$\int_{\partial B_r(a)} \frac{1}{z - a} dz. \quad (512)$$

Dazu

$$\int_{\partial B_r(a)} \frac{1}{z - a} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{(a + re^{it}) - a} ire^{it} dt = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{re^{it}} dt = \int_0^{2\pi} i dt = 2\pi i. \quad (513)$$

Analog berechnet man

$$\int_{(\partial B_r(a))^k} \frac{1}{z - a} dz = 2k\pi i. \quad (514)$$

Die Details überlassen wir den Lesenden als Übungsaufgabe.

VERSCHÄRFUNG. Wir berechnen für beliebiges $\ell \in \mathbb{Z}$

$$\int_{\partial B_r(a)} (z - a)^\ell dz = \int_0^{2\pi} (a + re^{it} - a)^\ell ire^{it} dt = \int_0^{2\pi} r^\ell e^{i\ell t} ire^{it} dt \quad (515)$$

$$= ir^{\ell+1} \int_0^{2\pi} e^{i(\ell+1)t} dt. \quad (516)$$

Falls $\ell = -1$ wissen wir aus (513) was rauskommt. Für $\ell \neq -1$ berechnen wir mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\int_{\partial B_r(a)} (z - a)^\ell dz = \int_0^{2\pi} (a + re^{it} - a)^\ell ire^{it} dt = \int_0^{2\pi} (re^{it})^\ell ire^{it} dt \quad (517)$$

$$= ir^{\ell+1} \int_0^{2\pi} e^{i(\ell+1)t} dt = ir^{\ell+1} \int_0^{2\pi} \frac{d}{dt} \frac{1}{i(\ell+1)} e^{i(\ell+1)t} dt \quad (518)$$

$$= ir^{\ell+1} \left[\frac{1}{i(\ell+1)} e^{i(\ell+1)t} \right]_{t=0}^{t=2\pi} = \frac{ir^{\ell+1}}{i(\ell+1)} (e^{i(\ell+1)2\pi} - e^0) = 0, \quad (519)$$

wegen der 2π -Periodizität von $y \mapsto e^{iy}$. Wir folgern

$$\int_{\partial B_r(a)} (z - a)^\ell dz = \begin{cases} 0 & \ell \neq -1 \\ 2\pi i & \ell = -1 \end{cases} =: 2\pi i \delta_{\ell, -1}, \quad (520)$$

wobei $\delta_{k,m}$ das *Kronecker-Deltasymbol* bezeichnet. Der Fall $\ell = -1$ nimmt also eine interessante Sonderrolle ein. Wir werden noch spannende Konsequenzen daraus diskutieren.

Als nächstes schätzen wir den Absolutbetrag eines Kurvenintegrals ab. Diese wichtige Abschätzung werden wir häufiger benutzen.

Proposition 133. FUNDAMENTALABSCHÄTZUNG FÜR KURVENINTEGRALE. Es sei $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und $\gamma : [a, b] \rightarrow D$ eine stückweise C^1 -Kurve. Dann gilt

$$\left| \int_{\gamma} f(z) \, dz \right| \leq \sup_{w \in \gamma([a, b])} |f(w)| L(\gamma). \quad (521)$$

Beweis. Es gilt mit der Dreiecksungleichung (Bemerkung 125 (iii))

$$\left| \int_{\gamma} f(z) \, dz \right| = \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) \, dt \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t)) \gamma'(t)| \, dt \quad (522)$$

$$= \int_a^b |f(\gamma(t))| |\gamma'(t)| \, dt \leq \sup_{u \in [a, b]} |f(\gamma(u))| \int_a^b |\gamma'(t)| \, dt. \quad (523)$$

Der erste Faktor ist nun $\sup_{w \in \gamma([a, b])} |f(w)|$ und der zweite Faktor ist nach (501) gerade $L(\gamma)$. Es folgt die Behauptung.

Bemerkung 134. Seien f, γ wie in der vorigen Proposition. Da $\gamma([a, b]) \subset D$ kompakt ist und $|f|$ stetig ist, gilt stets (nach dem Satz von Weierstraß)

$$\sup_{w \in \gamma([a, b])} |f(w)| = \max_{w \in \gamma([a, b])} |f(w)| < \infty. \quad (524)$$

Somit ist die Abschätzung (521) niemals trivial.

Durchläuft man eine Kurve mit einer anderen *Geschwindigkeit*, d.h. unter *Umparametrisierung* verändert sich das Integral nicht.

Proposition 135. Es sei $\tau : [c, d] \rightarrow [a, b]$ stetig, monoton wachsend und bijektiv und auf (c, d) stetig diff'bar. Ferner sei $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ eine stückweise C^1 -Kurve. Dann gilt

$$\int_{\gamma \circ \tau} f(z) \, dz = \int_{\gamma} f(z) \, dz. \quad (525)$$

Ist τ wie oben, nur monoton fallend statt monoton wachsend, so gilt

$$\int_{\gamma \circ \tau} f(z) \, dz = - \int_{\gamma} f(z) \, dz. \quad (526)$$

Beweis. Siehe Übungsblatt 6.

Beispiel 136. Für eine Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ definieren wir die *rückwärts durchlaufene* Kurve $\gamma_{rev} : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ durch $\gamma_{rev}(t) := \gamma(b + a - t)$. Dann gilt für alle stetigen $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\gamma([a, b]) \subset D$

$$\int_{\gamma_{rev}} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz. \quad (527)$$

Es ist hierbei übrigens nicht wichtig, ob γ_{rev} und γ mit derselben Geschwindigkeit durchlaufen werden, d.h. theoretisch könnte man auch Umparametrisierungen von γ_{rev} zulassen.

Definition 137. KONKATENATION VON KURVEN. Es seien $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ und $\gamma_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ zwei stetige Kurven. Dann definieren wir die *Konkatenation* $\gamma_1 \oplus \gamma_2 : [a, b + d - c] \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$(\gamma_1 \oplus \gamma_2)(t) := \begin{cases} \gamma_1(t) & t \in [a, b] \\ \gamma_2(t - b + c) & t \in [b, b + d - c] \end{cases}. \quad (528)$$

Ferner definieren wir für 3 Kurven $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ die Kurve $\gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \gamma_3 := \gamma_1 \oplus (\gamma_2 \oplus \gamma_3)$. Induktiv definiert man so auch $\gamma_1 \oplus \dots \oplus \gamma_m$.

Bemerkung 138. Es seien nun $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ und $\gamma_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ zwei stückweise C^1 -Kurven mit $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$. Man überzeugt sich leicht mithilfe von Proposition 135 davon, dass $(\gamma_1 \oplus \gamma_2)$ stückweise C^1 ist und

$$\int_{\gamma_1 \oplus \gamma_2} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz, \quad (529)$$

Proposition 139. Es sei $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit stetiger Ableitung $f' : D \rightarrow \mathbb{C}$ und $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ eine stückweise C^1 -Kurve. Dann gilt

$$\int_{\gamma} f'(z) dz = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)). \quad (530)$$

Insbesondere: Ist $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ geschlossen, so gilt

$$\int_{\gamma} f'(z) dz = 0. \quad (531)$$

Beweis. Es sei $a = a_0 < a_1 < \dots < a_m = b$ eine Unterteilung derart, dass $\gamma|_{[a_{j-1}, a_j]}$ auf $[a_{j-1}, a_j]$ eine C^1 -Kurve ist (für alle $j = 1, \dots, m$). Dann gilt

$$\int_{\gamma} f'(z) dz = \int_a^b f'(\gamma(t))\gamma'(t) dt = \sum_{j=1}^m \int_{a_{j-1}}^{a_j} f'(\gamma(t))\gamma'(t) dt. \quad (532)$$

Wir beachten, dass nach der Kettenregel gilt $\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t)$. Somit ist $(f \circ \gamma)$ auf (a_{j-1}, a_j) stetig differenzierbar und es folgt mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (Bemerkung 125 (iv))

$$\int_{a_{j-1}}^{a_j} f'(\gamma(t))\gamma'(t) dt = \int_{a_{j-1}}^{a_j} (f \circ \gamma)'(t) dt = (f \circ \gamma)(a_j) - (f \circ \gamma)(a_{j-1}). \quad (533)$$

Zusammen mit (532) schließen wir

$$\int_{\gamma} f'(z) dz = \sum_{j=1}^m [(f \circ \gamma)(a_j) - (f \circ \gamma)(a_{j-1})] = \quad (534)$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Teleskopsumme}} (f \circ \gamma)(a_m) - (f \circ \gamma)(a_0) = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)). \quad (535)$$

Die Behauptung folgt (denn (531) ist eine direkte Folgerung aus der obigen Formel im Spezialfall $\gamma(b) = \gamma(a)$).

Beispiel 140. Wir berechnen für die geschlossene Kurve $\gamma = \gamma^{(1,1)}$ wie in Beispiel 127

$$\int_{\partial Q} z^{17} dz = \int_{\gamma} z^{17} dz. \quad (536)$$

Da für $f(z) = \frac{1}{18}z^{18}$ gilt $f'(z) = z^{17}$ und γ geschlossen ist, erhalten wir

$$\int_{\gamma} z^{17} dz = \int_{\gamma} f'(z) dz = 0. \quad (537)$$

VERSCHÄRFUNG. Man berechne für γ wie oben

$$\int_{\gamma} z^{17} e^{z^2} dz. \quad (538)$$

Finden wir nun eine Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f'(z) = z^{17} e^{z^2}$? Ja, und das ist gar nicht so schwer! Wir schreiben e^{z^2} als Potenzreihe

$$e^{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{2n} \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad (539)$$

Wir folgern, dass für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$z^{17} e^{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{2n+17}. \quad (540)$$

Definiere nun die Potenzreihe

$$P(z) := \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!(2n+18)} z^{2n+18}. \quad (541)$$

Man überzeugt sich leicht, dass P Konvergenzradius unendlich hat und die Wertefunktion $f_P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ erfüllt

$$f'_P(z) = \partial_z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(2n+18)} z^{2n+18} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{2n+17} = z^{17} e^{z^2}. \quad (542)$$

Somit gilt

$$\int_{\gamma} z^{17} e^{z^2} dz = \int_{\gamma} f'_P(z) dz = 0. \quad (543)$$

Das Prinzip aus Beispiel 140 gibt uns eine wichtige Folgerung.

Korollar 141. Es habe für $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Potenzreihe

$$P(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_1)^n \quad (544)$$

mit Konvergenzradius $R = R_P$ gegeben. Sei ferner $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ eine geschlossene stückweise C^1 -Kurve mit $\gamma([a, b]) \subset B_R(z_1)$. Dann gilt

$$\int_{\gamma} f_P(z) dz = 0. \quad (545)$$

Insbesondere gilt

$$\int_{\gamma} p(z) dz = 0 \quad (546)$$

für jedes \mathbb{C} -Polynom p .

Beweis. Es gilt auf $B_R(z_1)$ stets $f_P = f'_{\tilde{P}}$, wobei

$$\tilde{P}(z) := \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n+1} (z - z_1)^{n+1} \quad (547)$$

(d.h. insbesondere eine Potenzreihe mit demselben Konvergenzradius wie P) ist. Somit

gilt

$$\int_{\gamma} f_P(z) dz = \int_{\gamma} f'_P(z) dz \stackrel{\text{Proposition 139}}{=} 0. \quad (548)$$

Hierbei haben wir benutzt, dass f_P als Wertefunktion einer Potenzreihe holomorph ist.

Zum Abschluss möchten wir noch eine Art *Substitutionsformel* für Kurvenintegrale festhalten.

Proposition 142. SUBSTITUTIONSFORMEL FÜR KURVENINTEGRALE. Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ eine stückweise C^1 Kurve. Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $g \in \mathcal{H}(U)$ so, dass $g' : U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig ist. Sei nun $D \supset g(U)$ offen. Dann gilt für $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ stetig

$$\int_{g \circ \gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} f(g(z))g'(z) dz, \quad (549)$$

Beweis. Es seien g, γ wie in der Aussage. Dann gilt

$$\int_{g \circ \gamma} f(z) dz = \int_a^b f((g \circ \gamma)(t))(g \circ \gamma)'(t) dt \stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \int_a^b f(g(\gamma(t)))g'(\gamma(t))\gamma'(t) dt. \quad (550)$$

Man beachte nun, dass nach der Definition der komplexen Kurvenintegrals gilt

$$\int_{\gamma} f(g(z))g'(z) dz = \int_a^b f(g(\gamma(t)))g'(\gamma(t))\gamma'(t) dt. \quad (551)$$

(Man beachte: Hier geht die Stetigkeit von g' ein, denn für die Definition des Kurvenintegrals benötigt man eine stetige Funktion. Integrierbarkeit reicht hier nicht) Die Behauptung folgt aus (550) und (551).

3.2 Der Cauchy'sche Integralsatz

Ein zentrales Ergebnis dieser Vorlesung ist der *Cauchy'sche Integralsatz* und als Konsequenz die sogenannte *Cauchy'sche Integralformel*. Diese wollen wir nun beweisen.

Ein erster Schritt dazu ist das *Lemma von Goursat*, aus genannt auch der *Cauchy'sche Integralsatz für Rechteckswegen*.

Hierzu benötigen wir zunächst ein vorbereitendes Lemma, das sogenannte *Schachtelungslemma*.

Proposition 143. SCHACHTELUNGSLEMMA. Es sei $(K_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine Folge kompakter nicht-leerer Mengen in einem metrischen Raum (X, d) die *absteigend geschachtelt* sind, d.h.

$$K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset K_4 \supset \dots \quad (552)$$

Dann gilt

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} K_j \neq \emptyset. \quad (553)$$

Beweis. Wähle eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ so, dass $a_1 \in K_1$ (ein beliebiges Element), $a_2 \in K_2$ (beliebig), $a_3 \in K_3$ (beliebig), usw. Da K_1 kompakt ist und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset K_1$, hat $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(a_{l_n})_{n \in \mathbb{N}}$. Hierbei ist $(l_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ eine Folge natürlicher Zahlen mit $l_{n+1} > l_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nennen wir den Grenzwert dieser Teilfolge a .

BEHAUPTUNG. $a \in \bigcap_{j=1}^{\infty} K_j$. Dazu: Angenommen es gäbe ein $j_0 \in \mathbb{N}$ mit $a \notin K_{j_0}$. Nun gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $l_{n_0} > j_0$. Für alle $n \geq n_0$ gilt dann

$$a_{l_n} \in K_{l_n} \subset K_{l_{n_0}} \subset K_{j_0}. \quad (554)$$

Somit ist also $(a_{l_n})_{n \geq n_0}$ eine Folge in K_{j_0} . Da aber K_{j_0} als kompakte Menge aber auch abgeschlossen ist, muss der Grenzwert a auch in K_{j_0} liegen. Ein Widerspruch!

Lemma 144. LEMMA VON GOURSAT. Es sei $f \in \mathcal{H}(D)$ und $a \in \mathbb{C}, r_1, r_2 > 0$ so, dass $Q_a(r_1, r_2) := \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re}(z - a) \leq r_1, 0 \leq \operatorname{Im}(z - a) \leq r_2\} \subset D$. Dann ist

$$\int_{\partial Q_a(r_1, r_2)} f(z) dz = 0. \quad (555)$$

Beweis. OBdA gilt $a = 0$, sonst betrachte $\tilde{f}(z) := f(z + a)$. Wir werden folgenden Algorithmus benutzen.

ALGORITHMUS ZUM BEWEIS.

Input. Ein Rechteck $Q \subset Q_0(r_1, r_2)$

Output. Ein Rechteck $Q' \subset Q$ derart, dass die Seitenlängen von Q' die Hälften der Seitenlängen von Q beträgt und

$$\left| \int_{\partial Q} f(z) dz \right| \leq 4 \left| \int_{\partial Q'} f(z) dz \right|. \quad (556)$$

Durchführung. Es sei $Q = Q_{z_0}(s_1, s_2)$. Wir unterteilen Q nun in vier gleichgroße Teile. Dazu: Q ist die Vereinigung aus

$$Q_1 := Q_{z_0}\left(\frac{s_1}{2}, \frac{s_2}{2}\right), \quad Q_2 := Q_{z_0+s_1/2}\left(\frac{s_1}{2}, \frac{s_2}{2}\right), \quad (557)$$

$$Q_3 := Q_{z_0+is_2/2}\left(\frac{s_1}{2}, \frac{s_2}{2}\right), \quad Q_4 := Q_{z_0+s_1/2+is_2/2}\left(\frac{s_1}{2}, \frac{s_2}{2}\right) \quad (558)$$

Seien ferner $c_1, c_2, c_3, c_4 : [0, 4] \rightarrow \mathbb{C}$ Kurven, die $\partial Q_1, \dots, \partial Q_4$ durchlaufen (vgl. Definition 131). Dies sieht dann ungefähr so aus wie in Abbildung 5. Unsere Behauptung ist

$$\int_{\partial Q} f(z) dz = \int_{\partial Q_1} f(z) dz + \int_{\partial Q_2} f(z) dz + \int_{\partial Q_3} f(z) dz + \int_{\partial Q_4} f(z) dz. \quad (559)$$

Dazu betrachte die Kurven c_1, c_2, c_3, c_4 : An Abbildung 5 sieht man, dass sich die Wege im Inneren des ursprünglichen Rechtecks Q wegheben (denn sie werden zweimal in entgegengesetzter Richtung durchlaufen, vgl. Beispiel 136). Wir folgern, dass nur die Wege auf ∂Q übrig bleiben und somit (559) (vgl. 138). Wähle nun ein $\ell \in \{1, \dots, 4\}$ so, dass

$$\left| \int_{\partial Q_\ell} f(z) dz \right| = \max \left\{ \left| \int_{\partial Q_1} f(z) dz \right|, \left| \int_{\partial Q_2} f(z) dz \right|, \left| \int_{\partial Q_3} f(z) dz \right|, \left| \int_{\partial Q_4} f(z) dz \right| \right\} \quad (560)$$

Definiere nun $Q' := Q_\ell$. Beachte

$$\left| \int_{\partial Q} f(z) dz \right| \stackrel{(559)}{=} \left| \sum_{j=1}^4 \int_{\partial Q_j} f(z) dz \right| \leq \sum_{j=1}^4 \left| \int_{\partial Q_j} f(z) dz \right| \stackrel{(560)}{\leq} \sum_{j=1}^4 \left| \int_{\partial Q_\ell} f(z) dz \right| \quad (561)$$

$$= 4 \left| \int_{\partial Q_\ell} f(z) dz \right| = 4 \left| \int_{\partial Q'} f(z) dz \right|. \quad (562)$$

ALGORITHMUS ENDE.

NUN ZUM BEWEIS. Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Sei $K_1 := Q_0(r_1, r_2)$. Führe nun den Algorithmus mit Input $Q := K_1$ durch und erhalte ein Teilrechteck $Q' \subset K_1$. Dieses nennen wir K_2 . Führe nun den Algorithmus mit Input $Q := K_2$ durch und erhalte ein Teilquadrat $Q' =: K_3$. Sukzessive erhalten wir eine Folge ineinander geschachtelter Quadrate $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$, d.h. $K_1 \supset K_2 \supset \dots$. Die Seitenlängen von K_j sind $\frac{r_1}{2^{j-1}}$ und $\frac{r_2}{2^{j-1}}$, da sich die Seitenlänge in jedem Schritt halbiert. Beachte: Aufgrund der Tatsache, dass K_{n+1} die halben Seitenlängen von K_n hat, gilt $L(\partial K_{n+1}) = \frac{1}{2}L(\partial K_n)$ und somit $L(\partial K_{n+1}) = \frac{1}{2}L(\partial K_n) = \frac{1}{2^2}L(\partial K_{n-1}) = \dots = \frac{1}{2^n}L(\partial K_1)$. Ferner gilt auch

$$\left| \int_{\partial K_n} f(z) dz \right| \leq 4 \left| \int_{\partial K_{n+1}} f(z) dz \right| \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (563)$$

Iteriert man diese Abschätzung, so erhält man

$$\left| \int_{\partial K_1} f(z) dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\partial K_{n+1}} f(z) dz \right|. \quad (564)$$

Nach Propostion 143 gibt es nun ein $w \in \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$. Wähle nun ein $\delta > 0$ so, dass $B_\delta(w) \subset D$ und

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{z - w} - f'(w) \right| < \varepsilon \quad \forall z \in B_\delta(w). \quad (565)$$

Definiert man nun $q(z) := f(z) - f(w) - f'(w)(z - w)$, so gilt also

$$|q(z)| = |f(z) - f(w) - f'(w)(z - w)| < \varepsilon |z - w| \quad \forall z \in B_\delta(w). \quad (566)$$

Sei nun $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $2\sqrt{r_1^2 + r_2^2} \frac{1}{2^{n_0-1}} < \delta$. Wir behaupten, dass dann gilt $K_{n_0} \subset B_\delta(w)$.

Dazu: Sei etwa $K_{n_0} = Q_a\left(\frac{r_1}{2^{n_0-1}}, \frac{r_2}{2^{n_0-1}}\right)$ für $a \in \mathbb{C}$. Dann gilt für alle $z \in K_{n_0}$

$$\begin{aligned} |z - w| &\leq |z - a| + |w - a| \leq \sqrt{\operatorname{Re}(z - a)^2 + \operatorname{Im}(z - a)^2} + \sqrt{\operatorname{Re}(w - a)^2 + \operatorname{Im}(w - a)^2} \\ &\stackrel{z, w \in K_{n_0}}{\leq} \sqrt{\left(\frac{r_1}{2^{n_0-1}}\right)^2 + \left(\frac{r_2}{2^{n_0-1}}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{r_1}{2^{n_0-1}}\right)^2 + \left(\frac{r_2}{2^{n_0-1}}\right)^2} = 2\sqrt{r_1^2 + r_2^2} \frac{1}{2^{n_0-1}} < \delta. \end{aligned} \quad (567)$$

Hierbei haben wir maßgeblich benutzt, dass (nach der Definition von w) gilt, dass $w \in K_{n_0}$. Beachte: Es folgt auch $K_n \subset B_\delta(w)$ für alle $n \geq n_0$. Nun hat man für alle $n \geq n_0$ (mit q definiert wie oben)

$$\left| \int_{\partial K_1} f(z) \, dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\partial K_{n+1}} f(z) \, dz \right| = 4^n \left| \int_{\partial K_{n+1}} (f(w) + f'(w)(z - w) + q(z)) \, dz \right| \quad (568)$$

$$= 4^n \left| \int_{\partial K_{n+1}} f(w) + f'(w)(z - w) \, dz + \int_{\partial K_{n+1}} q(z) \, dz \right| \quad (569)$$

Man beachte, dass wegen Korollar 141

$$\int_{\partial K_{n+1}} f(w) + f'(w)(z - w) \, dz = 0 \quad (570)$$

(denn $p(z) = f(w) + f'(w)(z - w)$ ist ein Polynom). Wir folgern

$$\left| \int_{\partial K_1} f(z) \, dz \right| \stackrel{(569)}{\leq} 4^n \left| \int_{\partial K_{n+1}} q(z) \, dz \right| \stackrel{\text{Prop 133}}{\leq} 4^n \sup_{z \in \partial K_{n+1}} |q(z)| L(\partial K_{n+1}) \quad (571)$$

$$\stackrel{(566)}{\leq} 4^n \sup_{z \in \partial K_{n+1}} (\varepsilon |z - w|) L(\partial K_{n+1}). \quad (572)$$

Genau wie in (567) berechnen wir, dass für $z, w \in K_{n+1}$ gilt, dass $|z - w| \leq 2\sqrt{r_1^2 + r_2^2} \frac{1}{2^n}$. Wir erhalten

$$\left| \int_{\partial Q_0(r_1, r_2)} f(z) \, dz \right| = \left| \int_{\partial K_1} f(z) \, dz \right| \leq \frac{4^n \cdot 2 \cdot \sqrt{r_1^2 + r_2^2} \varepsilon}{2^n} L(\partial K_{n+1}) \quad (573)$$

$$= \frac{4^n \cdot 2 \cdot \sqrt{r_1^2 + r_2^2} \varepsilon}{2^n} \frac{1}{2^n} L(K_1) = 2\sqrt{r_1^2 + r_2^2} L(K_1) \varepsilon. \quad (574)$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig klein gewählt werden kann, folgt die Behauptung.

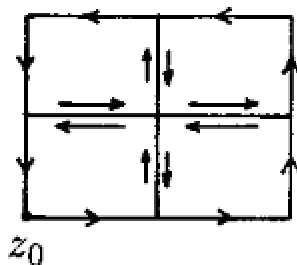


Abbildung 5: Bild zum Algorithmus im vorigen Beweis.

Was für Rechtecke gilt, gilt nun auch für *analytische Bilder* von Rechtecken

Proposition 145. Es sei $Q = Q_a(r_1, r_2)$ ein Rechteck und $U \supset Q$ eine offene Obermenge. Ferner sei $g \in \mathcal{H}(U)$ so, dass $g' \in \mathcal{H}(U)$. Sei nun $D \supset g(U)$ offen. Wir definieren für $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ stetig

$$\int_{g(\partial Q)} f(z) dz := \int_{g \circ \gamma} f(z) dz, \quad (575)$$

wobei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ eine Kurve wie in Definition 131 ist, die ∂Q umläuft. Ist $f \in \mathcal{H}(D)$ so gilt

$$\int_{g(\partial Q)} f(z) dz = 0. \quad (576)$$

Beweis. Seien g, γ wie in der Aussage. Nach der Substitutionsformel (Proposition 142) gilt

$$\int_{g(\partial Q)} f(z) dz = \int_{g \circ \gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} f(g(z))g'(z) dz = \int_{\partial Q} f(g(z))g'(z) dz. \quad (577)$$

Nun sind nach der Voraussetzung und der Kettenregel $f \circ g$ und g' holomorph. Somit ist nach der Produktregel $z \mapsto (f \circ g)g'$ holomorph auf U . Wir folgern (weil $\partial Q \subset U$) aus dem Lemma von Goursat (Lemma 144)

$$\int_{g(\partial Q)} f(z) dz = \int_{\partial Q} f(g(z))g'(z) dz = 0. \quad (578)$$

Ein wichtiges Korollar ist, dass das Integral über *konzentrische Kreiswege* unabhängig vom Radius ist.

Korollar 146. Es sei $a \in \mathbb{C}$ und $f \in \mathcal{H}(D)$ für eine offene Menge $D \supset \overline{B_{r_1}(a)} \setminus B_{r_2}(a)$

(für $r_1, r_2 > 0, r_1 > r_2$). Dann gilt

$$\int_{\partial B_{r_1}(a)} f(z) dz = \int_{\partial B_{r_2}(a)} f(z) dz. \quad (579)$$

Beweis. OBdA $a = 0$. Definiere $Q := Q_{\log(r_1)}(\log r_2 - \log r_1, 2\pi)$ Das bedeutet

$$x + iy \in Q \quad \Leftrightarrow \quad x - \log(r_1) \in [0, \log(r_2) - \log(r_1)] \quad \text{und} \quad y \in [0, 2\pi]. \quad (580)$$

Mit anderen Worten $x \in [\log(r_1), \log(r_2)]$ und $y \in [0, 2\pi]$. Der Rand ∂Q wird nun durchlaufen von

$$\gamma(t) := \begin{cases} \log(r_1) + t(\log(r_2) - \log(r_1)) & t \in [0, 1) \\ \log(r_2) + 2\pi i(t - 1) & t \in [1, 2) \\ \log(r_2) + (t - 2)(\log(r_1) - \log(r_2)) + 2\pi i & t \in [2, 3) \\ \log(r_1) + 2\pi i(4 - t) & t \in [3, 4) \end{cases} \quad (581)$$

Definiere nun $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ durch $g(z) = \exp(z)$. Dann gilt $g, g' \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ und

$$g(\gamma(t)) = \begin{cases} e^{\log(r_1) + t(\log(r_2) - \log(r_1))} & t \in [0, 1) \\ e^{\log(r_2) + 2\pi i(t - 1)} & t \in [1, 2) \\ e^{\log(r_2) + (t - 2)(\log(r_1) - \log(r_2)) + 2\pi i} & t \in [2, 3) \\ e^{\log(r_1) + 2\pi i(4 - t)} & t \in [3, 4) \end{cases} \quad (582)$$

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{\text{exp-Gesetze \& } e^{2\pi i} = 1} \begin{cases} e^{\log(r_1) + t(\log(r_2) - \log(r_1))} & t \in [0, 1) \\ r_2 e^{2\pi i(t - 1)} & t \in [1, 2) \\ e^{\log(r_2) + (t - 2)(\log(r_1) - \log(r_2))} & t \in [2, 3) \\ r_1 e^{2\pi i(4 - t)} & t \in [3, 4) \end{cases}. \quad (583) \end{aligned}$$

Die Kurve im ersten und dritten Fall durchläuft (in jeweils entgegengesetzter Richtung) die Strecke zwischen $\bar{r}_1 \bar{r}_2$. Dadurch können die Beiträge des ersten und dritten Integrals vernachlässigt werden, weil sie sich gegenseitig wegheben, vgl. Beispiel 136. Die Kurve im zweiten Fall durchläuft einen Kreis $\partial B_{r_2}(0)$, d.h. den Kreis mit Radius r_2 , vgl. (507). Die Kurve im vierten Fall durchläuft $\partial B_{r_1}(0)$ — aber nicht gegen den Uhrzeigersinn, sondern mit dem Uhrzeigersinn. Das ändert das Vorzeichen des Integrals, vgl. Beispiel 136. Wir nennen ab sofort $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ die Kurve aus dem ersten Fall, $\gamma_2 : [1, 2] \rightarrow \mathbb{C}$ die Kurve

aus dem zweiten Fall, usw... Wir folgern

$$0 \stackrel{\text{Proposition 145}}{=} \int_{g(\partial Q)} f(z) dz = \int_{\gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \gamma_3 \oplus \gamma_4} f(z) dz \quad (584)$$

$$\stackrel{\text{Bemerkung 138}}{=} \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz + \int_{\gamma_3} f(z) dz + \int_{\gamma_4} f(z) dz \quad (585)$$

$$\stackrel{\gamma_3 \hat{=} (\gamma_1)_{rev}}{=} \int_{\gamma_2} f(z) dz + \int_{\gamma_4} f(z) dz = \int_{\partial B_{r_2}(0)} f(z) dz - \int_{\partial B_{r_1}(0)} f(z) dz. \quad (586)$$

Somit gilt die Behauptung.

Ein wichtiges Korollar ist der *Cauchy'sche Integralsatz (für Kreiswege)*.

Korollar 147. CAUCHY-INTEGRALSATZ (FÜR KREISWEGE). Es sei $a \in \mathbb{C}$ und $r_1 > 0$. Es sei $D \supset \overline{B_{r_1}(a)}$ offen und $f \in \mathcal{H}(D)$. Dann gilt

$$\int_{\partial B_{r_1}(a)} f(z) dz = 0. \quad (587)$$

Beweis. Da f auf D holomorph (und somit auch stetig) ist gibt es ein $M > 0$ mit

$$\sup_{z \in \overline{B_{r_1}(a)}} |f(z)| = M < \infty. \quad (588)$$

Wir wissen aus dem vorigen Korollar, dass für alle $r_2 \in (0, r_1)$ gilt, dass

$$\int_{\partial B_{r_1}(a)} f(z) dz = \int_{\partial B_{r_2}(a)} f(z) dz. \quad (589)$$

Wir schätzen mit der Fundamentalabschätzung ab

$$\left| \int_{\partial B_{r_2}(a)} f(z) dz \right| \leq \sup_{w \in \partial B_{r_2}(a)} |f(w)| L(\partial B_{r_2}(a)) \leq M(2\pi r_2) \quad \forall r_2 \in (0, r_1). \quad (590)$$

Wir folgern

$$\lim_{r_2 \rightarrow 0} \int_{\partial B_{r_2}(a)} f(z) dz = 0. \quad (591)$$

Nun können wir beide Seiten von (589) im Grenzwert $r_2 \rightarrow 0$ betrachten. Es folgt

$$\int_{\partial B_{r_1}(a)} f(z) dz = 0, \quad (592)$$

was zu zeigen war.

Bemerkung 148. In Korollar 147 ist gefordert, dass der Integrand f auf einer offenen Obermenge des ganzen Balles $\overline{B_{r_1}(a)}$ holomorph sein muss. Das scheint zunächst übertrieben, weil für die Bildung des Integrals $\int_{\partial B_{r_1}(a)} f(z) dz$ ja nur Werte von f auf $\partial B_{r_1}(a)$ benötigt werden. Und doch ist die Voraussetzung wichtig: So ist zum Beispiel $f(z) = \frac{1}{z-a}$ nicht holomorph auf $B_{r_1}(a)$ (aber schon auf $B_{r_1}(a) \setminus \{a\}$). Wir haben aber in Beispiel 132 schon ausgerechnet, dass

$$\int_{\partial B_{r_1}(a)} \frac{1}{z-a} dz = 2\pi i \neq 0. \quad (593)$$

Somit haben wir gesehen, dass die Voraussetzungen in Korollar 147 wichtig sind.

Wir wollen nun Korollar 146 auch für *nicht-konzentrische* Kreiswege nachweisen, d.h. für Kreise mit verschiedenen Mittelpunkten, nachweisen.

Hierfür benötigen wir zunächst ein Lemma über eine spezielle Möbiustransformation

Lemma 149. Es sei $w \in B_1(0)$. Betrachte die Möbiustransformation $T(z) := \frac{z-w}{1-z\bar{w}}$. Dann gilt

- (i) Es gibt ein $\alpha > 1$ mit $T \in \mathcal{H}(B_\alpha(0))$ und $T : B_\alpha(0) \rightarrow T(B_\alpha(0))$ ist biholomorph mit stetiger Ableitung T' .
- (ii) $T(B_1(0)) = B_1(0)$.
- (iii) $T(\partial B_1(0)) = \partial B_1(0)$.
- (iv) Es gibt ein $\delta > 0$ mit $T(B_\alpha(0)) \supset B_{1+\delta}(0)$
- (v) Für alle $\varepsilon \in (0, 1 - |w|)$ gilt $T(\overline{B_\varepsilon(w)}) \subset \overline{B_{\frac{\varepsilon}{1-|w|}}(0)}$.
- (vi) Für alle $\varepsilon \in (0, 1 - |w|)$ gibt es ein $\rho(\varepsilon) \in (0, \frac{\varepsilon}{1-|w|})$ und ein $\xi_\varepsilon \in \mathbb{C}$ mit $|\xi_\varepsilon| \leq \frac{\varepsilon}{1-|w|}$ und $T(\partial B_\varepsilon(w)) = \partial B_{\rho(\varepsilon)}(\xi_\varepsilon)$.
- (vii) $T(B_\varepsilon(w)) = B_{\rho(\varepsilon)}(\xi_\varepsilon)$ und $T(B_1(0) \setminus \overline{B_\varepsilon(w)}) = B_1(0) \setminus B_{\rho(\varepsilon)}(\xi_\varepsilon)$.
- (viii) T ist auf $\overline{B_1(0)}$ *orientierungserhaltend*, d.h. für jede Kurve γ , die einen Kreis $C \subset \overline{B_1(0)}$ gegen den Uhrzeigersinn durchläuft, durchläuft auch $T \circ \gamma$ den Kreis $T(C)$ gegen den Uhrzeigersinn. Dasselbe gilt auch für T^{-1} .

Beweis. Fixiere $w \in B_1(0)$ wie in der Aussage. Zu (i). T ist holomorph überall wo der Nenner $z \mapsto 1 - z\bar{w}$ nicht verschwindet. Man erhält $1 - z\bar{w} = 0 \Leftrightarrow z = \frac{1}{\bar{w}}$. Definiert man nun $\alpha := \left| \frac{1}{\bar{w}} \right| = \frac{1}{|w|} = \frac{1}{|w|} > 1$, so erhält man dass T auf $B_\alpha(0)$ holomorph sein muss. Zur Biholomorphie. Dass $T : B_\alpha(0) \rightarrow T(B_\alpha(0))$ bijektiv ist folgt aus der Theorie der Möbiustransformationen (vgl. Proposition 86). Zur Holomorphie der Umkehrfunktion zeigen wir, dass T auf $B_\alpha(0)$ eine stetige Ableitung besitzt und $T'(\zeta) \neq 0$ für alle $\zeta \in B_\alpha(0)$.

Proposition 123 impliziert dann, dass $T(B_\alpha(0))$ offen ist und T auf $B_\alpha(0)$ biholomorph ist. Dazu berechnen wir

$$T'(z) = \frac{1}{1 - z\bar{w}} - \frac{z - w}{(1 - z\bar{w})^2}(-\bar{w}) = \frac{1 - z\bar{w} + (z\bar{w} - w\bar{w})}{(1 - z\bar{w})^2} = \frac{1 - |w|^2}{(1 - z\bar{w})^2}. \quad (594)$$

Es folgt, dass T' stetig und ungleich Null ist für alle $z \in B_\alpha(0)$.

Zu (ii) und (iii). Wir berechnen zuerst für $z, w \in \mathbb{C}$

$$|z - w|^2 - |z\bar{w} - 1|^2 = |z|^2 - 2\langle z, w \rangle + |w|^2 - (|z\bar{w}|^2 - 2\langle z\bar{w}, 1 \rangle + 1^2) \quad (595)$$

$$= |z|^2 - 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2 - (|z||w|^2 - 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + 1) \quad (596)$$

$$= |z|^2 + |w|^2 - |z|^2|w|^2 - 1 = -(1 - |z|^2)(1 - |w|^2). \quad (597)$$

Teilen wir durch $z\bar{w} - 1$ so erhalten wir

$$\left| \frac{z - w}{1 - z\bar{w}} \right|^2 - 1 = -\frac{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)}{|1 - z\bar{w}|^2}, \quad (598)$$

d.h.

$$|T(z)|^2 = 1 - \frac{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)}{|1 - z\bar{w}|^2}. \quad (599)$$

Somit gilt für $z \in B_\alpha(0)$

$$|z| < 1 \Leftrightarrow 1 - \frac{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)}{|1 - z\bar{w}|^2} < 1 \stackrel{(599)}{\Leftrightarrow} |T(z)|^2 < 1. \quad (600)$$

Nun ist die obige Aussage eine Kette von Äquivalenzen. Aus dieser können wir zunächst, wenn wir nur “ \Rightarrow ” betrachten folgern, dass $T(B_1(0)) \subset B_1(0)$. Betrachten wir die Kontraposition von “ \Leftarrow ”, (d.h. $|z| \geq 1 \Rightarrow |T(z)|^2 \geq 1$) so folgern wir $T(B_1(0)^C) \subset B_1(0)^C$. Bilden wir Komplemente (und drehen dadurch die Teilmengenrelation um) so ergibt sich $B_1(0) \subset T(B_1(0)^C)^C = T(B_1(0))$. Nun haben wir beide für (ii) notwendigen Teilmengenrelationen bewiesen. Für (iii) betrachten wir zunächst die Äquivalenzkette

$$|z| = 1 \Leftrightarrow 1 - \frac{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)}{|1 - z\bar{w}|^2} = 1 \stackrel{(599)}{\Leftrightarrow} |T(z)|^2 = 1. \quad (601)$$

und folgern analog wie oben (iii) aus dieser Äquivalenzaussage.

Zu (iv). Wir wissen aus (i), dass $T(B_\alpha(0)) = (T^{-1})^{-1}(B_\alpha(0))$ als Urbild einer offenen Menge unter einer stetigen Funktion wieder offen ist. (ii) und (iii) implizieren außerdem, dass $\overline{B_1(0)} = T(\overline{B_1(0)}) \subset T(B_\alpha(0))$. Wir definieren nun die offenen Mengen $U_n \subset T(B_\alpha(0))$ durch

$$U_n := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{dist}(z, T(B_\alpha(0)^C)) > \frac{1}{n}\}. \quad (602)$$

Wegen der Offenheit von $T(B_\alpha(0))$ gilt $T(B_\alpha(0)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ und somit auch $\overline{B_1(0)} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$. Wegen der Kompaktheit von $\overline{B_1(0)}$ muss es eine endliche Teilüberdeckung geben,

d.h. wir finden ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\overline{B_1(0)} = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = \bigcup_{n=1}^{n_0} U_n = U_{n_0} \quad (603)$$

somit gilt $\text{dist}(z, T(B_\alpha(0))^C) > \frac{1}{n_0}$ für alle $z \in \overline{B_1(0)}$. Wähle nun $\delta := \frac{1}{n_0}$. Sei $z \in B_{1+\delta}(0)$ beliebig. Dann gilt stets $\frac{z}{1+\delta} \in B_1(0)$. Wir folgern (aus der Tatsache, dass dist stets Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante 1 ist)

$$\text{dist}(z, T(B_\alpha(0))^C) \geq \text{dist}\left(\frac{z}{1+\delta}, T(B_\alpha(0))^C\right) - \left|z - \frac{z}{1+\delta}\right| \quad (604)$$

$$\geq \frac{1}{n_0} - |z| \left(1 - \frac{1}{1+\delta}\right) = \frac{1}{n_0} - \frac{\delta}{1+\delta} |z| > \frac{1}{n_0} - \frac{\delta}{1+\delta} (1 + \delta) = \frac{1}{n_0} - \delta = 0. \quad (605)$$

Somit gilt $z \notin T(B_\alpha(0))^C$, d.h. $z \in T(B_\alpha(0))$.

Zu (v). Sei $\varepsilon \in (0, 1 - |w|)$. Sei $z \in B_\varepsilon(w)$, d.h. $|z - w| \leq \varepsilon$. Dann gilt

$$|z| \leq |z - w| + |w| \leq \varepsilon + |w| < 1 - |w| + |w| = 1. \quad (606)$$

Somit gilt $z \in B_1(0)$. Wir berechnen

$$|T(z)| = \frac{|z - w|}{|1 - z\bar{w}|} \leq \frac{\varepsilon}{|1 - z\bar{w}|} \quad (607)$$

Nach der inversen Dreiecksungleichung gilt $|1 - z\bar{w}| \geq |1| - |z\bar{w}| = 1 - |z| |w| \geq 1 - |w|$, weil $|z|$ laut (606) kleiner als 1 ist. Wir folgern dann mit (607)

$$|T(z)| \leq \frac{\varepsilon}{1 - |w|} \quad (608)$$

und somit (v).

Zu (vi). Aufgrund der Kreistreue ist $T(\partial B_\varepsilon(w))$ entweder eine Gerade oder ein Kreis. Aufgrund von (v) muss $T(\partial B_\varepsilon(w))$ jedoch in $B_{\frac{\varepsilon}{1-|w|}}(0)$ liegen, und somit beschränkt sein.

Eine Gerade kann $T(\partial B_\varepsilon(w))$ also nicht sein. Somit ist es ein Kreis, der ganz in $\overline{B_{\frac{\varepsilon}{1-|w|}}(0)}$ liegt. Jeder solcher Kreis ist gegeben durch $\partial B_{\rho(\varepsilon)}(\xi_\varepsilon)$ für $\rho(\varepsilon)$ und ξ_ε wie in der Aussage. Aussage (vii) folgt so: Definieren wir $h : B_\alpha(0) \rightarrow \mathbb{R}$ durch $h(z) := |T(z) - \xi_\varepsilon|$, so sind $h(B_\varepsilon(w))$ und $h(B_1(0) \setminus B_\varepsilon(w))$ beides Teilmengen von $[0, \infty) \setminus \{\rho_\varepsilon\}$. Da eine stetige Abbildung aber Zusammenhang erhält, müssen $h(B_\varepsilon(w))$ und $h(B_1(0) \setminus B_\varepsilon(w))$ beides Intervalle sein. Zusammen mit (ii) und (vi) folgt $h(B_\varepsilon(w)) \subset [0, \rho(\varepsilon))$ und $h(B_1(0) \setminus B_\varepsilon(w)) \subset (\rho(\varepsilon), \infty)$. Der Rest folgt aus der Bijektivität von T .

Behauptung (viii) beweisen wir später (siehe Bemerkung 201).

Korollar 150. Es sei $a \in \mathbb{C}$ und $r_1 > 0$ sowie $w \in B_{r_1}(a)$. Es sei nun $f \in \mathcal{H}(D \setminus \{w\})$ für

eine offene Menge $D \subset \overline{B_{r_1}(a)}$. Dann gilt für alle $r_2 > 0$ mit $\overline{B_{r_2}(w)} \subset B_{r_1}(a)$

$$\int_{\partial B_{r_1}(a)} f(z) \, dz = \int_{\partial B_{r_2}(w)} f(z) \, dz. \quad (609)$$

Beweis. OBdA haben wir $r_1 = 1$ und $a = 0$ (sonst betrachte $\tilde{f}(z) = f(a + r_1 z)$). Es sei $f \in \mathcal{H}(B_\alpha(0))$. Es sei wie in Lemma 149 $T(z) := \frac{z-w}{1-z\bar{w}}$. Wir fixieren $\alpha < 1$ so, dass Lemma 149 (i) erfüllt ist und, dass $f \in \mathcal{H}(B_\alpha(0))$. Sei außerdem auch $\delta \in (0, 1)$ wie in Lemma 149 (iv) und wähle $\varepsilon > 0$ so, dass $\frac{\varepsilon}{1-|w|} < \frac{1}{2}\delta$. Seien $\rho(\varepsilon) > 0$ und $\xi_\varepsilon \in \mathbb{C}$ wie in Lemma 149 (vi). Man beachte, dass dann $|\xi_\varepsilon| < \frac{\delta}{2}$. Es gilt wegen Proposition 146

$$\int_{\partial B_{r_2}(w)} f(z) \, dz = \int_{\partial B_\varepsilon(w)} f(z) \, dz \quad (610)$$

Nun gilt wegen Proposition 142

$$\int_{\partial B_\varepsilon(w)} f(z) \, dz = \int_{T(\partial B_\varepsilon(w))} f(T^{-1}(z))(T^{-1})'(z) \, dz = \int_{\partial B_{\rho(\varepsilon)}(\xi_\varepsilon)} f(T^{-1}(z))(T^{-1})'(z) \, dz. \quad (611)$$

Hier haben wir benutzt, dass $t \mapsto T(w + \varepsilon e^{it})$ den Kreis $B_{\rho(\varepsilon)}(\xi_\varepsilon)$ im Uhrzeigersinn durchläuft, vgl. Lemma 149 (viii).

$$\int_{\partial B_{r_2}(w)} f(z) \, dz = \int_{\partial B_{\rho(\varepsilon)}(\xi_\varepsilon)} f(T^{-1}(z))(T^{-1})'(z) \, dz. \quad (612)$$

Beachte nun, dass $(f \circ T^{-1}) \cdot T^{-1}$ auf $T(B_\alpha(0) \setminus \{w\}) = T(B_\alpha(0)) \setminus \{0\}$ holomorph ist. Nach Lemma 149 ist T^{-1} somit insbesondere auf $B_{1+\delta}(0) \setminus \{0\}$ holomorph. Beachte: Da $|\xi_\varepsilon| \leq \frac{1}{2}\delta$ gilt $\partial B_1(\xi_\varepsilon) \subset B_{1+\delta}(0)$. Mit Korollar 146 gilt

$$\int_{\partial B_{r_2}(w)} f(z) \, dz = \int_{\partial B_{\rho(\varepsilon)}(\xi_\varepsilon)} f(T^{-1}(z))(T^{-1})'(z) \, dz = \int_{\partial B_1(\xi_\varepsilon)} f(T^{-1}(z))(T^{-1})'(z) \, dz. \quad (613)$$

ZWISCHENBEHAUPTUNG.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_1(\xi_\varepsilon)} f(T^{-1}(z))(T^{-1})'(z) \, dz = \int_{\partial B_1(0)} f(T^{-1}(z))(T^{-1})'(z) \, dz. \quad (614)$$

Dazu:

$$\int_{\partial B_1(\xi_\varepsilon)} f(T^{-1}(z))(T^{-1})'(z) \, dz = \int_0^{2\pi} f(T^{-1}(\xi_\varepsilon + e^{it}))(T^{-1})'(\xi_\varepsilon + e^{it}) i e^{it} \, dt \quad (615)$$

Beachte nun, dass für alle $t \in [0, 2\pi]$ gilt (punktweise)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(T^{-1}(\xi_\varepsilon + e^{it}))(T^{-1})'(\xi_\varepsilon + e^{it})ie^{it} = f(T^{-1}(e^{it}))(T^{-1})'(e^{it})ie^{it}, \quad (616)$$

da $\xi_\varepsilon \rightarrow 0$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ (und alles stetig ist). Ferner gilt für alle $\varepsilon > 0$

$$|f(T^{-1}(\xi_\varepsilon + e^{it}))(T^{-1})'(\xi_\varepsilon + e^{it})ie^{it}| \leq \sup_{w \in \overline{B_{1+\delta/2}(0)}} |(f \circ T^{-1})(w)|||(T^{-1})'(w)| =: M < \infty. \quad (617)$$

Somit ist also M eine auf $(0, 2\pi)$ integrierbare Majorante des Integranden in (615). Wir folgern

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_1(\xi_\varepsilon)} f(T^{-1}(z))(T^{-1})'(z) dz = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} f(T^{-1}(\xi_\varepsilon + e^{it}))(T^{-1})'(\xi_\varepsilon + e^{it})ie^{it} dt \quad (618)$$

$$= \int_0^{2\pi} f(T^{-1}(e^{it}))(T^{-1})'(e^{it})ie^{it} dt = \int_{\partial B_1(0)} f(T^{-1}(z))(T^{-1})'(z) dz, \quad (619)$$

wobei man die letzte Gleichung am besten rückwärts liest. ZWISCHENBEHAUPTUNG ENDE.

Wir folgern nun mit (613) (nach Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ auf beiden Seiten)

$$\int_{\partial B_{r_2}(w)} f(z) dz = \int_{\partial B_1(0)} f(T^{-1}(z))(T^{-1})'(z) dz. \quad (620)$$

Wiederum mit der Substitutionsformel erhalten wir

$$\int_{\partial B_{r_2}(w)} f(z) dz = \int_{\partial B_1(0)} f(T^{-1}(z))(T^{-1})'(z) dz = \int_{T^{-1}(\partial B_1(0))} f(z) dz \quad (621)$$

$$= \int_{\partial B_1(0)} f(z) dz, \quad (622)$$

wobei wir im letzten Schritt wiederum Lemma 149 (viii) benutzt haben.

3.3 Die Cauchy'sche Integralformel

Der Cauchy-Integralsatz befasst sich mit

$$\int_{\partial B_r(a)} f(z) dz \quad (623)$$

für holomorphe Funktionen $f \in \mathcal{H}(D)$, $D \supset \overline{B_r(a)}$. Erstaunlicherweise verschwindet das Integral hier stets. Die Situation verhält sich komplett anders, wenn der Integrand nur an einem einzigen Punkt von $B_r(a)$ nicht komplex differenzierbar ist, vergleiche auch Bemerkung 148. Bei einem solchen Punkt spricht man von einer *isolierten Singularität*.

Wir interessieren uns in dieser Vorelesung für Kurvenintegrale von Funktionen mit isolierten Singularitäten. Ein wichtiger Schritt in diese Richtung ist die *Cauchy'sche Integralformel*:

Satz 151. CAUCHY-INTEGRALFORMEL. Es seien $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$ und $w \in B_r(a)$. Ist $f \in \mathcal{H}(D)$ für ein $D \supset \overline{B_r(a)}$ offen, so gilt

$$\int_{\partial B_r(a)} \frac{f(z)}{z-w} dz = 2\pi i f(w). \quad (\text{CIF})$$

Im Spezialfall $w = a$ und $f \equiv 1$ haben wir (CIF) bereits in Beispiel 132 gesehen. Der Beweis ist dank unserer Vorbereitungen aus dem vorigen Abschnitt gar nicht so schwer.

Beweis (von Satz 151). Wir definieren $g : B_r(a) \setminus \{w\} \rightarrow \mathbb{C}$ durch $g(z) := \frac{f(z)}{z-w}$. Da g auf $B_r(a) \setminus \{w\}$ holomorph ist, lässt sich Korollar 150 auf g anwenden. Sei $\varepsilon_0 > 0$ so, dass $\overline{B_{\varepsilon_0}(w)} \subset B_r(a)$. Dann gilt für alle $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$

$$\int_{\partial B_r(a)} g(z) dz = \int_{\partial B_\varepsilon(w)} g(z) dz \quad (624)$$

Wir folgern mit der Definition von g

$$\int_{\partial B_r(a)} \frac{f(z)}{z-w} dz = \int_{\partial B_\varepsilon(w)} \frac{f(z)}{z-w} dz. \quad (625)$$

Wir berechnen nun die rechte Seite für beliebiges $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

$$\int_{\partial B_\varepsilon(w)} \frac{f(z)}{z-w} dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(w + \varepsilon e^{it})}{w + \varepsilon e^{it} - w} i\varepsilon e^{it} dt \quad (626)$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{f(w + \varepsilon e^{it})}{\varepsilon e^{it}} i\varepsilon e^{it} dt = i \int_0^{2\pi} f(w + \varepsilon e^{it}) dt \quad (627)$$

Wir beobachten nun, dass für alle $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ und $t \in [0, 2\pi]$

$$|f(w + \varepsilon e^{it})| \leq \sup_{\xi \in \overline{B_{\varepsilon_0}(w)}} |f(\xi)| := M < \infty, \quad (628)$$

weil f auf der kompakten Menge $\overline{B_{\varepsilon_0}(w)} \subset B_r(a)$ stetig ist. Weil M auf $(0, 2\pi)$ integrierbar ist, erlaubt uns der Satz über dominierte Konvergenz die Vertauschung von Integralen und punktwisen Funktionsgrenzwerten. Wir schließen

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon(w)} \frac{f(z)}{z-w} dz = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} i \int_0^{2\pi} f(w + \varepsilon e^{it}) dt = i \int_0^{2\pi} f(w) dt = if(w)(2\pi). \quad (629)$$

Die Behauptung folgt.

Die Cauchy-Integralformel wird uns erlauben, einige Integrale zu berechnen, deren Wert zu finden vorher undenkbar war.

Beispiel 152. Wir berechnen

$$\int_{\partial B_1(0)} \frac{e^z}{2z-1} dz. \quad (630)$$

Dazu

$$\int_{\partial B_1(0)} \frac{e^z}{2z-1} dz = \int_{\partial B_1(0)} \frac{1}{2} \frac{e^z}{z-\frac{1}{2}} dz = \int_{\partial B_1(0)} \frac{f(z)}{z-\frac{1}{2}} dz \quad (631)$$

für die holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch $f(z) = \frac{1}{2}e^z$. Dann gilt

$$\int_{\partial B_1(0)} \frac{f(z)}{z-\frac{1}{2}} dz = 2\pi i f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\pi i \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}} = \pi i e^{\frac{1}{2}}. \quad (632)$$

Wer möchte, kann versuchen dieses Integral direkt mit der Definition des Kurvenintegrals zu berechnen. Es wird nicht gelingen!

Sie werden hier noch viele weitere Beispiele in den Übungen sehen! Als erste Konsequenz besprechen wir die Mittelwerteigenschaft holomorpher Funktionen. Eine Eigenschaft, die die “Bewegungsfreiheit” holomorpher Funktionen schon deutlich einschränkt.

Korollar 153. MITTELWERTEIGENSCHAFT. Es sei $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $z_0 \in D$. Sei ferner $r > 0$ mit $\overline{B_r(z_0)} \subset D$. Dann gilt

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt. \quad (633)$$

Beweis. Es gilt für r, z_0 wie in der Aussage

$$2\pi i f(z_0) = \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{z_0 + re^{it} - z_0} ire^{it} dt = i \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt. \quad (634)$$

Teilen wir durch $2\pi i$, folgt die Behauptung.

Eine weitere wichtige Konsequenz der Cauchy’schen Integralformel ist der *Satz von Liouville*.

Satz 154. SATZ VON LIOUVILLE. Es sei $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ beschränkt. Dann ist f konstant.

Beweis. Sei etwa $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ beschränkt, d.h.

$$M := \sup_{\xi \in \mathbb{C}} |f(\xi)| < \infty. \quad (635)$$

Sei $w \in \mathbb{C}$ beliebig aber fest. Für $r > |w|$ gilt nach (CIF)

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(0)} \frac{f(z)}{z-w} dz. \quad (636)$$

Nun würden wir die Gleichung gerne nach w ableiten. Dazu

$$f'(w) = \frac{1}{2\pi i} \partial_w \int_{\partial B_r(0)} \frac{f(z)}{z-w} dz \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(0)} \partial_w \left(\frac{f(z)}{z-w} \right) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(0)} \frac{f(z)}{(z-w)^2} dz. \quad (637)$$

Die Vertauschung von Differential und Integral in $(*)$ begründen wir noch am Ende des Beweises. Nun gilt

$$|f'(w)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(0)} \frac{f(z)}{(z-w)^2} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \sup_{z \in \partial B_r(0)} \left| \frac{f(z)}{(z-w)^2} \right| L(\partial B_r(0)) \quad (638)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sup_{z \in \partial B_r(0)} \frac{|f(z)|}{|z-w|^2} (2\pi r) \leq rM \sup_{z \in \partial B_r(0)} \frac{1}{|z-w|^2} \quad (639)$$

Man beachte: Da $r > |w|$ gilt nach der inversen Dreiecksungleichung für alle $z \in \partial B_r(0)$

$$|z-w| \geq |z| - |w| = r - |w| \quad (640)$$

und somit liefert (639)

$$|f'(w)| \leq rM \frac{1}{(r-|w|)^2} = \frac{rM}{r^2 - 2|w|r + |w|^2} \quad \forall r > |w|. \quad (641)$$

Mit $r \rightarrow \infty$ folgern wir $|f'(w)| = 0$. Da w beliebig war, folgt $f' \equiv 0$ und somit $f \equiv \text{const}$ (vgl. Übungsblatt 6).

Noch \mathbb{Z} : die Vertauschung $(*)$ ist erlaubt. Dazu definieren wir

$$h(w) := \int_{\partial B_r(0)} \frac{f(z)}{z-w} dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{it})}{re^{it}-w} ire^{it} dt. \quad (642)$$

Sei $w_0 \in B_r(0)$ und sei $w \in \mathbb{C}$ so, dass $|w-w_0| < \frac{r-|w_0|}{2}$. Dann gilt insbesondere auch $|w| \leq |w_0| + |w-w_0| < \frac{r+|w_0|}{2}$ und außerdem

$$\frac{1}{w-w_0} \left(\frac{1}{re^{it}-w} - \frac{1}{re^{it}-w_0} \right) = \frac{1}{(re^{it}-w)(re^{it}-w_0)}. \quad (643)$$

Somit folgt

$$\frac{h(w) - h(w_0)}{w - w_0} = \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{it})}{(re^{it}-w)(re^{it}-w_0)} ire^{it} dt. \quad (644)$$

Um den Grenzwert $w \rightarrow w_0$ im Integralausdruck auf der rechten Seite zu berechnen, benötigen wir eine integrierbare Majorante. Dazu

$$\left| \frac{f(re^{it})}{(re^{it} - w)(re^{it} - w_0)} ire^{it} \right| = r \frac{|f(re^{it})|}{|re^{it} - w| |re^{it} - w_0|} \leq r \frac{M}{(r - |w|)(r - |w_0|)} \quad (645)$$

$$\leq r \frac{M}{\frac{1}{2}(r - \frac{r+|w_0|}{2})(r - |w_0|)} \leq r \frac{M}{\frac{1}{2}(r - |w_0|)(r - |w_0|)}. \quad (646)$$

Dieser Ausdruck ist (als von t, w unabhängige Konstante) sicherlich auf $(0, 2\pi)$ integrierbar. Der Satz über die dominierte Konvergenz erlaubt uns damit den Übergang zum Grenzwert auf der rechten Seite von (644). Wir folgern

$$h'(w) = \lim_{w \rightarrow w_0} \frac{h(w) - h(w_0)}{w - w_0} = \int_0^{2\pi} \lim_{w \rightarrow w_0} \frac{f(re^{it})}{(re^{it} - w)(re^{it} - w_0)} ire^{it} dt \quad (647)$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{it})}{(re^{it} - w_0)^2} ire^{it} dt = \int_{\partial B_r(0)} \frac{f(z)}{(z - w_0)^2} dz. \quad (648)$$

Dies rechtfertigt (*).

Insbesondere müssen also auch Funktionen wie der komplexe Sinus $\sin : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ und Cosinus auf \mathbb{C} unbeschränkt sein. Das unterscheidet sich definitiv vom Verhalten des Sinus und Cosinus auf \mathbb{R} . Wir haben diese Unbeschränktheit eigentlich auch schonmal nachgewiesen, vgl. Übungsblatt 2 Aufgabe 1(b).

Bemerkung 155. Eine holomorphe Funktion auf ganz \mathbb{C} nennen wir auch eine *ganze Funktion*. Der Satz von Liouville besagt also in Kurzform: Jede beschränkte ganze Funktion muss konstant sein.

3.3.1 Der Fundamentalsatz der Algebra

Nun kommen wir zu einem Satz, auf dessen Beweis Sie im Studium sicherlich schon lange gewartet haben, dem *Fundamentalsatz der Algebra*. Er wird sehr leicht aus dem Satz von Liouville folgen

Satz 156. FUNDAMENTALSATZ DER ALGEBRA. Jedes nichttriviale \mathbb{C} -Polynom vom Grade $n \geq 1$ besitzt eine Nullstelle in \mathbb{C} .

Beweis. Es sei für $n \geq 1$

$$p(z) := \sum_{k=0}^n a_k z^k \quad \text{für } a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}, a_n \neq 0 \quad (649)$$

ein \mathbb{C} -Polynom vom Grad n . Beachte: Insbesondere ist p nicht konstant, weil $n \geq 1$. Angenommen nun p hat keine Nullstelle. Definiere dann $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ durch $f(z) := \frac{1}{p(z)}$.

Dann ist $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Wir zeigen nun, dass f beschränkt ist. Dazu beobachten wir zunächst, dass es ein $R_0 > 0$ gibt mit

$$|a_n|R^n > \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|R^k + 1 \quad \forall R \in [R_0, \infty). \quad (650)$$

(denn schließlich gilt $\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} |a_k|R^k + 1}{|a_n|R^n} = 0$). Da f stetig ist und $\overline{B_{R_0}(0)}$ kompakt, gibt es ein $M_1 > 0$ mit

$$\sup_{z \in \overline{B_{R_0}(0)}} |f(z)| \leq M_1 < \infty. \quad (651)$$

Für $|z| > R_0$ gilt nach der inversen Dreiecksungleichung

$$|p(z)| = \left| \sum_{k=0}^n a_k z^k \right| = \left| a_n z^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k \right| \geq |a_n z^n| - \left| \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k \right| = |a_n| |z|^n - \left| \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k \right| \quad (652)$$

$$\stackrel{\geq \Delta\text{-Ungl}}{\geq} |a_n| |z|^n - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| |z|^k \stackrel{(650) \text{ mit } R = |z|}{=} \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| |z|^k + 1 - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| |z|^k = 1. \quad (653)$$

Somit haben wir für $|z| > R_0$

$$|f(z)| = \frac{1}{|p(z)|} \leq 1. \quad (654)$$

Wir folgern, dass

$$|f(z)| \leq \max\{M_1, 1\} \quad \forall z \in \mathbb{C}. \quad (655)$$

Somit ist $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ beschränkt. Aus dem Satz von Liouville folgern wir, dass f konstant ist. Ein Widerspruch, da $p = \frac{1}{f}$ nämlich nicht konstant ist.

Die eventuell eher bekannte Version des Fundamentalsatzes der Algebra ist, dass jedes Polynom über \mathbb{C} in Linearfaktoren zerfällt. Dies begründen wir nun nochmal in dem folgenden Korollar.

Korollar 157. Es sei p ein nichttriviales \mathbb{C} -Polynom vom Grade $n \geq 1$. Dann gibt es Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ und $a \in \mathbb{C}$ so, dass

$$p(z) = a(z - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (z - \lambda_n) \quad (656)$$

Beweis. Induktion nach n .

INDUKTIONSANFANG. Für $n = 1$, d.h. $p(z) = a_1 z + a_0$ (mit $a_1 \neq 0$) gilt $p(z) = a_1(z - (\frac{-a_0}{a_1}))$.

Somit leistet die Wahl $a = a_1$ und $\lambda_1 = \frac{-a_0}{a_1}$ das Gewünschte.

INDUKTIONSHYPOTHESE. Es gelte die Behauptung für alle Polynome vom Grad n . \mathbb{Z} Die Behauptung gilt auch für Polynome vom Grad $n + 1$. Dazu sei p ein Polynom vom Grad $n + 1$. Nach Satz 156 besitzt p eine Nullstelle $\lambda_{n+1} \in \mathbb{C}$. Nach der Polynomdivision (Satz

61) gibt es dann ein Polynom q vom Grad $(n + 1) - 1 = n$ mit

$$p(z) = (z - \lambda_{n+1})q(z). \quad (657)$$

Auf q lässt sich nun die Induktionshypothese anwenden. Wir finden somit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ und $a \in \mathbb{C}$ so, dass $q(z) = a(z - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (z - \lambda_n)$. Mit (657) folgt

$$p(z) = q(z)(z - \lambda_{n+1}) = a(z - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (z - \lambda_n)(z - \lambda_{n+1}). \quad (658)$$

3.3.2 Der Potenzreihenentwicklungssatz

Auch jetzt folgt ein Korollar aus der Cauchy'schen Integralformel, auf das wir lange gewartet haben: Jede holomorphe Funktion ist (lokal) als *Potenzreihe* darstellbar. Das hat wichtige Konsequenzen: Zum Beispiel sind Potenzreihen nach Proposition 105 gleich *unendlich oft differenzierbar*. Die Erkenntnis, dass jede holomorphe Funktion unendlich oft differenzierbar ist, ist sehr nützlich und macht einige Sätze, die wir bereits behandelt haben leichter.

Satz 158. POTENZREIHENENTWICKLUNGSSATZ. Es sei $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $z_1 \in D$. Dann gibt es eine Potenzreihe $P(z) = \sum_{n \geq 0} a_n(z - z_1)^n$ mit Konvergenzradius $R_P \geq \text{dist}(z_1, D^C)$ und

$$f(z) = f_P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_1)^n \quad \forall z \in B_{\text{dist}(z_1, D^C)}(z_1). \quad (659)$$

(Hierbei nutzen wir die Konvention $\text{dist}(z_1, \emptyset) = \infty$)

Die Koeffizienten a_n lassen sich durch die *Cauchy'sche Koeffizientenformel*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_1)} \frac{f(z)}{(z - z_1)^{n+1}} dz. \quad (660)$$

bestimmen, wobei $r \in (0, \text{dist}(z_1, D^C))$ beliebig ist.

Beweis. Man beachte zunächst, dass wegen Korollar 146 die rechte Seite von (660) nicht von r abhängig ist (jedenfalls sofern $0 < r < \text{dist}(z_1, D^C)$). Wir definieren also ab sofort für ein beliebiges solche r

$$a_n := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_1)} \frac{f(z)}{(z - z_1)^{n+1}} dz. \quad (661)$$

Es sei nun $r \in (0, \text{dist}(z_1, D^C))$ und $w \in B_r(z_1)$. Dann gilt nach der Cauchy'schen Inte-

gralformel (Satz 151)

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_1)} \frac{f(z)}{z-w} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_1)} \frac{f(z)}{(z-z_1)-(w-z_1)} dz \quad (662)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_1)} \frac{f(z)}{z-z_1} \frac{1}{1-\frac{w-z_1}{z-z_1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_1)} \frac{f(z)}{z-z_1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w-z_1}{z-z_1}\right)^n dz, \quad (663)$$

wobei wir im letzten Schritt (den man besser rückwärts liest) die geometrische Reihe verwendet haben. Diese ist konvergent, da für $z \in \partial B_r(z_1)$ gilt $\left|\frac{w-z_1}{z-z_1}\right| = \frac{|w-z_1|}{r} < \frac{r}{r} = 1$. Nun berechnen wir

$$f(w) \stackrel{(663)}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_1)} \frac{f(z)}{z-z_1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w-z_1}{z-z_1}\right)^n dz \quad (664)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(z)}{(z-z_1)^{n+1}} (w-z_1)^n dz \quad (665)$$

$$\stackrel{(*)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_1)} \frac{f(z)}{(z-z_1)^{n+1}} dz \right) (w-z_1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (w-z_1)^n. \quad (666)$$

Die Vertauschung (*) rechtfertigen wir später noch. Diese Darstellung gilt für alle $w \in B_r(z_1)$ und alle $r < \text{dist}(z_1, D^C)$. mit anderen Worten: Sie gilt für $w \in B_{\text{dist}(z_1, D^C)}(z_1)$. Man sieht: Die Potenzreihe $P(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z-z_1)^n$ ist auf $B_{\text{dist}(z_1, D^C)}(z_1)$ konvergent und ihre Wertefunktion stimmt dort mit f überein. Es folgt insbesondere $R_P \geq \text{dist}(z_1, D^C)$. Noch \mathbb{Z} : Die Vertauschung (*) war gerechtfertigt. Dazu bilden wir für $m \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=0}^m \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_1)} \frac{f(z)}{(z-z_1)^{n+1}} dz \right) (w-z_1)^n - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(z)}{(z-z_1)^{n+1}} (w-z_1)^n dz \quad (667)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_1)} \sum_{n=0}^m \frac{f(z)}{(z-z_1)^{n+1}} (w-z_1)^n dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(z)}{(z-z_1)^{n+1}} (w-z_1)^n dz \quad (668)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_1)} \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{f(z)}{(z-z_1)^{n+1}} (w-z_1)^n dz \quad (669)$$

Somit haben wir mit der Fundamentalabschätzung

$$\left| \sum_{n=0}^m \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_1)} \frac{f(z)}{(z-z_1)^{n+1}} dz \right) (w-z_1)^n - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(z)}{(z-z_1)^{n+1}} (w-z_1)^n dz \right| \quad (670)$$

$$\stackrel{(669)}{\leq} \frac{1}{2\pi} \sup_{z \in \partial B_r(z_1)} \left| \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{f(z)}{(z-z_1)^{n+1}} (w-z_1)^n \right| L(\partial B_r(z_1)) \quad (671)$$

$$\leq r \sup_{z \in \partial B_r(z_1)} \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{|f(z)|}{|z-z_1|^{n+1}} |w-z_1|^n = r \sup_{z \in \partial B_r(z_1)} \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{|f(z)|}{r^{n+1}} |w-z_1|^n \quad (672)$$

$$= \sup_{z \in \partial B_r(z_1)} |f(z)| \sum_{n=m+1}^{\infty} \left(\frac{|w-z_1|^n}{r^n} \right) \quad (673)$$

$$= \sup_{z \in \partial B_r(z_1)} |f(z)| \left(\frac{|w-z_1|}{r} \right)^{m+1} \sum_{n=m+1}^{\infty} \left(\frac{|w-z_1|}{r} \right)^{n-(m+1)} \quad (674)$$

$$= \sup_{z \in \partial B_r(z_1)} |f(z)| \left(\frac{|w-z_1|}{r} \right)^{m+1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|w-z_1|}{r} \right)^n \quad (675)$$

$$= \sup_{z \in \partial B_r(z_1)} |f(z)| \left(\frac{|w-z_1|}{r} \right)^{m+1} \frac{1}{1 - \frac{|w-z_1|}{r}} \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty), \quad (676)$$

da $\sup_{z \in \partial B_r(z_1)} |f(z)| < \infty$ und $|w-z_1| < r$.

Mit anderen Worten: Jede holomorphe Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ lässt sich *lokal* um jedes $z_1 \in D$ als Potenzreihe schreiben, und das Konvergenzgebiet dieser Potenzreihe ist stets der größtmögliche Ball um den Entwicklungspunkt in D . Dies erklärt zum Beispiel auch, dass die Logarithmusreihe in $B_1(1)$ konvergiert, vgl. Bemerkung 124.

Korollar 159. GOURSAT'S BEOBACHTUNG. Es sei $f \in \mathcal{H}(D)$. Dann ist f auf D unendlich oft komplex differenzierbar. Außerdem gilt für alle $w \in D$, $r > 0$ und $z_0 \in D$ mit $w \in B_r(z_0)$ und $\overline{B_r(z_0)} \subset D$

$$f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}} dz. \quad (677)$$

Beweis. Es sei $f \in \mathcal{H}(D)$ und $w \in D$. Aus dem vorigen Satz schließen wir, es eine auf $B_{\text{dist}(w, D^c)}(w)$ konvergente Potenzreihe $P(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z-w)^n$ gibt mit $f(z) = f_P(z)$ für alle $z \in B_{\text{dist}(w, D^c)}(w)$. Aus Satz 105 wissen wir, dass $f = f_P$ in $B_{\text{dist}(w, D^c)}(w)$ unendlich oft komplex diffbar ist, insbesondere also auch bei w . Da $w \in D$ beliebig war folgt hier bereits die Tatsache, dass f auf ganz D unendlich oft komplex differenzierbar ist. Für die

Koeffizienten a_n der obigen Potenzreihe gilt, dass

$$a_n = \frac{f_P^{(n)}(w)}{n!} = \frac{f^{(n)}(w)}{n!}. \quad (678)$$

Desweiteren gilt aber nach der Cauchy'schen Koeffizientenformel (660)

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\varepsilon(w)} \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}} dz \quad \forall \varepsilon < \text{dist}(w, D^C). \quad (679)$$

Vergleichen wir die beiden obigen Gleichungen so sehen wir

$$f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial B_\varepsilon(w)} \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}} dz \quad \forall \varepsilon < \text{dist}(w, D^C). \quad (680)$$

Nun sei $z_0 \in D$ und $r > 0$ so, dass $w \in B_r(z_0)$ und $\overline{B_r(z_0)} \subset D$. Wähle nun $\varepsilon > 0$ so klein, dass $\overline{B_\varepsilon(w)} \subset B_r(z_0)$. Wegen Korollar 150 gilt dann

$$\int_{\partial B_\varepsilon(w)} \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}} dz = \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}} dz \quad (681)$$

(denn $z \mapsto \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}}$ ist auf $\overline{B_r(z_0)} \setminus \{w\}$ holomorph). Gleichungen (680) und (681) zusammen ergeben die gewünschte Formel

$$f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}} dz. \quad (682)$$

Intermezzo. Goursat's Beobachtung verändert einige unserer Sätze, denn manche Voraussetzungen werden nicht mehr benötigt. So zum Beispiel

Proposition 123'. UMKEHRSATZ IM KOMPLEXEN. Es sei $f \in \mathcal{H}(D)$ und $z_0 \in D$ so, dass $f'(z_0) \neq 0$. Dann gibt es eine offene Umgebung $\Omega \subset D$ von z_0 so, dass $U := f(\Omega)$ offen ist und $f|_\Omega : \Omega \rightarrow U$ biholomorph ist.

Proposition 142'. SUBSTITUTIONSFORMEL FÜR KURVENINTEGRALE. Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ eine stückweise C^1 Kurve. Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $g \in \mathcal{H}(U)$. Sei nun $D \supset g(U)$ offen. Dann gilt für $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ stetig

$$\int_{g \circ \gamma} f(z) dz = \int_\gamma f(g(z))g'(z) dz. \quad (683)$$

Eine weitere wichtige Konsequenz ergibt sich aus Korollar 141. Sie ist eine erste mögliche Verallgemeinerung des Cauchy'schen Integralsatzes für Kreiswege.

Korollar 160. CAUCHY'SCHER INTEGRALSATZ - VERSION II. Sei $f \in \mathcal{H}(D)$. Es sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ irgendeine geschlossene stückweise C^1 -Kurve so, dass es ein $z_0 \in \mathbb{C}$ gibt mit $\gamma([a, b]) \subset B_{\text{dist}(z_0, D^c)}(z_0)$. Dann gilt

$$\int_{\gamma} f(z) \, dz = 0. \quad (684)$$

Beweis. f lässt sich auf $B_{\text{dist}(z_0, D^c)}(z_0)$ in eine Potenzreihe entwickeln. Für (Wertefunktionen von) Potenzreihen gilt (684) bereits nach Korollar 141.

Die Voraussetzung, dass $\gamma([a, b]) \subset B_{\text{dist}(z_0, D^c)}(z_0)$ wird tatsächlich benötigt. Lässt man sie Weg, erhält man ein Gegenbeispiel, z.B. wenn man $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) := \frac{1}{z}$ und γ eine beliebige Parametrisierung von $\partial B_1(0)$ wählt.

Ein weiteres Korollar kann auch nützlich sein um holomorphe Funktionen zu konstruieren:

Korollar 161. Es sei $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $z_0 \in D$. Dann ist die Funktion $q : D \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch

$$q(z) := \begin{cases} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} & z \neq z_0 \\ f'(z_0) & z = z_0 \end{cases} \quad (685)$$

holomorph auf D .

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass q bei z_0 komplex differenzierbar ist (denn für alle $z \in D \setminus \{z_0\}$ folgt dies direkt aus der Quotientenregel). Es gibt nach Satz 158 eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ so, dass

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \forall z \in B_{\text{dist}(z_0, D^c)}(z_0). \quad (686)$$

Außerdem gilt $a_0 = f(z_0)$, $a_1 = f'(z_0)$ (wegen Proposition 105). Wir haben also für alle $z \in B_{\text{dist}(z_0, D^c)}(z_0)$

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z - z_0)^n. \quad (687)$$

Wir folgern, dass für $z \neq z_0$

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) + \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-1} \quad (688)$$

Somit gilt für $z \neq z_0$

$$q(z) = f'(z_0) + \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-1} = f'(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} (z - z_0)^n. \quad (689)$$

Da $q(z_0) = f'(z_0)$ gilt die Gleichung aber auch für $z = z_0$. Somit liefert die rechte Seite von (689) eine Potenzreihendarstellung für q um z_0 . Die Holomorphie folgt daraus, dass alle Potenzreihen holomorph sind, vgl Proposition 101.

Beispiel 162. Wir berechnen

$$\int_{\partial B_1(0)} \frac{1}{e^z - 1} dz. \quad (690)$$

Die Funktion $f(z) = \frac{1}{e^z - 1}$ ist nicht holomorph auf einer offenen Obermenge von $\overline{B_1(0)}$ da $e^0 = 1$. Der Cauchy'sche Integralsatz wäre also nicht anwendbar. Vielleicht aber (nach Umformungen) die Cauchy'sche Integralformel? Die Funktion holomorph auf $B_1(0) \setminus \{0\}$, denn $e^z = 1$ ist genau dann der Fall wenn $z = 2k\pi i$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. In $B_1(0)$ liegt von diesen Zahlen nur $2 \cdot 0 \cdot \pi i = 0$. Um die Struktur der Cauchy'schen Integral zu provozieren schreiben wir um

$$\int_{\partial B_1(0)} \frac{1}{e^z - 1} dz = \int_{\partial B_1(0)} \frac{\frac{z-0}{e^z - 1}}{z - 0} dz. \quad (691)$$

Wir betrachten nun die Funktion $q : B_2(0) \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch

$$q(z) = \begin{cases} \frac{e^z - 1}{z - 0} & z \neq 0 \\ 1 & z = 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{\exp(z) - \exp(0)}{z - 0} & z \neq 0 \\ \exp'(0) & z = 0 \end{cases}. \quad (692)$$

Nach Korollar 161 ist q auf $B_2(0)$ holomorph. Außerdem gilt (wegen der Diskussion der Nullstellen von $e^z - 1$ oben), dass $q(z) \neq 0$ für alle $z \in B_2(0)$. Somit ist auch $g = \frac{1}{q}$ holomorph auf $B_2(0)$. Nun gilt mit (691)

$$\int_{\partial B_1(0)} \frac{1}{e^z - 1} dz = \int_{\partial B_1(0)} \frac{\frac{z-0}{e^z - 1}}{z - 0} dz = \int_{\partial B_1(0)} \frac{\frac{1}{q(z)}}{z - 0} dz \stackrel{\text{(CIF)}}{=} 2\pi i \frac{1}{q(0)}. \quad (693)$$

Da $q(0) = 1$ gilt

$$\int_{\partial B_1(0)} \frac{1}{e^z - 1} dz = 2\pi i. \quad (694)$$

3.3.3 Satz von Morera und Stammfunktionen

Als nächstes widmen wir uns dem *Satz von Morera*, d.h. einer Umkehrung des Cauchy'schen Integralsatzes (Version II). Zunächst eine Definition

Definition 163. STRECKEN UND DREIECKSKURVEN. Für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ist die *Verbindungsstrecke* von z_1 nach z_2 eine Kurve der Form

$$\gamma_{\overrightarrow{z_1 z_2}}(t) := z_1 + t(z_2 - z_1) \quad (t \in [0, 1]). \quad (695)$$

Für $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ definieren wir durch

$$\Delta_{z_1, z_2, z_3} := \{\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3 : 0 \leq \lambda_i \leq 1 \forall i = 1, 2, 3; \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1\} \quad (696)$$

das von z_1, z_2, z_3 eingeschlossene Dreieck. Dessen Randkurve $\gamma_{z_1, z_2, z_3} := \gamma_{\overrightarrow{z_1 z_2}} \oplus \gamma_{\overrightarrow{z_2 z_3}} \oplus \gamma_{\overrightarrow{z_3 z_1}}$ nennen wir *Dreiecksweg* zwischen z_1, z_2, z_3 . Für eine stetige Funktion $f : \Delta_{z_1, z_2, z_3} \rightarrow \mathbb{C}$ definieren wir

$$\int_{\partial \Delta_{z_1, z_2, z_3}} f(z) dz := \int_{\gamma_{z_1, z_2, z_3}} f(z) dz. \quad (697)$$

Bemerkung 164. Wir weisen an der Stelle darauf hin, dass $(\gamma_{\overrightarrow{z_1 z_2}})_{\text{rev}} = \gamma_{\overrightarrow{z_2 z_1}}$. In der Tat

$$(\gamma_{\overrightarrow{z_1 z_2}})_{\text{rev}}(t) = \gamma_{\overrightarrow{z_1 z_2}}(1 - t) = z_1 + (1 - t)(z_2 - z_1) = z_2 + t(z_1 - z_2) = \gamma_{\overrightarrow{z_2 z_1}}(t) \quad \forall t \in [0, 1]. \quad (698)$$

Genau wie für Rechtecke kann man auch ein *Lemma von Goursat für Dreieckswege* zeigen.

Lemma 165. LEMMA VON GOURSAT FÜR DREIECKSWEGE. Es sei $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $\Delta = \Delta_{z_1, z_2, z_3} \subset D$ ein Dreieck in D . Dann gilt

$$\int_{\partial \Delta} f(z) dz = 0. \quad (699)$$

Beweis. Analog zu Lemma 144.

Dreieckswege sind gewissermaßen noch *elementarer* als Rechteckswege, da sich jeder Rechtecksweg als Konkatination von zwei Dreieckswegen schreiben lässt, vgl. Abbildung 6.

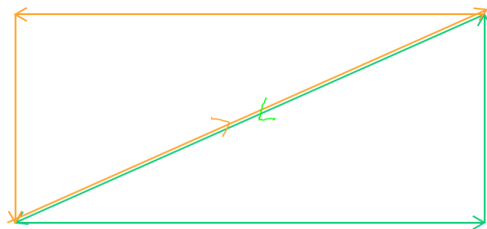


Abbildung 6: Durch Konkatination der grünen und orangenen Dreieckswege entsteht ein Rechtecksweg (denn die Diagonalen werden in entgegengesetzter Richtung durchlaufen und kürzen sich weg)

Nun sind wir endlich in der Lage, den Satz von Morera zu formulieren und beweisen.

Satz 165. SATZ VON MORERA. Es sei $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Ferner gelte für alle geschlossenen stückweise C^1 -Kurven $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\gamma([a, b]) \subset B_{\text{dist}(\zeta, D^c)}(\zeta)$ für ein $\zeta \in D$, dass

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0. \quad (700)$$

Dann ist f auf D holomorph.

ZUSATZ. Es reicht sogar, wenn man anstatt beliebiger geschlossener C^1 -Kurven nur *Dreieckswege*, d.h. Randkurven von Dreiecken Δ_{z_1, z_2, z_3} betrachtet.

Beweis. Es sei $w \in D$. \mathbb{Z} : f ist bei w komplex diff'bar. Wähle dazu ein $r > 0$ mit $\overline{B_r(w)} \subset D$. Definiere außerdem $F : B_r(w) \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$F(z) := \int_{\gamma_{\overline{wz}}} f(\xi) d\xi. \quad (701)$$

Wir werden zeigen, dass F auf $B_r(w)$ holomorph ist und $F' = f$ auf $B_r(w)$. Dazu: Für $z, z_0 \in B_r(w)$ betrachte das Dreieck $\Delta := \Delta_{w, z, z_0}$. Nun gilt nach der Voraussetzung des Satzes (mit $\zeta = w$)

$$0 = \int_{\partial\Delta} f(\xi) d\xi = \int_{\gamma_{\overline{wz}}} f(\xi) d\xi + \int_{\gamma_{\overline{zz_0}}} f(\xi) d\xi + \int_{\gamma_{\overline{z_0w}}} f(\xi) d\xi \quad (702)$$

$$= \int_{\gamma_{\overline{wz}}} f(\xi) d\xi + \int_{\gamma_{\overline{zz_0}}} f(\xi) d\xi - \int_{(\gamma_{\overline{z_0w}})_{rev}} f(\xi) d\xi \quad (703)$$

$$= \int_{\gamma_{\overline{wz}}} f(\xi) d\xi + \int_{\gamma_{\overline{zz_0}}} f(\xi) d\xi - \int_{\gamma_{\overline{wz_0}}} f(\xi) d\xi = F(z) - F(z_0) + \int_{\gamma_{\overline{z_0w}}} f(\xi) d\xi. \quad (704)$$

Wir folgern

$$F(z) - F(z_0) = - \int_{\gamma_{z\bar{z}_0}} f(\xi) d\xi = \int_{\gamma_{z_0\bar{z}}} f(\xi) d\xi \stackrel{\substack{\text{Definition} \\ \text{Kurvenintegral}}}{=} \int_0^1 f(\gamma_{z_0\bar{z}}(t)) \gamma'_{z_0\bar{z}}(t) dt \quad (705)$$

$$= \int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0))(z - z_0) dt. \quad (706)$$

Wir teilen durch $z - z_0$ und folgern (für $z \neq z_0$)

$$\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = \int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0)) dt. \quad (707)$$

Wir wollen nun $z \rightarrow z_0$ streben lassen. Dazu finden wir zunächst eine integrierbare Majorante des Integranden auf der rechten Seite. Dazu: Für alle $t \in [0, 1]$ gilt

$$|f(z_0 + t(z - z_0))| \leq \sup_{\xi \in \overline{B_r(w)}} |f(\xi)| =: M < \infty, \quad (708)$$

weil f auf $\overline{B_r(w)}$ stetig ist. Da M auf $[0, 1]$ integrierbar ist lassen sich (punktweise) Grenzwerte und Integral vertauschen und es gilt

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0)) dt = \int_0^1 f(z_0 + t(z_0 - z_0)) dt = f(z_0). \quad (709)$$

Somit gilt $F \in \mathcal{H}(B_r(w))$ und $F'(z_0) = f(z_0)$ für alle $z_0 \in B_r(w)$. Da holomorphe Funktionen stets unendlich oft komplex diffbar sind, ist nun auch $F' = f$ holomorph auf $B_r(w)$. Da w beliebig war folgt, dass f holomorph auf D ist. Da wir nur Dreieckswege betrachtet haben ist auch der Zusatz bereits bewiesen. Wir weisen an der Stelle nochmal darauf hin, dass sich der im Beweis betrachtete Dreiecksweg Δ komplett in $\overline{B_r(w)}$ aufhält und somit auch ganz in $B_{\text{dist}(\zeta, D^c)}(\zeta) = B_{\text{dist}(w, D^c)}(w)$ enthalten ist.

Numerisch ist Integrieren leichter als Differenzieren, somit bietet der Satz von Morera auch eine gute Möglichkeit, numerisch festzustellen, ob eine Funktion holomorph ist.

Intermezzo. Stammfunktionen und Elementargebiete.

Beweisreflexion 166. STAMMFUNKTIONEN. Unter der Bedingung (700) ist es uns gelungen, zu beweisen, dass die Funktion F aus (701) (auf $B_r(w)$) eine *Stammfunktion* von f definiert, d.h. F ist holomorph und $F' = f$. Es lohnt sich die Frage danach, was für Funktionen $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine solche Stammfunktion haben. Da Ableitungen holomorpher Funktionen stets wieder holomorph sind (vgl. Korollar 159), ist ein *notwendiges Kriterium*, dass f holomorph ist.

Proposition 167. Es sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und sternförmig und $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann

besitzt f eine Stammfunktion, d.h. es gibt eine holomorphe Funktion $F : D \rightarrow \mathbb{C}$ mit $F'(z) = f(z)$ für alle $z \in D$.

Beweisskizze. Es sei $w \in D$ ein Sternzentrum von D . Definiere $F : D \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$F(z) := \int_{\gamma_{\bar{w}z}} f(\xi) \, d\xi. \quad (710)$$

Dies ist wohldefiniert, da wegen der Sternförmigkeit $S := \{w + t(z - w) \mid t \in [0, 1]\} \subset D$ für alle $z \in D$. Wir zeigen nun, dass F holomorph ist mit $F' = f$. Es sei nun $z_0 \in D$. Man kann sich mit mäßigem Aufwand überzeugen, dass für z nahe genug an z_0 gilt, dass $\Delta := \Delta_{w,z,z_0} \subset D$.

{Nämlich so: Da S kompakt ist gibt es ein $w_0 \in S$ mit

$$\text{dist}(\xi, D^C) \geq \text{dist}(w_0, D^C) =: \delta > 0 \quad \forall \xi \in S. \quad (711)$$

Ist nun $|z - z_0| < \delta$ und $\lambda_1 w + \lambda_2 z + \lambda_3 z_0 \in \Delta$ (d.h. $\lambda_i \in [0, 1]$ für $i = 1, 2, 3$ und $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$) so erhalten wir

$$\lambda_1 w + \lambda_2 z + \lambda_3 z_0 = \lambda_1 w + \underbrace{(\lambda_2 + \lambda_3)z_0 + \lambda_2(z - z_0)}_{\in S} = \lambda_1 w + (1 - \lambda_1)z_0 + \lambda_2(z - z_0). \quad (712)$$

Somit gilt (weil dist Lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante 1 ist)

$$\text{dist}(\lambda_1 w + \lambda_2 z + \lambda_3 z_0, D^C) = \text{dist}(\lambda_1 w + (1 - \lambda_1)z_0 + \lambda_2(z - z_0), D^C) \quad (713)$$

$$\geq \text{dist}(\lambda_1 w + (1 - \lambda_1)z_0, D^C) - |\lambda_2(z - z_0)| \quad (714)$$

$$\geq \text{dist}(\lambda_1 w + (1 - \lambda_1)z_0, D^C) - |\lambda_2||z - z_0| \quad (715)$$

$$\geq \delta - |z - z_0| > 0 \quad (716)$$

und deswegen $\lambda_1 w + \lambda_2 z + \lambda_3 z_0 \in D$. Wir haben gezeigt, dass $\Delta \subset D$.

Nach dem Lemma von Goursat für Dreieckswege (Lemma 165) gilt

$$0 = \int_{\partial\Delta} f(\xi) \, d\xi = \int_{\gamma_{\bar{w}z}} f(\xi) \, d\xi + \int_{\gamma_{z\bar{z}_0}} f(\xi) \, d\xi + \int_{\gamma_{z_0\bar{w}}} f(\xi) \, d\xi. \quad (717)$$

Dies ist exakt die Gleichung (702) aus dem Beweis vom Satz von Morera. Ausgehend von dieser Gleichung können wir vorgehen wie im Beweis des Satzes von Morera und erhalten mit der dortigen Rechnung (weil F genau wie in diesem Beweis definiert ist), dass F holomorph ist und $F'(z) = f(z)$. Die Behauptung ist gezeigt.

Wir haben bereits in der reellen Analysis (und GDG) gesehen, dass das Finden einer Stammfunktion für (stetige) Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ nicht immer möglich ist (vgl. Satz 59 in meinem GDG-Skript [LINK ZUM SKRIPT](#)). Für (stetige) Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ hingegen ist es immer möglich. Wieder mal sind die komplexen Zahlen ein Mittelding: Proposition

167 ermöglicht das Finden von Stammfunktionen holomorpher Funktionen auf *sehr vielen* Gebieten $D \subset \mathbb{C}$, jedoch ist dies nicht immer möglich.

Beispiel 168.

BEHAUPTUNG. Die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch $f(z) = \frac{1}{z}$ ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, besitzt aber keine Stammfunktion auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

BEWEIS. Die Holomorphie ist unstrittig. Besäße f auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ eine Stammfunktion $F : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$, so wäre

$$\int_{\partial B_1(0)} f(z) \, dz = \int_{\partial B_1(0)} F'(z) \, dz \stackrel{\text{Prop. 139}}{=} 0. \quad (718)$$

Jedoch ist

$$\int_{\partial B_1(0)} f(z) \, dz = \int_{\partial B_1(0)} \frac{1}{z} \, dz = \int_{\partial B_1(0)} \frac{1}{z-0} \, dz \stackrel{\text{(CIF)}}{=} 2\pi i \cdot 1 \neq 0. \quad (719)$$

Ein Widerspruch. (Vergleiche auch Übungsblatt 7 Aufgabe 1)

Es scheint wohl also auch doch nicht bedingungslos möglich zu sein, eine Stammfunktion für holomorphe Funktionen zu finden. Uns wird am Ende der Vorlesung interessieren, auf welchen Gebieten das möglich ist

Definition 169. ELEMENTARGEBIET. Wir nennen ein Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ *Elementargebiet* falls jede holomorphe Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine Stammfunktion auf D besitzt.

Eine wichtige Eigenschaft von Elementargebieten wird durch (718) sichtbar – Der *Cauchy'sche Integralsatz für Elementargebiete*

Proposition 170. CAUCHY'SCHER INTEGRALSATZ FÜR ELEMENTARGEBIETE (VERSION III). Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Elementargebiet und $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt für alle geschlossenen stückweise C^1 -Kurven $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\gamma([a, b]) \subset D$, dass

$$\int_{\gamma} f(z) \, dz = 0 \quad (720)$$

Beweis. Weil D ein Elementargebiet ist, gibt es eine Stammfunktion $F : D \rightarrow \mathbb{C}$ von f .

$$\int_{\gamma} f(z) \, dz = \int_{\gamma} F'(z) \, dz \stackrel{\text{Prop. 139}}{=} 0. \quad (721)$$

Wir wissen aus Proposition 167, dass jedes sternförmige Gebiet ein Elementargebiet ist. Ferner wissen wir aus Beispiel 168, dass das Gebiet $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ kein Elementargebiet ist.

Am Ende dieser Vorlesung wird es uns möglich sein, alle Elementargebiete mithilfe des *Riemann'schen Abbildungssatzes* zu charakterisieren.

Satz 171. RIEMANN'SCHER ABBILDUNGSSATZ. Ein Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ ist genau dann ein Elementargebiet wenn entweder $D = \mathbb{C}$ oder $D = f(B_1(0))$ für eine biholomorphe Funktion $f : B_1(0) \rightarrow D$.

Beweis. Ich empfehle die Lektüre im Buch von Freitag-Busam nach Abschluss dieses Kurses.

Ein weiterer Sachverhalt, den wir hier nachrichtlich erwähnen wollen (aber nie benutzen und deswegen auch nicht beweisen werden) ist die folgende Charakterisierung von Elementargebieten

Satz 172. Es sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend. Dann sind äquivalent

- (i) D ist ein Elementargebiet
- (ii) Für jede geschlossene stückweise C^1 -Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\gamma([a, b]) \subset D$ und für jede Funktion $f \in \mathcal{H}(D)$ gilt $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$.

Beweisskizze. Die Richtung '(i) \Rightarrow (ii)' ist gerade der Cauchy'sche Integralsatz für Elementargebiete. Die Richtung '(ii) \Rightarrow (i)' ist eigentlich auch nicht schwer. Wähle $w \in D$ beliebig. Definiere $F : D \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$F(z) := \int_c f(\xi) d\xi \quad \text{wobei } c \text{ eine beliebige Kurve ist, die } w \text{ und } z \text{ verbindet.} \quad (722)$$

Die Voraussetzung (ii) impliziert, dass die Definition von $F(z)$ nicht von der konkreten Wahl von c abhängt, sondern wirklich nur von z . Man zeigt dann ähnlich wie vorher im Beweis zum Satz von Morera, dass F holomorph ist und $F' = f$.

3.3.4 Identitätssatz für holomorphe Funktionen

Wir diskutieren im nachfolgenden Abschnitt weitere wichtige Folgerungen aus dem Potenzreihenentwicklungssatz. Die erste wichtige Folgerung ist der *Identitätssatz* für holomorphe Funktionen. Dieser formuliert erstaunlich milde Bedingungen für die Gleichheit zweier holomorpher Funktionen.

Satz 173. IDENTITÄTSSATZ FÜR HOLOMORPHE FUNKTIONEN. Es sei (wie immer) $D \subset \mathbb{C}$ offen nichtleer und zusammenhängend, sowie $f, g : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann sind folgende Aussagen äquivalent

- (a) $f(z) = g(z)$ für alle $z \in D$
- (b) Die *Koinzidenzmenge* $\{z \in D : f(z) = g(z)\}$ besitzt einen Häufungspunkt in D .

(c) Es gibt ein $z_0 \in D$ so, dass $f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$

Beweis Zu ‘(a) \Rightarrow (b)’. Nimmt man (a) an so gilt $\{z \in D : f(z) = g(z)\} = D$. Da D offen ist, ist jeder Punkt von D ein Häufungspunkt von D .

Zu ‘(b) \Rightarrow (c)’. Es sei $z_0 \in D$ ein Häufungspunkt von $\{z \in D : f(z) = g(z)\}$. Insbesondere gibt es eine Folge $(w_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset D \setminus \{z_0\}$ mit $f(w_j) = g(w_j)$ und $w_j \rightarrow z_0$ für $j \rightarrow \infty$. Wir zeigen, dass $f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Dazu: Angenommen es gäbe ein $n \in \mathbb{N}_0$ mit $f^{(n)}(z_0) \neq g^{(n)}(z_0)$. Wähle nun $N := \min\{n \in \mathbb{N}_0 : f^{(n)}(z_0) \neq g^{(n)}(z_0)\}$. Entwickeln wir nun f und g in Potenzreihen um z_0 . Konkreter: Es gibt $r > 0$ und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{C}$ so, dass

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n \quad \forall z \in B_r(z_0). \quad (723)$$

Ferner gilt $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ und $b_n = \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!}$, d.h. $a_n = b_n \Leftrightarrow f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0)$. Wegen unserer Wahl von N gilt $a_n = b_n$ für alle $n < N$ und $a_N \neq b_N$. Wir folgern

$$f(z) - g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) (z - z_0)^n = \sum_{n=N}^{\infty} (a_n - b_n) (z - z_0)^n = (z - z_0)^N \sum_{n=N}^{\infty} (a_n - b_n) (z - z_0)^{n-N}. \quad (724)$$

Wir definieren nun $h : B_r(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ durch $h(z) := \sum_{n=N}^{\infty} (a_n - b_n) (z - z_0)^{n-N}$. Beachte, dass h auf $B_r(z_0)$ holomorph ist, $h(z_0) = a_N - b_N \neq 0$ und

$$f(z) - g(z) = (z - z_0)^N h(z) \quad \forall z \in B_r(z_0). \quad (725)$$

Das heißt

$$h(z) = \frac{f(z) - g(z)}{(z - z_0)^N} \quad \forall z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\}. \quad (726)$$

Ab einem gewissen Index $j_0 \in \mathbb{N}$ gilt nun sicherlich $(w_j)_{j \geq j_0} \subset B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ (wobei (w_j) die oben bereits gewählte Folge ist). Wir folgern

$$h(w_j) = \frac{f(w_j) - g(w_j)}{(w_j - z_0)^N} = 0, \quad (727)$$

da nach Konstruktion $f(w_j) = g(w_j)$. Nun ist h aber (als holomorphe Funktion) bei z_0 stetig und wir folgern

$$h(z_0) = \lim_{j \rightarrow \infty} h(w_j) = 0. \quad (728)$$

Ein Widerspruch zu $h(z_0) = a_N - b_N \neq 0$. Die Behauptung ist gezeigt.

Zu ‘(c) \Rightarrow (a)’. Wir definieren die Menge

$$E := \{z \in D : f^{(n)}(z) = g^{(n)}(z) \forall n \in \mathbb{N}_0\}. \quad (729)$$

Beachte E ist nicht leer, da nach Voraussetzung gilt $z_0 \in E$. Wir zeigen, dass E offen ist und $D \setminus E$ auch offen ist. Ist dieses gezeigt, so ist $D = E \cup (D \setminus E)$ die disjunkte Vereinigung zweier offener Mengen. Da D zusammenhängend ist, muss eine der beiden Mengen leer sein und es folgt (weil $E \neq \emptyset$), dass $D \setminus E = \emptyset$, d.h. $D = E$.

Schritt 1. Zur Offenheit von $D \setminus E = \{z \in D : \exists n \in \mathbb{N}_0 \text{ s.d. } f^{(n)}(z) \neq g^{(n)}(z)\}$. Beachte, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die Menge

$$O_n := \{z \in D : f^{(n)}(z) \neq g^{(n)}(z)\} = \{z \in D : |f^{(n)}(z) - g^{(n)}(z)| \in (0, \infty)\} \quad (730)$$

$$= |f^{(n)} - g^{(n)}|^{-1}((0, \infty)) \quad (731)$$

als Urbild einer offenen Menge unter der stetigen Funktion $|f^{(n)} - g^{(n)}|$ wieder offen ist. Nun gilt

$$D \setminus E = \bigcup_{n=0}^{\infty} O_n \quad (732)$$

und somit ist $D \setminus E$ als Vereinigung offener Mengen offen.

Schritt 2. Nun zur Offenheit von E . Es sei $z_1 \in E$, d.h. $f^{(n)}(z_1) = g^{(n)}(z_1)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Wir müssen zeigen, dass es eine Umgebung von z_1 gibt auf der dasselbe gilt. Wir entwickeln nun wieder f und g um z_1 in eine Potenzreihe. Das heißt es gibt $r > 0$ und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{C}$ so, dass

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_1)^n, \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_1)^n \quad \forall z \in B_r(z_1). \quad (733)$$

Wir erinnern uns nun noch einmal daran, dass $a_n = \frac{f^{(n)}(z_1)}{n!}$ und $b_n = \frac{g^{(n)}(z_1)}{n!}$ und somit gilt nach unserer Voraussetzung ($z_1 \in E$), dass $a_n = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit sind die beiden Potenzreihen in (733) dieselben und wir folgern

$$f(z) = g(z) \quad \forall z \in B_r(z_1). \quad (734)$$

Stimmen zwei Funktionen auf einer offenen Menge überein, so stimmen dort sicherlich auch ihre Ableitungen überein! Wir erhalten für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$f^{(n)}(z) = g^{(n)}(z) \quad \forall z \in B_r(z_1). \quad (735)$$

Somit gilt nach der Konstruktion von E dass $B_r(z_1) \subset E$. Wir haben also nachgewiesen, dass es um jedes $z_1 \in E$ eine offene Umgebung $B_r(z_1)$ gibt mit $B_r(z_1) \subset E$. Es folgt die Offenheit von E . Die Behauptung folgt wie oben diskutiert aus Schritt 1 und Schritt 2.

Bemerkung 174. Wir weisen an der Stelle darauf hin, dass Teil (ii) des Identitätssatzes explizit verlangt, dass der Häufungspunkt der Koinzidenzmenge im Definitionsbereich D

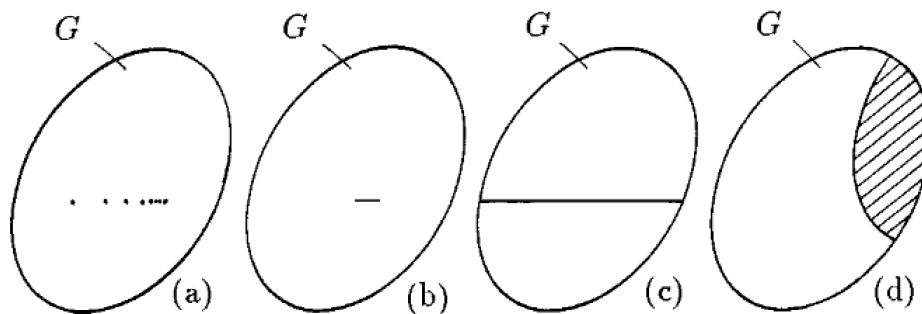


Abbildung 7: Eine Abbildung aus dem Buch von Jänich. Sind f, g auf G holomorph, so sind f und g identisch, falls $M := \{z \in D : f(z) = g(z)\}$ einen Häufungspunkt in D hat, vgl. (a). Insbesondere ist dies der Fall, wenn M ein Streckensegment enthält (vgl. (b)/(c)) oder eine ganze offene Teilmenge enthält (vgl. (d)).

liegen muss. Dazu betrachte die Funktionen $f, g : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ erklärt durch

$$f(z) := \sin \frac{1}{z}, \quad \text{und} \quad g(z) := 0. \quad (736)$$

Man beobachtet, dass für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt $f(\frac{1}{\pi j}) = \sin(\pi j) = 0 = g(\frac{1}{\pi j})$. Da $\frac{1}{\pi j} \rightarrow 0$ ($j \rightarrow \infty$), ist also 0 ein Häufungspunkt von $\{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : f(z) = g(z)\}$. Allerdings ist klarerweise $f \not\equiv g$. Auch wenn es auf den ersten Blick so scheint, ist dies kein Widerspruch zum Identitätssatz, denn der Häufungspunkt 0 liegt nicht im Holomorphiegebiet $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

3.3.5 Nullstellenverhalten

Als nächstes untersuchen wir basierend auf dem Potenzreihenentwicklungssatz, wie sich eine holomorphe Funktion in der Umgebung einer Nullstelle verhält. Hierzu sei (weiterhin) $D \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend.

Beobachtung 175. Sei $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, $f \not\equiv 0$ und $z_0 \in D$ mit $f(z_0) = 0$. Beachte: Nach dem Identitätssatz gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $f^{(n)}(z_0) \neq 0$, denn wäre $f^{(n)}(z_0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so würde für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gelten $f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0)$ mit $g \equiv 0$. Somit folgt $f \equiv 0$. Ein Widerspruch.

Basierend auf der obigen Beobachtung definieren wir die *Ordnung* einer Nullstelle.

Definition 176. **ORDNUNG EINER NULLSTELLE.** Es sei $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, $f \not\equiv 0$ und $z_0 \in D$ so, dass $f(z_0) = 0$. Dann nennen wir die natürliche Zahl

$$\text{ord}(f, z_0) := \min\{n \in \mathbb{N} : f^{(n)}(z_0) \neq 0\} \quad (737)$$

Ordnung der Nullstelle z_0 bezüglich f .

Beispiel 177. Es sei $D = \mathbb{C}$. Betrachte für $k \in \mathbb{N}$ die Funktion $f(z) = z^k$. Dann hat f bei $z_0 = 0$ eine Nullstelle der Ordnung k . In der Tat: Es gilt für $n \leq k$

$$f^{(n)}(z) = k(k-1) \cdot \dots \cdot (k-n+1)z^{k-n} \quad (738)$$

und daraus folgt sofort $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n < k$ und $f^{(k)}(0) = k! \neq 0$.

Wir werden in der Lage sein, zu bestimmen, wie f lokal in einer Umgebung einer Nullstelle der Ordnung n aussieht. Dazu müssen wir aber zunächst ein vorbereitendes Lemma über nullstellenfreie holomorphe Funktionen besprechen.

Lemma 178. HOLOMORPHER LOGARITHMUS UND HOLOMORPHES WURZELZIEHEN. Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Elementargebiet und $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit $f(z) \neq 0$ für alle $z \in D$. Dann gibt es

- (i) eine holomorphe Funktion $g : D \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = \exp(g(z))$.
- (ii) zu jedem gegebenen $m \in \mathbb{N}$ eine holomorphe Funktion $h : D \rightarrow \mathbb{C}$ so, dass $f(z) = h(z)^m$.

Beweis. Zu (i). Das einzig Erstaunliche hier ist die Holomorphie der Funktion g . Dass es irgendeine Funktion g mit der obigen Eigenschaft gibt, würde nämlich sofort aus der Surjektivität der Exponentialfunktion folgen. Damit die Funktion holomorph ist müssen wir uns aber etwas mehr anstrengen. Betrachte die Funktion $q : D \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch $q(z) := \frac{f'(z)}{f(z)}$. Da f auf D nicht verschwindet ist q nach der Quotientenregel holomorph auf D . Weil D ein Elementargebiet ist, besitzt q eine Stammfunktion, etwa sei $\tilde{g} \in \mathcal{H}(D)$ mit $\tilde{g}'(z) = q(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Wir berechnen nun mit der Produktregel und Kettenregel

$$\partial_z(f(z)e^{-\tilde{g}(z)}) = f'(z)e^{-\tilde{g}(z)} - f(z)e^{-\tilde{g}(z)}\tilde{g}'(z) = f'(z)e^{-\tilde{g}(z)} - f(z)e^{-\tilde{g}(z)}q(z) \quad (739)$$

$$= f'(z)e^{-\tilde{g}(z)} - f(z)e^{-\tilde{g}(z)}\frac{f'(z)}{f(z)} = f'(z)e^{-\tilde{g}(z)} - f'(z)e^{-\tilde{g}(z)} = 0. \quad (740)$$

Nach Übungsaufgabe 1 auf Blatt 6 gibt es eine Konstante $w \in \mathbb{C}$ mit

$$f(z)e^{-\tilde{g}(z)} = w \quad \forall z \in D. \quad \Rightarrow f(z) = we^{\tilde{g}(z)} \quad \forall z \in D. \quad (741)$$

Beachte: $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, denn wäre $w = 0$, so wäre auch $f \equiv 0$. Somit gibt es ein $\tilde{w} \in \mathbb{C}$ mit $w = e^{\tilde{w}}$. Wir folgern

$$f(z) = we^{\tilde{g}(z)} = e^{\tilde{w}}e^{\tilde{g}(z)} = e^{\tilde{w}+\tilde{g}(z)} \quad \forall z \in D. \quad (742)$$

Definieren wir nun $g : D \rightarrow \mathbb{C}$ durch $g(z) := \tilde{w} + \tilde{g}(z)$, so folgt die Behauptung (i).

Zu (ii). Sei $m \in \mathbb{N}$ vorgegeben und g wie in (i). Die Rechenregeln für die Exponentialfunktion besagen

$$f(z) = e^{g(z)} = e^{m \cdot \frac{1}{m} \cdot g(z)} = (e^{\frac{1}{m}g(z)})^m. \quad (743)$$

Definiert man $h : D \rightarrow \mathbb{C}$ durch $h(z) := e^{\frac{1}{m}g(z)}$ so folgt die Behauptung (denn h ist als Verkettung holomorpher Funktionen wieder holomorph).

Satz 179. NULLSTELLENVERHALTEN. Es sei $f \in \mathcal{H}(D)$, $f \not\equiv 0$ und $z_0 \in D$ mit $f(z_0) = 0$. Sei ferner $k := \text{ord}(f, z_0)$. Dann gibt es ein $r > 0$ mit $B_r(z_0) \subset D$ und es existiert biholomorphe Abbildung $h : B_r(z_0) \rightarrow h(B_r(z_0))$ mit $h(z_0) = 0$ so, dass

$$f(z) = (h(z))^k. \quad (744)$$

Beweis. Es seien k, z_0 wie in der Aussage. Entwickle zuerst f in einer Potenzreihe in z_0 , d.h. es gibt $R > 0$ und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{C}$ so, dass

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \forall z \in B_R(z_0), \quad (745)$$

mit $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$. Wegen $k = \text{ord}(f, z_0)$ und der Definition der Ordnung in (737) gilt $a_n = 0$ für alle $n < k$ und $a_k \neq 0$. Es folgt

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^k \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-k} = (z - z_0)^k \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} (z - z_0)^n \quad (746)$$

Definieren wir nun $p : B_R(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$p(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} (z - z_0)^n \quad (747)$$

so ist p holomorph und $p(z_0) = a_k \neq 0$. Wir folgern (wegen der Stetigkeit von p), dass es ein $\tilde{r} \in (0, R)$ gibt mit $p|_{B_{\tilde{r}}(z_0)} \neq 0$. Wenden wir Lemma 178 auf p mit $D = B_{\tilde{r}}(z_0)$ an, so erhalten wir die Existenz einer Funktion $\tilde{h} \in \mathcal{H}(B_{\tilde{r}}(z_0))$ mit

$$p(z) = \tilde{h}(z)^k \quad (748)$$

Wegen (746) und der Definition von p in (747) gilt für alle $z \in B_{\tilde{r}}(z_0)$

$$f(z) = (z - z_0)^k p(z) \stackrel{(748)}{=} (z - z_0)^k \tilde{h}(z)^k = \left((z - z_0) \tilde{h}(z) \right)^k. \quad (749)$$

Wir definieren nun $h : B_{\tilde{r}}(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ durch $h(z) := (z - z_0) \tilde{h}(z)$. Wir behaupten, dass diese Funktion h das Gewünschte leistet. Dazu: Dass h holomorph ist und $h(z_0) = 0$ folgt direkt aus der Definition von h . Dass $f(z) = h(z)^k$ folgt direkt aus (749). Für die Biholomorphie zeigen wir zunächst, dass $h'(z_0) \neq 0$.

$$h'(z_0) = \partial_z h(z) \Big|_{z=z_0} = \partial_z (z - z_0) \tilde{h}(z) \Big|_{z=z_0} = \tilde{h}(z) + (z - z_0) \tilde{h}'(z) \Big|_{z=z_0} = \tilde{h}(z_0). \quad (750)$$

Nun gilt $\tilde{h}(z_0) \neq 0$, denn wäre $\tilde{h}(z_0) = 0$ so wäre auch $0 = \tilde{h}(z_0)^k \stackrel{(748)}{=} p(z_0) = a_k \neq 0$.

Ein Widerspruch. Somit folgt aus (750) $h'(z_0) \neq 0$. Nach dem Umkehrsatz gibt es eine offene Umgebung U von z_0 so, dass $h : U \rightarrow h(U)$ biholomorph ist. Wähle nun $r \in (0, \tilde{r})$ so, dass $B_r(z_0) \subset U$. Dann ist sicher auch $h : B_r(z_0) \rightarrow h(B_r(z_0))$ biholomorph und die Behauptung folgt.

Bemerkung 180. Es seien f, h, k wie im vorigen Satz. Die Aussage des vorigen Satzes kann so interpretiert werden: Für $\xi \in h(B_r(z_0))$ gilt

$$f(h^{-1}(\xi)) = \xi^k. \quad (751)$$

Das heißt: bis auf eine biholomorphe Transformation des Definitionsbereichs stimmt f mit einer k -ten Potenzfunktion überein.

Mit der Aussage des vorigen Satzes können wir das Abbildungsverhalten einer holomorphen Funktion *geometrisch* verstehen. Dazu erinnern wir uns an Proposition 244, die besagt, dass für alle $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ die Gleichung $z^k = w$ genau k verschiedene Lösungen besitzt. Mit anderen Worten nimmt die Funktion $z \mapsto z^k$ jeden Wert $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ k -mal an. Da wegen (751) jede holomorphe Funktion um eine Nullstelle herum ungefähr wie eine Funktion der Form $z \mapsto z^k$ aussieht, sollte dieses Abbildungsverhalten auch für allgemeine holomorphe Funktionen gelten.

Korollar 181. VERZWEIGUNGSSATZ. Es sei $f \in \mathcal{H}(D)$, $f \not\equiv 0$ und $z_0 \in D$ eine Nullstelle von f mit $\text{ord}(f, z_0) = k \in \mathbb{N}$. Dann gibt es ein $\varepsilon_0 > 0$ so, dass zu jedem $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ eine offene Umgebung U_ε von z_0 existiert mit

- $U_\varepsilon \subset D$
- $f(U_\varepsilon) = B_\varepsilon(0)$ und
- Jeder Wert $w \in B_\varepsilon(0) \setminus \{0\}$ wird von $f|_{U_\varepsilon}$ exakt k -mal angenommen. (D.h. es gibt genau k verschiedene Zahlen $z_0, \dots, z_{k-1} \in U_\varepsilon$ mit $f(z_0) = \dots = f(z_{k-1}) = w$)

Beweis. Es seien f, k wie in der Aussage. Nach Satz 179 gibt es eine biholomorphe Abbildung $h : B_r(z_0) \rightarrow h(B_r(z_0))$ mit $h(z_0) = 0$ so, dass

$$f(z) = h(z)^k \quad \forall z \in B_r(z_0). \quad (752)$$

Insbesondere gilt auch

$$z^k = f(h^{-1}(z)) \quad \forall z \in h(B_r(z_0)). \quad (753)$$

Nun ist wegen der Biholomorphie von h die Menge $h(B_r(z_0)) = (h^{-1})^{-1}(B_r(z_0))$ offen (als Urbild einer offenen Menge unter einer stetigen Funktion). Ferner gilt $0 = h(z_0) \in h(B_r(z_0))$. Somit gibt es ein $\varepsilon_0 > 0$ so, dass $B_{\varepsilon_0/k}(0) \subset h(B_r(z_0))$. Definiere nun für $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ die Menge $U_\varepsilon := h^{-1}(B_{\varepsilon/k}(0))$. Diese ist offensichtlich eine offene Umgebung

von z_0 , da $h^{-1}(0) = z_0$. Fixieren nun $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Wir zeigen: Zu jedem $w \in B_\varepsilon(0) \setminus \{0\}$ gibt es k verschiedene Zahlen $z_0, \dots, z_{k-1} \in U_\varepsilon$ mit $f(z_0) = \dots = f(z_{k-1}) = w$. Dazu: Für $w \in B_\varepsilon(0) \setminus \{0\}$ gibt es nach Proposition 244 genau k verschiedene Zahlen $\tilde{z}_0, \dots, \tilde{z}_{k-1}$ mit $\tilde{z}_0^k = \dots = \tilde{z}_{k-1}^k = w$. Nun beachte für alle $i = 0, \dots, k-1$ (weil $w \in B_\varepsilon(0)$)

$$\varepsilon > |w| = |\tilde{z}_i^k| = |\tilde{z}_i|^k \quad \Rightarrow \quad |\tilde{z}_i| < \varepsilon^{\frac{1}{k}}. \quad (754)$$

Somit sind also $\tilde{z}_i \in B_{\varepsilon^{1/k}}(0)$ und die Zahlen $\tilde{z}_0, \dots, \tilde{z}_{k-1}$ sind verschieden. Daher gilt für $j = 0, \dots, k-1$, dass $z_j := h^{-1}(\tilde{z}_j) \in h^{-1}(B_{\varepsilon^{1/k}}(0)) = U_\varepsilon$. Diese Zahlen sind außerdem wegen der Injektivität von h^{-1} paarweise verschieden. Außerdem gilt nach der Konstruktion von z_j und \tilde{z}_j

$$f(z_j) = f(h^{-1}(\tilde{z}_j)) \stackrel{(753)}{=} \tilde{z}_j^k = w \quad \forall j = 0, \dots, k-1. \quad (755)$$

Man müsste noch zeigen, dass es keine weitere Zahl $z \in U_\varepsilon$ gibt mit $f(z) = w$. Dazu: Weil $U_\varepsilon \subset B_r(z_0)$ gilt für beliebiges $z \in U_\varepsilon$

$$f(z) = w \quad \Rightarrow \quad h(z)^k = w \quad (756)$$

$$\Rightarrow \quad h(z) \in \{\tilde{z}_0, \dots, \tilde{z}_{k-1}\} \quad \Rightarrow \quad z \in \{h^{-1}(\tilde{z}_0), \dots, h^{-1}(\tilde{z}_{k-1})\}. \quad (757)$$

Noch \mathbb{Z} . $f(U_\varepsilon) = B_\varepsilon(0)$. Mit der obigen Überlegung haben wir ‘ \supset ’ bereits gezeigt (denn 0 wird bei $z_0 \in U_\varepsilon$ angenommen und jedes andere $w \in B_\varepsilon(0) \setminus \{0\}$ wird gleich k -mal angenommen). Zu ‘ \subset ’: Sei $z \in U_\varepsilon = h^{-1}(B_{\varepsilon^{1/k}}(0))$. Dann gilt $h(z) \in B_{\varepsilon^{1/k}}(0)$. Somit gilt

$$|f(z)| \stackrel{(752)}{=} |(h(z))^k| = |h(z)|^k < (\varepsilon^{\frac{1}{k}})^k = \varepsilon. \quad (758)$$

3.3.6 Gebietstreue und Maximumsprinzip

Als nächstes besprechen wir eine erstaunliche Eigenschaft holomorpher Funktionen, die *Gebietstreue*.

Satz 182. GEBIETSTREUE. Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet (d.h. offen und zusammenhängend) und $f \in \mathcal{H}(D)$ nicht konstant. Dann ist $f(D)$ auch ein Gebiet.

Man beachte: Dieser Satz ist in \mathbb{R} oder für nicht holomorphe Funktionen überhaupt nicht denkbar. In \mathbb{R} zum Beispiel ist $(-2, 2)$ ein Gebiet, jedoch gilt für $f(x) = x^2$, dass $f((-2, 2)) = [0, 4)$ kein Gebiet ist (da nicht offen). Für nicht-holomorphe Funktionen gilt die Aussage auch nicht (vgl. Beispiel 27, wo wir gesehen haben, dass Bilder offener Mengen von nur stetigen Funktionen in \mathbb{C} nicht zwingend offen sein müssen). Umso ersataunlicher ist dass das Resultat für holomorphe Funktionen gilt

Beweis. (von Satz 182). Es sind zwei Dinge zu zeigen: $f(D)$ ist zusammenhängend und $f(D)$ ist offen.

Schritt 1. $f(D)$ ist zusammenhängend. Da D zusammenhängend ist und f stetig ist, ist auch $f(D)$ (nach einem Satz aus der Analysis) zusammenhängend.

Schritt 2. $f(D)$ ist offen. Sei dazu $w_0 \in f(D)$ beliebig, d.h. $w_0 = f(z_0)$ für ein $z_0 \in D$.

Z: es gibt $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(w_0) \subset f(D)$. Dazu definiere $\tilde{f} : D \rightarrow \mathbb{C}$ durch $\tilde{f}(z) := f(z) - w_0$. Dann gilt $\tilde{f}(z_0) = f(z_0) - w_0 = 0$. Beobachtung 175 liefert, dass es eine natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$ gibt mit $\text{ord}(f, z_0) = k$. Der Verzweigungssatz (Korollar 181) liefert nun, dass es eine offene Umgebung $U_\varepsilon \subset D$ von z_0 gibt mit $\tilde{f}(U_\varepsilon) = B_\varepsilon(0)$. Nun gilt

$$f(U_\varepsilon) = \{f(z) : z \in U_\varepsilon\} = \{\tilde{f}(z) + w_0 : z \in U_\varepsilon\} = \{\zeta + w_0 : \zeta \in \tilde{f}(U_\varepsilon)\} \quad (759)$$

$$= \{\zeta + w_0 : \zeta \in B_\varepsilon(0)\} = B_\varepsilon(w_0). \quad (760)$$

Wir folgern also

$$B_\varepsilon(w_0) = f(U_\varepsilon) \subset f(D). \quad (761)$$

Die Behauptung ist gezeigt.

Bemerkung. Für konstante Funktionen stimmt die Aussage nicht. Ist $f \in \mathcal{H}(D)$ konstant, so ist $f(D)$ eine Einpunktmenge und somit nicht offen.

Eine sehr zentrale Konsequenz aus der Gebietstreue ist das *Maximumsprinzip*.

Satz 183. MAXIMUMSPRINZIP. Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in \mathcal{H}(D)$. Zusätzlich gebe es $z_0 \in D$ so, dass

$$|f(z_0)| = \max_{z \in D} |f(z)|. \quad (762)$$

Dann ist f konstant.

Beweis. Es seien $f \in \mathcal{H}(D)$ und $z_0 \in D$ so, dass $|f(z_0)| = \max_{z \in D} |f(z)|$. Angenommen f ist nicht konstant. Wegen dem Satz von der Gebietstreue ist $f(D)$ ein Gebiet, d.h. auch $f(z_0)$ ist ein innerer Punkt von $f(D)$. Daher gibt es $\varepsilon > 0$ so, dass $B_\varepsilon(f(z_0)) \subset f(D)$. Definiere nun $\delta := \frac{\varepsilon}{|f(z_0)|+1} > 0$. Wir behaupten, dass $(1 + \delta)f(z_0) \in f(D)$, denn

$$|(1 + \delta)f(z_0) - f(z_0)| = |\delta f(z_0)| = \delta |f(z_0)| = \varepsilon \frac{|f(z_0)|}{|f(z_0)| + 1} < \varepsilon \quad (763)$$

und somit gilt $(1 + \delta)f(z_0) \in B_\varepsilon(f(z_0)) \subset f(D)$. Wir folgern, dass ein $w \in D$ existiert mit $f(w) = (1 + \delta)f(z_0)$. Daher gilt nach der Voraussetzung (762)

$$|f(z_0)| = \max_{z \in D} |f(z)| \geq |f(w)| = |(1 + \delta)f(z_0)| = (1 + \delta)|f(z_0)|. \quad (764)$$

Da $\delta > 0$ kann diese Ungleichung nur gelten wenn $|f(z_0)| = 0$. Dann ist aber

$$\max_{z \in D} |f(z)| = |f(z_0)| = 0 \quad (765)$$

und somit $f \equiv 0$ auf D . Dann ist also f konstant. Ein Widerspruch.

Mit anderen Worten: Eine nichtkonstante holomorphe Funktion kann auf einem Gebiet D kein Betragsmaximum annehmen. Eine direkte Folgerung ist das *schwache Maximumsprinzip*.

Korollar 184. SCHWACHES MAXIMUMSPRINZIP. Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet und $f \in \mathcal{H}(D) \cap C(\overline{D})$ (d.h. holomorph auf D und stetig auf \overline{D}). Dann gilt

$$\max_{z \in \overline{D}} |f(z)| = \max_{z \in \partial D} |f(z)|. \quad (766)$$

Beweis. Dass $|f|$ auf \overline{D} und ∂D ein Maximum annimmt, liegt daran, dass $|f|$ stetig ist und \overline{D} sowie ∂D kompakt sind. Da $\partial D \subset \overline{D}$ gilt auch sicherlich

$$\max_{z \in \overline{D}} |f(z)| \geq \max_{z \in \partial D} |f(z)|. \quad (767)$$

Wir zeigen nun, dass ‘>’ in der obigen Ungleichung nicht gelten kann. Dazu: Wäre $\max_{z \in \overline{D}} |f(z)| > \max_{z \in \partial D} |f(z)|$ so würde $\max_{z \in \overline{D}} |f(z)|$ zwangsläufig bei einem $z_0 \in D$ angenommen werden. Dann gilt aber

$$|f(z_0)| = \max_{z \in \overline{D}} |f(z)| = \sup_{z \in \overline{D}} |f(z)| \geq \sup_{z \in D} |f(z)| \geq |f(z_0)| \quad (768)$$

Wir folgern aus der Ungleichungskette, dass $|f(z_0)| = \sup_{z \in D} |f(z)|$ und somit wird (da $z_0 \in D$) das nebenstehende Supremum auch in D angenommen. Es ist also ein Maximum! Das bedeutet

$$|f(z_0)| = \max_{z \in D} |f(z)|, \quad (769)$$

woraufhin das Maximumsprinzip (Satz 183) impliziert, dass $f \equiv \text{const}$. Für konstante Funktionen gilt aber stets die Gleichheit in (767). Wir folgen einen Widerspruch (zur Annahme, dass ‘>’ gilt).

Wir sehen immer mehr und mehr, dass holomorphe Funktionen nur eine sehr eingeschränkte *Bewegungsfreiheit* haben. Ein weiteres Beispiel dafür ist das *Schwarz’sche Lemma*.

Korollar 185. SCHWARZ’SCHES LEMMA. Es sei $f \in \mathcal{H}(B_1(0))$ holomorph mit $f(B_1(0)) \subset B_1(0)$ und $f(0) = 0$. Dann gilt $|f(z)| \leq |z|$ für alle $z \in B_1(0)$.

Dies ist erstaunlich: $f(B_1(0)) \subset B_1(0)$ besagt nur $|f(z)| < 1$ für alle $z \in B_1(0)$. In der Realität gilt aber die viel schärfere Abschätzung $|f(z)| \leq |z|$ für alle $z \in B_1(0)$.

Beweis. Die behauptete Ungleichung muss nur für $z \in B_1(0) \setminus \{0\}$ gezeigt werden, denn für $z = 0$ ist sie durch die Voraussetzung $f(0) = 0$ erfüllt. Da $f(0) = 0$ gilt für $g : B_1(0) \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch

$$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z)}{z} & z \neq 0 \\ f'(0) & z = 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{f(z)-f(0)}{z-0} & z \neq 0 \\ f'(0) & z = 0 \end{cases}, \quad (770)$$

dass $g \in \mathcal{H}(B_1(0))$ (vgl. Korollar 161). Nun sei $r \in (0, 1)$. Dann ist $g \in \mathcal{H}(B_r(0)) \cap$

$C(\overline{B_r(0)})$. Nach dem schwachen Maximumsprinzip gilt

$$\max_{w \in \overline{B_r(0)}} |g(w)| = \max_{w \in \partial B_r(0)} |g(w)| = \max_{w \in \partial B_r(0)} \left| \frac{f(w)}{w} \right| = \max_{w \in \partial B_r(0)} \frac{|f(w)|}{|w|} = \frac{1}{r} \max_{w \in \partial B_r(0)} |f(w)| \leq \frac{1}{r}, \quad (771)$$

wobei wir im letzten Schritt benutzt haben, dass $f(B_1(0)) \subset B_1(0)$. Es sei nun $z \in B_1(0) \setminus \{0\}$ beliebig aber fest. Für beliebiges $s \in (|z|, 1)$ gilt dann $z \in \overline{B_s(0)}$ und somit

$$\frac{|f(z)|}{|z|} = \left| \frac{f(z)}{z} \right| = |g(z)| \leq \max_{w \in \overline{B_s(0)}} |g(w)| \stackrel{(771)}{\leq} \frac{1}{s}. \quad (772)$$

Da $s \in (|z|, 1)$ beliebig war, können wir $s \rightarrow 1$ streben lassen und erhalten

$$\frac{|f(z)|}{|z|} \leq 1. \quad (773)$$

Die Behauptung folgt durch Multiplizieren mit $|z|$.

3.4 Umlaufzahl und Homotopie

3.4.1 Grundlagen zur Umlaufzahl

Diese Sektion ist dem rein geometrischen Konzept der *Umlaufzahl* gewidmet. Es hat zunächst nichts mit Funktionentheorie zu tun, sondern ist eine geometrische Möglichkeit, zu quantifizieren, wie oft eine Kurve einen bestimmten Punkt *umläuft*.

Definition 186. UMLAUFZAHL. Es sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ eine geschlossene stückweise C^1 -Kurve. Dann definieren wir die *Umlaufzahl* von γ um den Punkt 0 durch

$$n(\gamma, 0) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz. \quad (774)$$

Ist für ein $p \in \mathbb{C}$ eine Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{p\}$ gegeben, so definieren wir die Umlaufzahl von γ um p durch

$$n(\gamma, p) := n(\gamma - p, 0), \quad (775)$$

wobei $\gamma - p : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gegeben ist durch $t \mapsto \gamma(t) - p$.

Bemerkung 187. Viele Resultate, die wir im Folgenden kennen lernen werden, werden wir nur für $p = 0$ formulieren. Sie übertragen sich aber mit nur wenig Aufwand auf den

allgemeinen Fall $p \in \mathbb{C}$. Man beachte ferner, dass

$$n(\gamma, p) = n(\gamma - p, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-p} \frac{1}{z} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{1}{\gamma(t) - p} \gamma'(t) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z - p} dz, \quad (776)$$

wobei man die letzte Gleichung am besten rückwärts liest.

Es ist zunächst nicht klar, warum die obige Formel für $n(\gamma, 0)$ in irgendeiner Weise signalisieren soll, wie oft γ den Nullpunkt umläuft. Wir können aber schonmal festhalten, dass es sich um eine *geometrische Größe* handelt, d.h. sie ist invariant unter Umparametrisierungen.

Bemerkung 188. Es sei $\tau : [c, d] \rightarrow [a, b]$ stetig, monoton und bijektiv und auf (c, d) stetig diff'bar. Ferner sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ eine stückweise C^1 -Kurve. Dann gilt

$$n(\gamma \circ \tau, 0) = \begin{cases} n(\gamma, 0) & \tau \text{ monoton wachsend} \\ -n(\gamma, 0) & \tau \text{ monoton fallend} \end{cases}. \quad (777)$$

Dies folgt direkt aus Proposition 135.

Eine erste Idee, warum die oben definierte Umlaufzahl angeben könnte, wie oft ein Punkt von einer Kurve umrundet wird, gibt die folgende Beobachtung.

Beobachtung 189. Es folgt aus (514)

$$n(\partial B_r(0)^k, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(0)^k} \frac{1}{z} dz = \frac{1}{2\pi i} (2\pi i k) = k. \quad (778)$$

Wird der Ball $\partial B_r(0)$ also k -mal gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen, so ist die Umlaufzahl stets k . Beachte: Wird $\partial B_r(0)$ hingegen *im Uhrzeigersinn* durchlaufen, so ist die Umlaufzahl nach Bemerkung 188 $-k$ (denn schließlich würde γ_{rev} den Kreis $\partial B_r(0)$ dann gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen).

Für allgemeine Kurven γ ist allerdings nicht einmal klar ob $n(\gamma, 0)$ überhaupt eine ganze Zahl ist. Wenn sie in irgendeiner sinnvollen Weise beschreiben würde, wie oft γ den Nullpunkt umläuft, wäre sie aber sicher ganzzahlig. Dies wollen wir als nächstes klären, über die Existenz eines *Lifts*.

Proposition 190. LIFTUNGSLEMMA. Es sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ eine stückweise C^1 -Kurve. Dann gibt es $r : [a, b] \rightarrow (0, \infty)$ und $\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stückweise C^1 -Kurven in \mathbb{R} mit $r(a) = |\gamma(a)|$, $\theta(a) = \arg(\gamma(a))$ und

$$\gamma(t) = r(t)e^{i\theta(t)} \quad \forall t \in [a, b]. \quad (779)$$

ZUSATZ. Ist γ geschlossen, so gilt $r(b) = r(a)$ und $\theta(b) - \theta(a) = 2\ell\pi$ für ein $\ell \in \mathbb{Z}$.

Beachte: Die Aussage der obigen Proposition folgt nicht direkt aus der Polarkoordinatendarstellung. Zwar könnte man mit der Polarkoordinatendarstellung $\gamma(t)$ an jedem Punkt t wie in (779) darstellen - jedoch wüsste man nicht ob diese Darstellung stetig von t abhängt (und schon gar nicht, ob sie stückweise C^1 von t abhängt). Es ist sogar so, dass in (779) im Allgemeinen *nicht* gilt, dass $\theta(t)$ mit dem Argument von $\gamma(t)$ übereinstimmt.

Beweis. Es sei $a = a_0 < \dots < a_m = b$ eine Unterteilung so, dass für alle $j = 1, \dots, m-1$ die Einschränkung $\gamma|_{(a_{j-1}, a_j)}$ stetig diff'bar ist und die Limites $\gamma'(a_{j-1}+), \gamma'(a_j-)$ existieren. Definiere $\eta : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$\eta(t) := \int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)} ds. \quad (780)$$

Zwischenbehauptung. η ist auf $[a, b]$ stetig und auf $(a, b) \setminus \{a_1, \dots, a_{m-1}\}$ stetig diffbar und man hat

$$\eta'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} \quad \forall t \in (a, b) \setminus \{a_1, \dots, a_{m-1}\}. \quad (781)$$

Insbesondere ist η also auch stückweise C^1 . Den Beweis der Zwischenbehauptung präsentieren wir am Ende dieses Beweises. Nun folgern wir erstmal die Aussage aus der Zwischenbehauptung.

Umgestellt bedeutet (781) für alle $j = 1, \dots, m$

$$\gamma'(t) = \eta'(t)\gamma(t) \quad \forall t \in (a_{j-1}, a_j). \quad (782)$$

Wir folgern aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen, dass es ein $c_j \in \mathbb{C}$ gibt mit

$$\gamma(t) = c_j \exp\left(\int^{a_j} \eta'(s) ds\right) = c_j \exp(d_j + \eta(t)) = c_j \exp(d_j) \exp(\eta(t)) \quad \forall t \in (a_{j-1}, a_j). \quad (783)$$

für ein $d_j \in \mathbb{C}$. Definieren wir $\zeta_j := c_j e^{d_j}$ so erhalten wir

$$\gamma(t) = \zeta_j \exp(\eta(t)) \quad \forall t \in (a_{j-1}, a_j). \quad (784)$$

Wegen der Stetigkeit von γ und $\exp \circ \eta$ gilt die obige Gleichheit auch auf dem abgeschlossenen Intervall. Das heißt

$$\gamma(t) = \zeta_j \exp(\eta(t)) \quad \forall t \in [a_{j-1}, a_j]. \quad (785)$$

Es ergibt sich also

$$\gamma(t)e^{-\eta(t)} = \begin{cases} \zeta_1 & t \in [a_0, a_1] \\ \zeta_2 & t \in [a_1, a_2] \\ \zeta_3 & t \in [a_2, a_3] \\ \vdots & \\ \zeta_m & t \in [a_{m-1}, a_m] \end{cases} . \quad (786)$$

Betrachten wir die Werte bei a_1 , so folgern wir $\zeta_1 = \zeta_2$. Analog kann durch betrachten der Werte bei a_2 gefolgert werden, dass $\zeta_2 = \zeta_3$. Machen wir sukzessive weiter so folgern wir $\zeta_1 = \dots = \zeta_m =: \zeta$. Somit gibt es $\zeta \in \mathbb{C}$ mit

$$\gamma(t)e^{-\eta(t)} = \zeta \quad \forall t \in [a, b]. \quad \Rightarrow \quad \gamma(t) = \zeta e^{\eta(t)} \quad \forall t \in [a, b]. \quad (787)$$

Setzt man $t = a$ in die obige Gleichung ein und verwendet $\eta(a) = 0$ (vgl. (780)) so erhält man $\zeta = \gamma(a)$. Wir stellen nun $\zeta = \gamma(a)$ in Polarkoordinaten dar, d.h. wir bestimmen $r_0 := |\gamma(a)| > 0$ und $\theta_0 := \arg(\gamma(a)) \in (-\pi, \pi]$ so, dass $\zeta = \gamma(a) = r_0 e^{i\theta_0}$. Definiere jetzt für $t \in [a, b]$ beliebig $r(t) := r_0 e^{\operatorname{Re}(\eta(t))} \in (0, \infty)$ und $\theta(t) := \theta_0 + \operatorname{Im}(\eta(t))$. Dann sind r und θ beide stückweise C^1 und es gilt nach (787)

$$\gamma(t) = \zeta e^{\eta(t)} = r_0 e^{i\theta_0} e^{\operatorname{Re}(\eta(t) + i\operatorname{Im}(\eta(t)))} = r_0 e^{\operatorname{Re}(\eta(t))} e^{i(\theta_0 + \operatorname{Im}(\eta(t)))} = r(t) e^{i\theta(t)}. \quad (788)$$

Wir haben also (779) bewiesen. Man beachte: Wegen $\eta(a) = 0$ ist auch $r(a) = r_0 = |\gamma(a)|$ und $\theta(a) = \theta_0 = \arg(\gamma(a))$.

Als nächstes beweisen wir den ‘‘Zusatz’’. Ist $\gamma(a) = \gamma(b)$ so gilt

$$r(b)e^{i\theta(b)} = r(a)e^{i\theta(a)}. \quad (789)$$

Somit gilt

$$r(b) = |r(b)e^{i\theta(b)}| = |r(a)e^{i\theta(a)}| = r(a) \quad (790)$$

Daher gilt schonmal $r(b) = r(a) =: r^*$. Mit dieser Erkenntnis wird (789) zu

$$r^* e^{i\theta(b)} = r^* e^{i\theta(a)} \quad \Rightarrow \quad e^{i\theta(b)} = e^{i\theta(a)}. \quad (791)$$

Wir folgern $i\theta(b) = i\theta(a) + 2k\pi i$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Teilen wir durch i und setzen $\ell := k$ so folgt die Behauptung.

Noch $\mathbf{Z\!Z}$: Die Zwischenbehauptung. Zunächst zu der Stetigkeit von η auf $[a, b]$. Die Ableitung $|\gamma'|$ ist nach Definition 126 stetig auf $[a_0, a_1]$, auf $[a_1, a_2]$, ..., auf $[a_{m-1}, a_m]$ (wenn man an den Randwerten stets die Limites $|\gamma'(a_i \pm)|$ verwendet). Somit ist (wegen der Kompaktheit der Intervalle) $|\gamma'|$ auch beschränkt auf $[a_0, a_1]$, auf $[a_1, a_2]$, ... d.h. für alle $j = 1, \dots, m$ gibt es ein $M_j > 0$ mit $|\gamma'(t)| \leq M_j$ für alle $t \in [a_{j-1}, a_j]$. Mit $M := \max_{j=1, \dots, m} M_j$ folgt

dann, dass $|\gamma'(t)| \leq M$ für alle $t \in (a, b) \setminus \{a_1, \dots, a_{m-1}\}$. Ferner ist $t \mapsto |\gamma(t)|$ stetig auf $[a, b]$. Daher gibt es ein $t_* \in [a, b]$ so, dass

$$\min_{t \in [a, b]} |\gamma(t)| = |\gamma(t_*)| > 0, \quad (792)$$

wobei wir im letzten Schritt benutzt haben, dass $\gamma([a, b]) \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Es sei nun $t_0 \in [a, b]$ beliebig und $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset [a, b]$ eine beliebige Folge mit $t_n \rightarrow t_0$. Dann gilt

$$|\eta(t_n) - \eta(t_0)| = \left| \int_a^{t_n} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt - \int_a^{t_0} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt \right| = \left| \int_{t_0}^{t_n} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt \right| \quad (793)$$

$$\leq \int_{\min\{t_n, t_0\}}^{\max\{t_n, t_0\}} \left| \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} \right| dt = \int_{\min\{t_n, t_0\}}^{\max\{t_n, t_0\}} \frac{|\gamma'(t)|}{|\gamma(t)|} dt \quad (794)$$

$$\stackrel{(792)}{\leq} \int_{\min\{t_n, t_0\}}^{\max\{t_n, t_0\}} \frac{M}{|\gamma(t_*)|} dt = \frac{M}{|\gamma(t_*)|} |t_n - t_0| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \quad (795)$$

Wir folgern die Stetigkeit von η bei t_0 . Ferner ist η auf (a_{i-1}, a_i) stetig diffbar wegen dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und weil γ' auf (a_{i-1}, a_i) stetig ist.

Definition 191. LIFT. Es sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ eine stückweise C^1 -Kurve. Wir nennen ein Paar (r, θ) einen Lift von γ , falls

- $r : [a, b] \rightarrow (0, \infty)$ sowie $\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sind stückweise C^1 ,
- $\gamma(t) = r(t)e^{i\theta(t)} \quad \forall t \in [a, b]$,
- $r(a) = |\gamma(a)|, \theta(a) = \arg(\gamma(a))$.

Die Funktion $r : [a, b] \rightarrow (0, \infty)$ nennen wir eine *Radialfunktion* und $\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ nennen wir *Polarwinkelfunktion*.

Proposition 190 zeigt, dass es ein solcher Lift stets existiert. Dass der Lift auch durch die Eigenschaften in Definition 191 eindeutig bestimmt ist werden wir in den Übungen diskutieren. Diese Eindeutigkeit werden wir an dieser Stelle nicht vertiefen, weil wir sie für unsere Argumente nicht benötigen.

Bemerkung 192. Kopiert man den Beweis des ‘‘Zusatzes’’ von Proposition 190 (vgl. 789 bis (791) und Text danach), so sieht man, dass für jeden Lift einer *geschlossenen* stückweise C^1 -Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ stets gelten muss, dass

$$r(b) = r(a) \quad \text{und} \quad \theta(b) - \theta(a) = 2k\pi \quad (\text{für ein } k \in \mathbb{Z}). \quad (796)$$

Wir benutzen nun den Lift um die *Ganzzahligkeit* der Umlaufzahl zu zeigen.

Proposition 193. GANZZAHLIGKEIT DER UMLAUFZAHL. Es sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ geschlossen und stückweise C^1 . Dann ist $n(\gamma, 0) \in \mathbb{Z}$. Konkreter: Ist (r, θ) wie in Definition 191 ein Lift von γ , so gilt

$$n(\gamma, 0) = \frac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi} \in \mathbb{Z} \quad (797)$$

Beweis. Es gilt für alle $t \in [a, b]$

$$\gamma(t) = r(t)e^{i\theta(t)}, \quad (798)$$

wobei r, θ stückweise C^1 Funktionen sind und $r(b) = r(a)$ sowie $\theta(b) = \theta(a) + 2\ell\pi$ für ein $\ell \in \mathbb{Z}$. Da r, θ stückweise stetig differenzierbar sind, gilt auch für alle bis auf endlich viele $t \in [a, b]$

$$\gamma'(t) = r'(t)e^{i\theta(t)} + r(t)i\theta'(t)e^{i\theta(t)} = (r'(t) + ir(t)\theta'(t))e^{i\theta(t)}. \quad (799)$$

Wir folgern

$$n(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{(r'(t) + ir(t)\theta'(t))e^{i\theta(t)}}{r(t)e^{i\theta(t)}} dt \quad (800)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{r'(t) + ir(t)\theta'(t)}{r(t)} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \left(\frac{r'(t)}{r(t)} + i\theta'(t) \right) dt \quad (801)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \left(\frac{d}{dt} \log(r(t)) + i\theta'(t) \right) dt = \frac{1}{2\pi i} \left[\log(r(t)) + i\theta(t) \right]_{t=a}^{t=b} \quad (802)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \left(\log r(b) + i\theta(b) - (\log(r(a)) + i\theta(a)) \right) \stackrel{r(b)=r(a)}{=} \frac{1}{2\pi i} (i\theta(b) - i\theta(a)) \quad (803)$$

$$= \frac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi}. \quad (804)$$

Dies ist ganzzahlig, denn wie oben beobachtet gilt $\theta(b) - \theta(a) = 2\ell\pi$ für ein $\ell \in \mathbb{Z}$ und somit

$$n(\gamma, 0) = \frac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi} = \frac{2\ell\pi}{2\pi} = \ell \in \mathbb{Z}. \quad (805)$$

Die Umlaufzahl ist also stets ganzzahlig. Das erklärt aber noch lange nicht warum die Umlaufzahl das ist was wir erwarten. Wir werden die geometrische Anschauung der Umlaufzahl nun so erklären: Hat eine Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ die Umlaufzahl $n(\gamma, 0) = k$, so kann sie innerhalb von $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ stetig deformiert werden so, dass sie (bis auf Umparametrisierung) mit der Kurve in der Definition von $\partial B_r(0)^k$ übereinstimmt (vgl. Definition 131). Wir klären dafür zunächst was eine *stetige Deformation* bedeutet.

Definition 194. HOMOTOPIE. Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \rightarrow D$ zwei geschlossene stückweise C^1 -Kurven in D . Eine stetige Abbildung $h : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow D$ heißt *Homotopie zwischen γ_0 und γ_1 innerhalb von D* , falls

1. $h(0, t) = \gamma_0(t)$ und $h(1, t) = \gamma_1(t)$ für alle $t \in [a, b]$.
2. $h(s, b) = h(s, a)$ für alle $s \in [0, 1]$.

[Insbesondere ist also für alle $s \in (0, 1)$ die Kurve $\gamma_s : [a, b] \rightarrow D$, $\gamma_s(t) := h(s, t)$ nach Punkt 2 eine geschlossene Kurve. Außerdem hängt $s \mapsto \gamma_s(t)$ stetig von s ab].

Eine Homotopie heißt C^1 -Homotopie, falls es eine Unterteilung gibt $a = a_0 < \dots < a_m = b$ gibt so, dass für alle $s \in [0, 1]$ die Kurve γ_s auf (a_j, a_{j-1}) stetig diff'bar ist, die Grenzwerte $\gamma'_s(a_{j-1}+), \gamma'_s(a_j-)$ existieren und die Abbildungen

$$\psi_j : [0, 1] \times [a_{j-1}, a_j] \ni (s, t) \mapsto \begin{cases} \gamma'_s(t) & t \in (a_{j-1}, a_j) \\ \gamma'_s(a_{j-1}+) & t = a_{j-1} \\ \gamma'_s(a_j-) & t = a_j \end{cases} \quad (806)$$

allesamt stetig sind. [Insbesondere ist dann also auch γ_s eine stückweise C^1 -Kurve]

Wir nennen zwei geschlossene stückweise C^1 Kurven $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \rightarrow D$ [C^1 -]homotop innerhalb von D , falls es eine [C^1 -]Homotopie zwischen γ_0 und γ_1 innerhalb von D gibt.

Eine Kurve γ_0 heißt [C^1 -]nullhomotop in D , falls γ_0 innerhalb von D [C^1 -]homotop zu einer konstanten Kurve ist.

Mit anderen Worten: Eine Homotopie *verbindet* die Kurven γ_0 und γ_1 auf stetige Weise innerhalb von D .

Beispiel 195.

- (i) Ist D zusammenhängend, so sind alle konstanten Kurven zueinander homotop. In der Tat: Es seien $p, q \in D$ und $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \rightarrow D$ definiert durch $\gamma_0(t) = p$ und $\gamma_1(t) = q$ für alle $t \in [a, b]$. Sei nun $c : [0, 1] \rightarrow D$ eine stetige Kurve in D so, dass $c(0) = p$ und $c(1) = q$. (Beachte: eine solche Kurve gibt es weil D zusammenhängend ist. Wir verweisen hier auf die Analysis). Definiere dann $h : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow D$ durch $h(s, t) := c(s)$. Dann gilt für alle $t \in [a, b]$

$$h(0, t) = c(0) = p = \gamma_0(t), \quad (807)$$

$$h(1, t) = c(1) = q = \gamma_1(t). \quad (808)$$

Homotopieaxiom "2." ist auch leicht nachzuprüfen.

- (ii) Die Kurve $\gamma_0(t) := e^{it}$, ($t \in [0, 2\pi]$) ist in $D = \mathbb{C}$ nullhomotop. Betrachte dazu die Homotopie $h : [0, 1] \times [0, 2\pi] \rightarrow D$ gegeben durch $h(s, t) := (1 - s)e^{it}$. Auf diese Weise ist in $D = \mathbb{C}$ eigentlich jede Kurve nullhomotop.
- (iii) Bei $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und γ_0 wie in (ii) ist die Lage komplizierter: Wir werden sehen, dass γ_0 in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ nicht C^1 -nullhomotop ist. Ob zwei Kurven homotop sind hängt also sehr stark von dem gewählten Gebiet D ab.

Homotop zu sein definiert eine *Äquivalenzrelation* in dem folgenden Sinne:

Proposition 196. Es seien $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \rightarrow D$ geschlossene stückweise C^1 -Kurven. Dann gilt

- (i) γ_0 ist homotop zu γ_0 innerhalb von D .
- (ii) Ist γ_0 homotop zu γ_1 innerhalb von D , so ist γ_1 auch homotop zu γ_0 innerhalb von D .
- (iii) Ist γ_0 homotop zu γ_1 und γ_1 homotop zu γ_2 (innerhalb von D) so ist auch γ_0 homotop zu γ_2 (innerhalb von D).

ZUSATZ. Dieselben Aussagen gelten auch, wenn man “homotop” durch “ C^1 -homotop” ersetzt.

Beweis. Zu (i). Die Abbildung $h : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow D$ gegeben durch $h(s, t) := \gamma_0(t)$ definiert eine Homotopie zwischen γ_0 und γ_0 innerhalb von D .

Zu (ii). Es sei $h : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow D$ eine Homotopie zwischen γ_0 und γ_1 innerhalb von D . Dann ist $\tilde{h} : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow D$ gegeben durch

$$\tilde{h}(s, t) := h(1 - s, t) \quad (809)$$

eine Homotopie zwischen γ_1 und γ_0 . In der Tat: \tilde{h} ist als Verkettung stetiger Abbildungen stetig und außerdem gilt für alle $t \in [a, b]$

$$\tilde{h}(0, t) = h(1 - 0, t) = h(1, t) = \gamma_1(t). \quad (810)$$

sowie

$$\tilde{h}(1, t) = h(1 - 1, t) = h(0, t) = \gamma_0(t). \quad (811)$$

Das zeigt Eigenschaft “1.” einer Homotopie (vgl. Definition 194). Nun noch zu Eigenschaft “2.” Für alle $s \in [0, 1]$ gilt $1 - s \in [0, 1]$. Da h das Homotopieaxiom “2.” bereits erfüllt, haben wir

$$\tilde{h}(s, b) = h(1 - s, b) = h(1 - s, a) = \tilde{h}(s, a). \quad (812)$$

Zu (iii). Es sei $h^{0,1} : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow D$ eine Homotopie zwischen γ_0 und γ_1 sowie $h^{1,2} : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow D$ eine Homotopie zwischen γ_1 und γ_2 . Wir behaupten: Dann definiert $h : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow D$ gegeben durch

$$h(s, t) := \begin{cases} h^{0,1}(2s, t) & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ h^{1,2}(2s - 1, t) & s \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \quad (813)$$

eine Homotopie zwischen γ_0 und γ_2 innerhalb von D . Die Details überlassen wir den Lesenden an der Stelle als Übungsaufgabe.

Es stellt sich heraus, dass die Umlaufzahl invariant unter Homotopien ist.

Proposition 197. HOMOTOPIEINVARIANZ DER UMLAUFZAHL. Es seien γ_0 und γ_1 C^1 -homotop innerhalb von $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dann ist $n(\gamma_0, 0) = n(\gamma_1, 0)$.

Beweis. Es sei $h : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ eine C^1 -Homotopie zwischen γ_0 und γ_1 innerhalb von $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Definiere für $s \in [0, 1]$ $\gamma_s : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ durch $\gamma_s(t) := h(s, t)$. Definiere nun $\mu : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\mu(s) := n(\gamma_s, 0). \quad (814)$$

Nach Proposition 193 gilt $\mu(s) \in \mathbb{Z}$ für alle $s \in [0, 1]$.

Behauptung 1. μ ist stetig auf $[0, 1]$. Dazu benutzen wir, dass nach Definition der Umlaufzahl

$$\mu(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_s} \frac{1}{z} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\gamma'_s(t)}{\gamma_s(t)} dt \quad \forall s \in [0, 1]. \quad (815)$$

Beachte: Ist $a = a_0 < \dots < a_m = b$ eine Unterteilung wie in Definition 194. Man hat dann mit der vorigen Gleichung

$$\mu(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\gamma'_s(t)}{\gamma_s(t)} dt = \sum_{j=1}^m \frac{1}{2\pi i} \int_{a_{j-1}}^{a_j} \frac{\gamma'_s(t)}{\gamma_s(t)} dt \quad \forall s \in [0, 1]. \quad (816)$$

Es sei nun $s_0 \in [0, 1]$ und $s_n \rightarrow s_0$ eine Folge. **ZZ:** $\mu(s_n) \rightarrow \mu(s_0)$. Dazu: Sei ψ_j wie in (806). Dann gilt

$$\int_{a_{j-1}}^{a_j} \frac{\gamma'_s(t)}{\gamma_s(t)} dt = \int_{a_{j-1}}^{a_j} \frac{\psi_j(s, t)}{h(s, t)} dt \quad \forall s \in [0, 1]. \quad (817)$$

Die Funktion $\frac{\psi_j}{h}$ ist (als Verkettung stetige Funktionen, und weil $h(s, t) \neq 0$ für alle s, t) stetig auf $[0, 1] \times [a_{j-1}, a_j]$. Somit gibt es $M_j > 0$ so, dass $\frac{|\psi_j(s, t)|}{|h(s, t)|} \leq M_j$ für alle $(s, t) \in [0, 1] \times [a_{j-1}, a_j]$. Benutzen wir M_j als integrierbare Majorante so folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{a_{j-1}}^{a_j} \frac{\gamma'_{s_n}(t)}{\gamma_{s_n}(t)} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{a_{j-1}}^{a_j} \frac{\psi_j(s_n, t)}{h(s_n, t)} dt = \int_{a_{j-1}}^{a_j} \frac{\psi_j(s_0, t)}{h(s_0, t)} dt = \int_{a_{j-1}}^{a_j} \frac{\gamma'_{s_0}(t)}{\gamma_{s_0}(t)} dt. \quad (818)$$

Summiert man über alle $j = 1, \dots, m$ so folgt mit (816)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(s_n) = \mu(s_0). \quad (819)$$

Die Stetigkeit ist bewiesen.

Behauptung 2. μ ist konstant auf $[0, 1]$. Dies ist bereits sehr überzeugend: denn μ ist eine stetige Funktion die nur ganzzahlige Werte annimmt (siehe Definition von μ , vgl. Proposition 193). Dass μ einen Sprung zwischen zwei verschiedenen ganzen Zahlen machen könnte wäre wegen der Stetigkeit absurd. Um das genau zu sehen definieren wir

$$S := \sup\{s \in [0, 1] : \mu(r) = \mu(0) \text{ für alle } r \in [0, s]\} \quad (820)$$

Angenommen $S < 1$. Beachte: Wegen der Stetigkeit gilt $\mu(S) = \mu(0) \in \mathbb{Z}$. Wegen der Stetigkeit gibt es außerdem ein $\delta \in (0, 1 - S)$ so, dass für alle $\sigma \in [0, 1]$ mit $|S - \sigma| < \delta$ gilt, dass $|\mu(S) - \mu(\sigma)| < \frac{1}{2}$. Insbesondere gilt für alle $\sigma \in [S, S + \delta)$

$$|\mu(\sigma) - \mu(0)| = |\mu(\sigma) - \mu(S)| < \frac{1}{2}, \quad (821)$$

d.h. $\mu(\sigma) \in (\mu(0) - \frac{1}{2}, \mu(0) + \frac{1}{2})$. Nun ist aber auch $\mu(\sigma)$ auch eine ganze Zahl. Allerdings ist die einzige ganze Zahl in $(\mu(0) - \frac{1}{2}, \mu(0) + \frac{1}{2})$ doch $\mu(0)$! Wir folgern

$$\mu(\sigma) = \mu(0) \quad \forall \sigma \in [S, S + \delta). \quad (822)$$

Beachte aber auch, dass wegen der Wahl von S gilt $\mu|_{[0, S]} \equiv \mu(0)$. Dieser Fakt und (822) implizieren, dass $\mu(r) = \mu(0)$ nun z.B. auch für alle $r \in [0, S + \frac{\delta}{2}]$ gilt. Daher nimmst $S = \frac{\delta}{2}$ auch an der Supremumbildung in (820) teil. Dies ist ein Widerspruch dazu, dass S eine obere Schranke der Menge in (820) sein muss. Es folgt $S = 1$ und somit ist μ konstant. Wir folgern mit (814)

$$n(\gamma_0, 0) = \mu(0) = \mu(1) = n(\gamma_1, 0). \quad (823)$$

Beispiel 198. In Beispiel 195 (iii) wurde behauptet, dass $\gamma_0(t) := e^{it}$, ($t \in [0, 2\pi]$) innerhalb von $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ nicht C^1 -nullhomotop ist. Dies können wir jetzt beweisen. Angenommen γ_0 wäre C^1 -nullhomotop, d.h. es gäbe eine konstante Kurve $\gamma_1 : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\gamma_1(t) \equiv p$ für ein $p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ so, dass γ_0 und γ_1 C^1 -homotop sind. Dann ist nach der vorigen Proposition $n(\gamma_0, 0) = n(\gamma_1, 0)$. Jedoch gilt

$$n(\gamma_0, 0) = n(\partial B_1(0), 0) \stackrel{\text{Beobachtung 189}}{=} 1 \quad (824)$$

aber

$$n(\gamma_1, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{1}{z} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{\gamma_1'(t)}{\gamma_1(t)} dt \stackrel{\gamma_1 \equiv p}{=} 0 \neq 1 = n(\gamma_0, 0). \quad (825)$$

Ein Widerspruch.

Wir zeigen nun, dass jede geschlossene stückweise C^1 -Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ C^1 -homotop ist zu einer Kurve, die lediglich den Einheitskreis durchläuft. Wie oft der Einheitskreis durchlaufen wird, wird gerade angegeben durch $n(\gamma, 0)$. Dies rechtfertigt schließlich unsere Anschauung, dass $n(\gamma, 0)$ angibt, wie oft eine Kurve den Einheitskreis durchläuft.

Proposition 199. Es sei $\gamma_0 : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ eine Kurve, $r_1 > 0$ beliebig und $k \in \mathbb{Z}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent

(a) $n(\gamma_0, 0) = k$,

(b) Die Kurve γ_0 ist innerhalb von $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ C^1 -homotop zu einer Kurve der Form

$$\gamma_1(t) = r_1 e^{i\theta(t)} \quad t \in [a, b], \quad (826)$$

wobei $\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stückweise C^1 mit $\theta(a) \in (-\pi, \pi]$ und $\theta(b) - \theta(a) = 2k\pi$.

Beweis. Zu ‘(a) \Rightarrow (b)’. Sei $k = n(\gamma_0, 0)$. Sei ferner (r, θ) ein Lift von γ_0 , d.h. $r : [a, b] \rightarrow (0, \infty)$ und $\theta : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ stückweise C^1 so, dass $r(a) = |\gamma(a)|$, $\theta(a) = \arg(\gamma(a)) \in (-\pi, \pi]$ und

$$\gamma_0(t) = r(t)e^{i\theta(t)} \quad \forall t \in [a, b]. \quad (827)$$

Beachte: $r(a) = r(b)$ und $k = n(\gamma_0, 0) = \frac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi}$ (vgl. Proposition 190 und Proposition 193). Definiere nun $h : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$h(s, t) := (sr_1 + (1 - s)r(t))e^{i\theta(t)}. \quad (828)$$

Wir behaupten, dass h eine C^1 -Homotopie zwischen γ_0 und γ_1 innerhalb von $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist. Dazu: Zuerst ist nachzuprüfen, dass $h([0, 1] \times [a, b]) \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Hierzu beachte

$$|h(s, t)| = |(sr_1 + (1 - s)r(t))e^{i\theta(t)}| = |sr_1 + (1 - s)r(t)| = sr_1 + (1 - s)r(t) > 0, \quad (829)$$

da $r(t), r_1 > 0$. Nun prüfen wir die Homotopieaxiome nach. Zu “1.”:

$$h(0, t) = r(t)e^{i\theta(t)} \stackrel{(827)}{=} \gamma_0(t), \quad (830)$$

$$h(1, t) = r_1 e^{i\theta(t)} = \gamma_1(t). \quad (831)$$

Zu “2.”: Mit der $e^{2k\pi i} = 1$, $r(b) = r(a)$ und $\theta(b) = \theta(a) + 2k\pi$ folgt für alle $s \in [0, 1]$

$$h(s, b) = (sr_1 + (1 - s)r(b))e^{i\theta(b)} = (sr_1 + (1 - s)r(a))e^{i(\theta(a) + 2k\pi)} \quad (832)$$

$$= (sr_1 + (1 - s)r(a))e^{i\theta(a) + 2k\pi i} = (sr_1 + (1 - s)r(a))e^{i\theta(a)} = h(s, a). \quad (833)$$

Es ist noch zu zeigen, dass h eine C^1 -Homotopie ist, Dazu: Sei $a = a_0 < a_1 < \dots < a_m = b$ eine Unterteilung so, dass r, θ auf (a_{j-1}, a_j) stetig diffbar sind und die Ableitungen von r, θ Grenzwerte für $t \rightarrow a_{j-1}+$ und $t \rightarrow a_j-$ besitzen. Dann gilt für $s \in [0, 1]$ und $t \in (a_{j-1}, a_j)$, $j = 1, \dots, m$

$$\partial_t h(s, t) = (-sr'(t))e^{i\theta(t)} + (sr_1 + (1 - s)r(t))i\theta'(t)e^{i\theta(t)}. \quad (834)$$

Man prüft damit leicht nach, dass für $j = 1, \dots, m$, $\psi_j : [0, 1] \times [a_{j-1}, a_j]$ wie in Definition

194 gegeben ist durch

$$\psi_j(s, t) = \begin{cases} (-sr'(t))e^{i\theta(t)} + (sr_1 + (1-s)r(t))i\theta'(t)e^{i\theta(t)} & t \in (a_{j-1}, a_j) \\ (-sr'(a_{j-1+}))e^{i\theta(a_{j-1})} + (sr_1 + (1-s)r(a_{j-1}))i\theta'(a_{j-1+})e^{i\theta(a_{j-1})} & t = a_{j-1} \\ (-sr'(a_{j-}))e^{i\theta(a_j)} + (sr_1 + (1-s)r(a_j))i\theta'(a_{j-})e^{i\theta(a_j)} & t = a_j \end{cases} \quad (835)$$

Dieser Ausdruck ist stetig in beiden Variablen! Somit ist gezeigt, dass h auch eine C^1 -Homotopie ist.

Zu '(b) \Rightarrow (a)'. Es sei γ_0 homotop zu einer Kurve γ_1 der Form wie in (826), d.h. $\gamma(t) = r_1 e^{i\theta(t)}$ für eine stückweise C^1 -Funktion $\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\theta(b) - \theta(a) = 2k\pi$. Dann ist $n(\gamma_0, 0) = n(\gamma_1, 0)$. Nun lässt sich $n(\gamma_1, 0)$ ganz einfach dadurch bestimmen, dass (r_1, θ) nach Definition 191 ein Lift von γ_1 ist. Proposition 193 impliziert dann $n(\gamma_1, 0) = \frac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi} = k$. Es folgt $n(\gamma_0, 0) = n(\gamma_1, 0) = k$.

Unsere Erkenntnisse wollen wir zum Abschluss anwenden um unsere unbewiesene "Altlast" Lemma 149 (viii) zu beweisen.

Beispiel 200. Für $w \in B_1(0)$ definiere die Möbiustransformation $T_w(z) := \frac{z-w}{1-z\bar{w}}$. Sei zusätzlich $a \in B_1(0)$ und $k \in \mathbb{Z}$ so, dass $\gamma(t) := a + re^{ikt}$, ($t \in [0, 2\pi]$) erfüllt, dass $\gamma([0, 2\pi]) \subset B_1(0)$.

BEHAUPTUNG. $k = n(\gamma, a) = n(T_w \circ \gamma, T_w(a))$.

BEGRÜNDUNG. Dass $k = n(\gamma, a) [= n(\gamma - a, 0)]$ folgt sofort aus der Formel in Proposition 193 (mit $\theta(t) = kt$, $t \in [0, 2\pi]$). Interessanter ist, warum $n(\gamma, a) = n(T_w \circ \gamma, T_w(a))$.

$$n(\gamma, a) = n(\gamma - a, 0), \quad \text{und} \quad n(T_w \circ \gamma, T_w(a)) = n(T_w \circ \gamma - T_w(a), 0). \quad (836)$$

Wir werden nun zeigen, dass $\gamma_0 := \gamma - a$ und $\gamma_1 := T \circ \gamma - T(a)$ C^1 -homotop sind. Betrachte dazu $h : [0, 1] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$h(s, t) := T_{sw}(\gamma(t)) - T_{sw}(a) \quad (\text{mit der Möbiustransformation } T_{sw}(z) := \frac{z-sw}{1-z\bar{sw}}) \quad (837)$$

Diese verbindet $h(0, t) = \gamma(t) - a = \gamma_0(t)$ und $h(1, t) = T_w(\gamma(t)) - T_w(a) = \gamma_1(t)$. h ist stetig da für alle $\tilde{w} \in B_1(0)$ gilt $T_{\tilde{w}} \in \mathcal{H}(B_1(0))$ und außerdem hängt $s \mapsto sw$ stetig von s ab. Es ist zunächst wichtig zu zeigen, dass h sich innerhalb von $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ bewegt, d.h. $h(s, t) \neq 0$ für alle $(s, t) \in [0, 1] \times [0, 2\pi]$. Da für alle $s \in [0, 1]$ die Abbildung $T_{sw}(z)$ eine Möbiustransformation definiert, ist T_{sw} auch bijektiv. Damit impliziert $\gamma(t) \neq a$ für alle $t \in [0, 2\pi]$, dass $T_{sw}(\gamma(t)) \neq T_{sw}(a)$ für alle $s \in [0, 1]$ und $t \in [0, 2\pi]$ und somit $h(s, t) = T_{sw}(\gamma(t)) - T_{sw}(a) \neq 0$. Dass h eine C^1 -Homotopie ist liegt daran, dass für alle $s \in [0, 1]$ und $T_{sw} \in \mathcal{H}(B_1(0))$, vergleiche Lemma 149. Die Details überlassen wir hier den Lesenden als Übungsaufgabe.

Bemerkung 201. Das vorige Beispiel beweist auch Lemma 149 (viii). Betrachte dazu den Spezialfall $k = 1$, d.h. γ umläuft $C = \partial B_r(a)$ einmal gegen den Uhrzeigersinn (vgl. Beobachtung 189). Auch ist wegen der Kreistreue (Korollar 92) $T_w(C)$ ein Kreis (parametrisiert von $T_w \circ \gamma$) und wegen dem vorigen Beispiel gilt $n(T_w \circ \gamma, T_w(a)) = 1$. Das bedeutet (wieder mit Beobachtung 189), dass $T_w \circ \gamma$ im Uhrzeigersinn durchlaufen werden muss. (Man beachte: $T_w(a)$ ist zwar nicht wie in Beobachtung 189 gefordert der Mittelpunkt von $T_w(C)$, aber dies spielt wegen Übungsaufgabe 1 auf Blatt 11 keine Rolle.)

3.4.2 Umlaufzahlversion der Cauchy'schen Integralformel

Wir sind nun bereit für die *Umlaufzahlversion* der Cauchy'schen Integralformel, d.h. eine verallgemeinerte Cauchy-Integralformel die für allgemeine Wege gültig ist.

Satz 202. CAUCHY-INTEGRALFORMEL – VERSION II (UMLAUFAHLVERSION). Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Elementargebiet und $f \in \mathcal{H}(D)$. Ferner sei $w \in D$ und $\gamma : [a, b] \rightarrow D \setminus \{w\}$ eine geschlossene stückweise C^1 -Kurve. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-w} dz = f(w)n(\gamma, w). \quad (\text{CIF2})$$

Beweis. Nach Korollar 161 ist die Funktion $g : D \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch

$$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z)-f(w)}{z-w} & z \in D \setminus \{w\} \\ f'(w) & z = w \end{cases} \quad (838)$$

eine holomorphe Funktion. Wir folgern mit dem Cauchy'schen Integralsatz für Elementargebiete, dass

$$0 = \int_{\gamma} g(z) dz. \quad (839)$$

Nun gilt wegen der Definition von g

$$0 = \int_{\gamma} \frac{f(z) - f(w)}{z-w} dz = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-w} dz - \int_{\gamma} \frac{f(w)}{z-w} dz = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-w} dz - f(w) \int_{\gamma} \frac{1}{z-w} dz \quad (840)$$

$$= \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-w} dz - f(w)(2\pi i n(\gamma, w)), \quad (841)$$

wobei wir im letzten Schritt Bemerkung 187 verwendet haben. Wir folgern

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-w} dz = 2\pi i f(w)n(\gamma, w) \quad (842)$$

und somit die Behauptung.

Wie schon in der Beobachtung von Goursat (Korollar 159) gesehen, können wir nicht nur die Funktionswerte, sondern auch die Ableitungen durch ein Integral über die Funktionswerte darstellen.

Korollar 203. GOURSAT'S BEOBACHTUNG – VERSION II (UMLAUFZAHLVERSION). Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Elementargebiet und $f \in \mathcal{H}(D)$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}} dz = f^{(n)}(w)n(\gamma, w). \quad (843)$$

Beweisskizze. Nach der Cauchy-Integralformel in Umlaufzahlversion gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-w} dz = f(w)n(\gamma, w). \quad (844)$$

Leitet man die linke Seite nun n -mal ab so ergibt sich $\frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}} dz$. Eigentlich müsste man hierbei begründen, warum man Ableitung und Kurvenintegral vertauschen darf. Dies führen wir an der Stelle nicht vor und verweisen auf die Technik im Beweis von Satz 154. Wir folgern

$$\frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}} dz = \partial_w^n [f(w)n(\gamma, w)]. \quad (845)$$

Nun muss man mit der den Term auf der rechten Seite ableiten. Übungsaufgabe 1 auf Blatt 11 zeigt nun, dass $\zeta \mapsto n(\gamma, \zeta)$ stets auf einer offenen Obermenge von w konstant ist. Somit kann $n(\gamma, w)$ beim Ableiten als Konstante betrachtet werden und es folgt

$$\frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}} dz = f^{(n)}(w)n(\gamma, w). \quad (846)$$

Diese Integralformeln können sehr gut benutzt werden um *reelle uneigentliche Integrale* zu berechnen. Dies wollen wir zum Abschluss dieses Abschnittes besprechen.

Definition 204. CAUCHY'SCHER HAUPTWERT. Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Dann heißt (sofern er existiert) der Grenzwert

$$p.v. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx := \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx \quad (847)$$

der *Cauchy'sche Hauptwert* von f .

Bemerkung 205. Ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ integrierbar, so existiert klarerweise der Cauchy'sche Hauptwert und stimmt mit $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx$ überein. Dies folgt direkt aus dem Satz über die majorisierte Konvergenz, angewendet auf $f_R := f\chi_{[-R,R]}$.

Damit der Cauchy'sche Hauptwert existiert, muss eine Funktion aber nicht zwangsläufig auf \mathbb{R} integrierbar sein. So zum Beispiel besitzt $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto x$ einen Cauchy'schen Hauptwert, denn

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R x dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-R}^R = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{R^2}{2} - \frac{(-R)^2}{2} \right) = \lim_{R \rightarrow \infty} 0 = 0. \quad (848)$$

Beispiel 206. Wir bestimmen

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^4} dx \left[= p.v. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx \right]. \quad (849)$$

Definiere dazu für $R > 0$ die Kurven

$$\gamma_1^R(t) := t \quad (t \in [-R, R]) \quad (850)$$

und

$$\gamma_2^R(t) := Re^{it} \quad (t \in [0, \pi]). \quad (851)$$

Nun ist $\gamma^R := \gamma_1^R \oplus \gamma_2^R$ eine geschlossene Kurve (nämlich ein Halbkreis mit Radius R).

Schritt 1. Berechne

$$\int_{\gamma^R} \frac{1}{1+z^4} dz. \quad (852)$$

Dazu: Beachte, dass $1+z^4=0$ genau dann wenn $z^4=-1=e^{i\pi}$. Dies hat die Lösungen $z_k = e^{i\frac{\pi}{4} + i\frac{2k\pi}{4}}$ ($k=0,1,2,3$), d.h. $z_0 = e^{\frac{\pi i}{4}}$, $z_1 = e^{\frac{3\pi i}{4}}$, $z_2 = e^{\frac{5\pi i}{4}}$ und $z_3 = e^{\frac{7\pi i}{4}}$ (**). Somit gilt

$$\frac{1}{1+z^4} = \frac{1}{(z-z_0) \cdot \dots \cdot (z-z_3)}. \quad (853)$$

Damit wir in (852) die Cauchy'sche Integralformel anwenden können, müssen wir ein Elementargebiet D finden welches $\gamma^R([0, 2\pi])$ enthält. Dazu wähle

$$D := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) \geq -\frac{1}{2\sqrt{2}}\}. \quad (854)$$

Diese Halbebene ist sicherlich sternförmig, also ein Elementargebiet. Beachte, dass $z_0, z_1 \in D$ und $z_2, z_3 \notin D$, denn

$$\operatorname{Im}(e^{i\frac{\pi}{4} + i\frac{2k\pi}{4}}) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & k=0,1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & k=2,3. \end{cases} \quad (855)$$

Somit ist $f(z) := \frac{1}{(z-z_2)(z-z_3)}$ holomorph auf D und es gilt

$$\frac{1}{1+z^4} = \frac{f(z)}{(z-z_0)(z-z_1)}. \quad (856)$$

Nun gilt für alle $R > 1$

$$\int_{\gamma^R} \frac{f(z)}{(z-z_0)(z-z_1)} dz \stackrel{\text{Partialbruchzerlegung}}{=} \int_{\gamma^R} f(z) \frac{1}{z_0-z_1} \left(\frac{1}{z-z_0} - \frac{1}{z-z_1} \right) dz \quad (857)$$

$$= \frac{1}{z_0-z_1} \left(\int_{\gamma^R} \frac{f(z)}{z-z_0} dz - \int_{\gamma^R} \frac{f(z)}{z-z_1} dz \right) \quad (858)$$

$$\stackrel{\text{(CIF2)}}{=} \frac{1}{z_0-z_1} (2\pi i f(z_0) n(\gamma^R, z_0) - 2\pi i f(z_1) n(\gamma^R, z_1)) \quad (859)$$

$$= 2\pi i \frac{f(z_0) - f(z_1)}{z_0 - z_1}, \quad (860)$$

wobei wir in der letzten Gleichung benutzt haben, dass $n(\gamma^R, z_0) = n(\gamma^R, z_1) = 1$ für alle $R > 1$. Mit (856) und (860) folgt

$$\int_{\gamma^R} \frac{1}{1+z^4} dz = 2\pi i \frac{f(z_0) - f(z_1)}{z_0 - z_1}. \quad (861)$$

Schritt 2. Verstehe den Zusammenhang zwischen $\int_{\gamma^R} \frac{1}{1+z^4} dz$ und $\int_{-R}^R \frac{1}{1+x^4} dx$. Dazu beachte, dass wegen der Definition von γ_R

$$\int_{\gamma^R} \frac{1}{1+z^4} dz = \int_{\gamma_1^R} \frac{1}{1+z^4} dz + \int_{\gamma_2^R} \frac{1}{1+z^4} dz = \int_{-R}^R \frac{1}{1+x^4} dx + \int_{\gamma_2^R} \frac{1}{1+z^4} dz. \quad (862)$$

Es folgt

$$\int_{-R}^R \frac{1}{1+x^4} dx = \int_{\gamma^R} \frac{1}{1+z^4} dz - \int_{\gamma_2^R} \frac{1}{1+z^4} dz \stackrel{(861)}{=} 2\pi i \frac{f(z_1) - f(z_0)}{z_0 - z_1} - \int_{\gamma_2^R} \frac{1}{1+z^4} dz. \quad (863)$$

Schritt 3. Verstehe die Asymptotik $R \rightarrow \infty$. Dazu schätzen wir $\int_{\gamma_2^R} \frac{1}{1+z^4} dz$ mit der Fundamentalabschätzung ab:

$$\left| \int_{\gamma_2^R} \frac{1}{1+z^4} dz \right| \leq \max_{z \in \gamma_2^R([0, 2\pi])} \frac{1}{|1+z^4|} L(\gamma_2^R) \quad (864)$$

Beachte, dass

$$L(\gamma_2^R) = \int_0^\pi |(\gamma_2^R)'(t)| dt \stackrel{(851)}{=} \int_0^\pi |Rie^{it}| dt = \int_0^\pi R dt = \pi R. \quad (865)$$

Außerdem gilt für $z \in \gamma_2^R([0, 2\pi]) \subset \partial B_r(0)$ nach der inversen Dreiecksungleichung

$$\frac{1}{|z^4 + 1|} \leq \frac{1}{|z^4| - |1|} = \frac{1}{|z|^4 - 1} = \frac{1}{R^4 - 1}. \quad (866)$$

Setzen wir die obigen beiden Ungleichungen in (864) ein, so erhalten wir

$$\left| \int_{\gamma_2^R} \frac{1}{1 + z^4} dz \right| \leq \frac{\pi R}{R^4 - 1} \quad \forall R > 1. \quad (867)$$

Lassen wir $R \rightarrow \infty$ streben, so folgern wir $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_2^R} \frac{1}{1 + z^4} dz = 0$. Nutzen wir diese Information in (863) so erhalten wir

$$p.v. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + x^4} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{1}{1 + x^4} dx \stackrel{(863)}{=} 2\pi i \frac{f(z_0) - f(z_1)}{z_0 - z_1} \quad (868)$$

Setzen wir die Definition von f ein so haben wir

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + x^4} dx = 2\pi i \frac{1}{z_0 - z_1} \left(\frac{1}{(z_0 - z_2)(z_0 - z_3)} - \frac{1}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)} \right) \quad (869)$$

Somit hat man den Wert des reellen Integrals gefunden. Mit

$$z_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad z_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad z_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad z_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (870)$$

(vgl. (**)) erhält man leicht

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + x^4} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \quad (871)$$

4 Isolierte Singularitäten

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit Funktionen, die an überall auf einem Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ holomorph sind, außer an einzelnen isolierten Punkten, den *isolierten Singularitäten*. Wir werden sehen, dass man das Verhalten holomorpher Funktionen um diese Singularitäten verstehen und klassifizieren kann. Hierzu lernen wir im nächsten Abschnitt die drei Arten von Singularitäten kennen. Im Abschnitt danach werden wir das asymptotische Verhalten einer holomorphen Funktion um eine Singularität mithilfe von *Laurentreihen* verstehen. Diese Erkenntnisse werden wir danach wieder für die Berechnung von Kurvenintegralen verwenden. Wir zeigen hierbei den *Residuensatz*, der alle bisher aus der Vorlesung bekannten Integralsätze verallgemeinert.

Zum Abschluss hier noch die Definition des Wortes “*isolierte Singularität*”.

Definition 207. ISOLIERTE SINGULARITÄT. Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Ein Punkt $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, der ein isolierter Punkt von $\mathbb{C} \setminus \Omega$ ist,

heißt *isolierte Singularität von f bezüglich Ω* . Die Menge aller isolierten Singularitäten von f bezüglich Ω bezeichnen wir mit $\text{Iso}(f, \Omega)$.

Bemerkung 208. Ist $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ und $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ eine isolierte Singularität von f so gibt es $r > 0$ so, dass $B_r(z_0) \setminus \{z_0\} \subset \Omega$. In der Tat: Gäbe es ein solches $r > 0$ nicht, so gäbe es für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $z_n \in B_{\frac{1}{n}}(z_0) \setminus \{z_0\} \cap (\mathbb{C} \setminus \Omega)$. Dann würde jedoch die Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset (\mathbb{C} \setminus \Omega) \setminus \{z_0\}$ gegen z_0 konvergieren und somit wäre z_0 ein Häufungspunkt von $\mathbb{C} \setminus \Omega$. Ein Widerspruch, da isolierte Punkte keine Häufungspunkte sind.

Das Fazit aus der vorangegangenen Bemerkung ist, dass wir um jede isolierte Singularität $z_0 \in \mathbb{C}$ die folgende Situation beobachten: f ist holomorph auf einer *punktierten Kreisscheibe* $B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$. Mit dieser Charakterisierung wollen wir im folgenden Arbeiten.

Definition 209. ERWEITERTER DEFINITIONSBEREICH. Es sei $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Dann heißt

$$D := \Omega \cup \text{Iso}(f, \Omega) \quad (872)$$

erweiterter Definitionsbereich von f bezüglich Ω .

Beachte: Wir können f auf $\text{Iso}(f, \Omega)$ keine Werte zuweisen, daher ist das Wort *erweiterter Definitionsbereich* eigentlich etwas irreführend.

Bemerkung 210. Der erweiterte Definitionsbereich ist stets eine offene Menge. In der Tat: Wir haben in Bemerkung 208 gesehen, dass es für alle $z_0 \in \text{Iso}(f, \Omega)$ ein $r(z_0) > 0$ gibt mit $B_{r(z_0)}(z_0) \setminus \{z_0\} \subset \Omega$. Deswegen gilt

$$D = \Omega \cup \text{Iso}(f, \Omega) = \Omega \cup \bigcup_{z_0 \in \text{Iso}(f, \Omega)} \{z_0\} = \left(\Omega \cup \bigcup_{z_0 \in \text{Iso}(f, \Omega)} B_{r(z_0)}(z_0) \setminus \{z_0\} \right) \cup \bigcup_{z_0 \in \text{Iso}(f, \Omega)} \{z_0\} \quad (873)$$

$$= \Omega \cup \bigcup_{z_0 \in \text{Iso}(f, \Omega)} (B_{r(z_0)}(z_0) \setminus \{z_0\}) \cup \{z_0\} = \Omega \cup \bigcup_{z_0 \in \text{Iso}(f, \Omega)} B_{r(z_0)}(z_0), \quad (874)$$

was als Vereinigung offener Mengen wieder offen ist.

Beispiel 211. Es sei $f \in \mathcal{H}(D)$ für ein Gebiet $D \subset \mathbb{C}$. Definiere für ein beliebiges $w \in D$ die Funktion $g : D \setminus \{w\} \rightarrow \mathbb{C}$ durch $g(z) := \frac{f(z)}{z-w}$. Dann ist $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ für $\Omega := D \setminus \{w\}$. Somit ist $\text{Iso}(g, \Omega) = \{w\}$. Der erweiterte Definitionsbereich von g bezüglich Ω ist dann gegeben durch

$$\Omega \cup \text{Iso}(g, \Omega) = (D \setminus \{w\}) \cup \{w\} = D. \quad (875)$$

Beispiel 212. Es sei $\Omega := \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \sin \frac{1}{z} \neq 0\}$ und $f(z) = \frac{1}{\sin \frac{1}{z}}$. Beachte

$$\sin(w) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} = 0 \Leftrightarrow e^{2iw} = 1 \Leftrightarrow 2iw = 2k\pi i \quad (k \in \mathbb{Z}). \quad (876)$$

Daraus folgt

$$\sin \frac{1}{z} = 0 \Leftrightarrow 2i \frac{1}{z} = 2k\pi i \quad (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow z = \frac{1}{k\pi} \quad (k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}). \quad (877)$$

Daher gilt $\Omega = \mathbb{C} \setminus (\{0\} \cup \{\frac{1}{\pi n} : n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\})$.

BEHAUPTUNG. 0 ist keine isolierte Singularität von f . In der Tat: $\frac{1}{n\pi} \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und somit findet man eine Folge auf $(\mathbb{C} \setminus \Omega) \setminus \{0\}$, die gegen 0 konvergiert. Man kann sich leicht überzeugen, dass $\text{Iso}(f, \Omega) = \{\frac{1}{\pi n} : n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$ und $D = \Omega \cup \text{Iso}(f, \Omega) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

4.1 Klassifikation der Singularitäten

Wir unterteilen die isolierten Singularitäten nun in drei Arten auf. Von allen diesen drei Arten wollen wir in diesem Kapitel die Eigenschaften diskutieren.

Definition 213. **ARTEN ISOLIERTER SINGULARITÄTEN.** Es sei $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ und $z_0 \in \mathbb{C}$ eine isolierte Singularität. Der Punkt z_0 heißt

- (a) *hebbare Singularität*, falls es ein $r > 0$ gibt so, dass $|f|$ auf $B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ beschränkt ist.
- (b) *Polstelle*, falls z_0 nicht hebbar ist, aber es ein $m \in \mathbb{N}$ gibt so, dass $g_m : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $g_m(z) := (z - z_0)^m f(z)$ eine hebbare Singularität bei z_0 hat. In diesem Fall nennen wir $\text{Ord}(f, z_0) := \min\{m \in \mathbb{N} : g_m \text{ hat bei } z_0 \text{ eine hebbare Singularität}\}$ die *Polstellenordnung* von f bei z_0
- (c) *wesentliche Singularität*, falls z_0 weder eine hebbare Singularität noch eine Polstelle ist.

Beachte: $\text{Ord}(f, z_0)$ ist nicht zu verwechseln mit $\text{ord}(f, z_0)$. Letzteres war die *Nullstellenordnung*, vgl. Definition 176.

Bemerkung 214. Man kann die Typen 1 und 2 auch zusammenfassen: Eine isolierte Singularität $z_0 \in \mathbb{C}$ ist hebbar oder eine Polstelle, falls es $m \in \mathbb{N}_0$ gibt, so, dass $(z - z_0)^m f(z)$ in auf $B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ (für ein $r > 0$) beschränkt ist. (Im Falle einer hebbaren Singularität kann man dann einfach $m = 0$ wählen). Im Folgenden werden wir einfach salopp sagen “ $(z - z_0)^m f(z)$ ist in einer Umgebung von z_0 beschränkt”, obwohl f bei z_0 eigentlich gar nicht definiert ist.

Bemerkung 215. Es sei $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ und $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ eine Polstelle. Man beachte: Hat für ein $m \in \mathbb{N}$ die Funktion $g_m(z) := (z - z_0)^m f(z)$ eine hebbare Singularität, so hat für alle $k > m$ die Funktion $g_k(z) := (z - z_0)^k f(z)$ auch eine hebbare Singularität. Somit ist

$$\{m \in \mathbb{N} : g_m \text{ hat bei } z_0 \text{ eine hebbare Singularität}\} = \{k \in \mathbb{N} : k \geq \text{Ord}(f, z_0)\}. \quad (878)$$

Die nachfolgenden Beispiele können als *Prototypen* der einzelnen Arten von Singularitäten gesehen werden.

Beispiel 216.

- (i) Es sei $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ gegeben durch $f(z) = \frac{\sin(z)}{z}$. Dann ist $z_0 = 0$ eine hebbare Singularität. In der Tat: Für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt

$$f(z) = \frac{\sin(z)}{z} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k}. \quad (879)$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite ist Wertefunktion eine Potenzreihe mit Konvergenzradius ∞ um den Entwicklungspunkt $z_1 = 0$. Eine solcher Ausdruck ist stets holomorph auf ganz \mathbb{C} und somit auch beschränkt auf $\overline{B_r(0)}$ für alle $r > 0$ (denn stetige Funktionen auf sind auf Kompakta stets beschränkt). Wir folgern dass $|f|$ beschränkt auf $B_r(0) \setminus \{0\}$ ist.

- (ii) Es sei $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ gegeben durch $f(z) = \frac{1}{z^k}$. Wir behaupten: Dann ist $z_0 = 0$ eine Polstelle von f der Ordnung k . Dazu: für alle $\ell \in 0, \dots, k-1$ gilt:

$$(z-0)^\ell \frac{1}{z^k} = z^\ell \frac{1}{z^k} = \frac{1}{z^{k-\ell}} \quad (880)$$

ist unbeschränkt in jeder Umgebung von $z = 0$. Gleichsam ist

$$(z-0)^k \frac{1}{z^k} = z^k \frac{1}{z^k} = 1 \quad (881)$$

beschränkt. Daher hat $g_k(z) := (z-0)^k f(z)$ eine hebbare Singularität bei $z_0 = 0$. Wir folgern, dass $z_0 = 0$ eine Polstelle der Ordnung $\text{Ord}(f, z_0) = k$ ist.

- (iii) Es sei $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ gegeben durch $f(z) = \exp(\frac{1}{z})$. Wir behaupten, dass f bei $z_0 = 0$ eine wesentliche Singularität hat. In der Tat: Wäre z_0 hebbbar oder eine Polstelle, so gäbe es ein $m \in \mathbb{N}_0$ so, dass $(z-0)^m f(z) = z^m e^{\frac{1}{z}}$ in einer Umgebung von $z_0 = 0$ beschränkt ist. Betrachte dann die Folge $z_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n - 0)^m f(z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n^m e^{\frac{1}{z_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}\right)^m e^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n}{n^m} = \infty. \quad (882)$$

Dies widerspricht der Beschränktheit von $(z-0)^m f(z)$. Hierbei haben wir ein Resultat aus der Analysis benutzt, welches besagt, dass die Exponentialfunktion schneller wächst als jedes Polynom.

4.1.1 Verhalten um hebbare Singularitäten

Wir studieren nun zuerst das Verhalten einer holomorphen Funktion um eine *hebbare Singularität*. Dazu lernen wir den *Riemann'schen Hebbbarkeitssatz* kennen

Satz 217. RIEMANN'SCHER HEBBARKEITSSATZ. Es sei $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ und $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ eine hebbare isolierte Singularität von f . Dann existiert $\zeta := \lim_{z \rightarrow z_0, z \in \Omega} f(z)$ und die *stetige Fortsetzung* $g : \Omega \cup \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch

$$g(z) := \begin{cases} f(z) & z \neq z_0 \\ \zeta & z = z_0 \end{cases} \quad (883)$$

ist sogar holomorph, d.h. $g \in \mathcal{H}(\Omega \cup \{z_0\})$.

Man beachte: Damit man von Holomorphie auf $\Omega \cup \{z_0\}$ sprechen darf, müsste man eigentlich zeigen, dass $\Omega \setminus \{z_0\}$ offen ist. Dies sieht man genau wie in Bemerkung 210.

Beweis. Definiere

$$h : \Omega \cup \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C} \quad h(z) := \begin{cases} f(z)(z - z_0)^2 & z \neq z_0 \\ 0 & z = z_0 \end{cases}. \quad (884)$$

Zwischenbehauptung. Wir behaupten, dass h auf $\Omega \cup \{z_0\}$ holomorph ist und $h'(z_0) = 0$. Dazu: Dass h auf Ω komplex differenzierbar ist folgt direkt aus dem ersten Fall von (884) und der Produktregel. Es genügt also zu zeigen, dass h bei z_0 komplex differenzierbar ist. Dazu berechnen wir für $z \in \Omega$, (d.h. $z \neq z_0$)

$$\frac{h(z) - h(z_0)}{z - z_0} = \frac{(z - z_0)^2 f(z)}{z - z_0} = (z - z_0) f(z). \quad (885)$$

Da nun (wegen der Hebbbarkeit von z_0) $|f(z)|$ in einer Umgebung von z_0 beschränkt ist und $\lim_{z \rightarrow z_0} |z - z_0| = 0$ ist, folgt $\lim_{z \rightarrow z_0} |(z - z_0) f(z)| = \lim_{z \rightarrow z_0} |z - z_0| |f(z)| = 0$. Deswegen gilt auch

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{h(z) - h(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = 0 \quad (886)$$

Wir folgern, dass h bei z_0 komplex differenzierbar ist mit $h'(z_0) = 0$. Somit ist h holomorph auf $\Omega \cup \{z_0\}$.

Ende der Zwischenbehauptung.

Sei nun $r > 0$ so, dass $B_r(z_0) \setminus \{z_0\} \subset \Omega$, vgl. Bemerkung 208. Dann gilt $B_r(z_0) \subset \Omega \cup \{z_0\}$. Nach dem Potenzreihenentwicklungssatz lässt sich h auf $B_r(z_0)$ als Potenzreihe

darstellen, d.h. es gibt $(a_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ so, dass für alle $z \in B_r(z_0)$

$$h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = a_0 + a_1 (z - z_0) + \sum_{k=2}^{\infty} a_k (z - z_0)^k. \quad (887)$$

Zusätzlich gilt (vgl Proposition 105), dass $a_k = \frac{h^{(k)}(z_0)}{k!}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Insbesondere gilt $a_0 = h(z_0) \stackrel{(884)}{=} 0$ und $a_1 = h'(z_0) \stackrel{(886)}{=} 0$. Es folgt also für $z \in B_r(z_0)$

$$h(z) = \sum_{k=2}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = (z - z_0)^2 \sum_{k=2}^{\infty} a_k (z - z_0)^{k-2} = (z - z_0)^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+2} (z - z_0)^k. \quad (888)$$

Wir können nun den Fall $z \neq z_0$ in (884) einsetzen und folgern

$$(z - z_0)^2 f(z) = (z - z_0)^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+2} (z - z_0)^k \quad \forall z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\}. \quad (889)$$

Teilen durch $(z - z_0)^2$ liefert

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+2} (z - z_0)^k \quad \forall z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\}. \quad (890)$$

Es folgt (weil Potenzreihen auf ihrem Konvergenzbereich stetig sind)

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+2} (z - z_0)^k = a_2 \quad (891)$$

und somit ist $\zeta = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a_2$. Sei nun g definiert wie in (883). Dann ist

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+2} (z - z_0)^k \quad \forall z \in B_r(z_0). \quad (892)$$

In der Tat: Für $z \neq z_0$ folgt das aus (890) und für $z = z_0$ hat man

$$g(z_0) = \zeta = a_2 = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+2} (z_0 - z_0)^k. \quad (893)$$

Gleichung (892) zeigt dann schließlich, dass g eine holomorphe Funktion auf $B_r(z_0)$ sein muss. Holomorphie auf ganz $\Omega \cup \{z_0\}$ folgt dann mit (883).

Hebbare Singularitäten sind daher also eigentlich gar keine Singularitäten weil die Funktion bei einer hebbaren Singularität $z_0 \in \mathbb{C}$ *holomorph fortgesetzt* werden kann.

Ein solches Resultat wie der Riemann'sche Hebbbarkeitssatz wäre im Reellen undenkbar: Man definiere $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f(x) = \sin \frac{1}{x}$. Diese Funktion ist reell differenzierbar und in einer Umgebung von der Singularität $x_0 = 0$ beschränkt. Jedoch existiert $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

nicht (und somit gibt es nichteinmal eine stetige Fortsetzung auf $\mathbb{R} \setminus \{0\} \cup \{x_0\} = \mathbb{R}$)

4.1.2 Verhalten um eine Polstelle

Als Prototyp für holomorphe Funktionen mit einer Polstelle bei $z_0 = 0$ diene die Funktion $f(z) = \frac{1}{z^k}$, ($z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$). Dieses Beispiel ist in dem Sinne prototypisch, dass sämtliche Funktionen mit Polstellen sich in einer Umgebung der Polstelle als Quotient zweier holomorpher Funktionen darstellen lassen.

Proposition 218. VERHALTEN UM EINE POLSTELLE. Es sei $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ und $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ sei eine hebbare Singularität oder eine Polstelle von f . Dann gibt es holomorphe Funktionen $g, h \in \mathcal{H}(\Omega \cup \{z_0\})$ so, dass

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)} \quad \forall z \in \Omega. \quad (894)$$

ZUSATZ. Ist z_0 eine Polstelle, so ist es möglich g, h so zu wählen, dass $g(z_0) \neq 0$ und $h(z_0) = 0$. Insbesondere gilt

$$\lim_{z \rightarrow z_0, z \in \Omega} |f(z)| = \infty. \quad (895)$$

Beweis. Hat f eine hebbare Singularität oder eine Polstelle, so gibt es ein $m \in \mathbb{N}_0$ so, dass $g_m(z) := (z - z_0)^m f(z)$ eine hebbare Singularität hat. Nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz gibt es dann ein $g \in \mathcal{H}(\Omega \cup \{z_0\})$ so, dass $g(z) = g_m(z)$ für alle $z \in \Omega$, d.h. g ist eine holomorphe Fortsetzung von g_m auf $\Omega \cup \{z_0\}$. Beachte, dass für alle $z \in \Omega$ gilt

$$f(z) = \frac{(z - z_0)^m f(z)}{(z - z_0)^m} = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}. \quad (896)$$

Die Behauptung folgt mit der Wahl $h(z) := (z - z_0)^m$ (welche sicherlich auf $\Omega \cup \{z_0\}$ holomorph ist).

ZUM ZUSATZ. Sei z_0 eine Polstelle und $m := \text{Ord}(f, z_0) \in \mathbb{N}$. Es sei nun wie oben $g \in \mathcal{H}(\Omega \cup \{z_0\})$ die holomorphe Fortsetzung von $g_m(z) := (z - z_0)^m f(z)$. **Z:** $g(z_0) \neq 0$. Angenommen $g(z_0) = 0$. Dann ist nach Korollar 161

$$q(z) := \begin{cases} \frac{g(z)}{z - z_0} & z \neq z_0 \\ g'(z_0) & z = z_0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} & z \neq z_0 \\ g'(z_0) & z = z_0 \end{cases} \quad (897)$$

auf $\Omega \cup \{z_0\}$ holomorph und somit beschränkt in jeder Umgebung $B_r(z_0)$ mit $\overline{B_r(z_0)} \subset \Omega \cup \{z_0\}$. Für $z \neq z_0$ gilt außerdem

$$q(z) = \frac{g(z)}{z - z_0} = \frac{(z - z_0)^m f(z)}{z - z_0} = (z - z_0)^{m-1} f(z). \quad (898)$$

Wir folgern, dass $z \mapsto (z - z_0)^{m-1} f(z)$ auf $B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ beschränkt ist. Somit hat $g_{m-1}(z) := (z - z_0)^{m-1} f(z)$ eine hebbare Singularität bei z_0 . Ein Widerspruch dazu,

das $m = \text{Ord}(f, z_0)$ die kleinste natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$ ist, sodass durch Multiplikation mit $(z - z_0)^k$ eine hebbare Singularität zustande kommt. Wir folgern durch Widerspruch, dass $g(z_0) \neq 0$. Nun begründen wir noch, dass $h(z_0) = 0$. Dazu: wäre $h(z_0) \neq 0$, so wäre $\frac{g}{h}$ bei z_0 nach der Quotientenregel holomorph. Dann ist aber $f = \frac{g}{h}$ beschränkt in einer Umgebung von z_0 . Ein Widerspruch, denn z_0 ist keine hebbare Singularität sondern eine Polstelle. Noch \mathbb{Z} :

$$\lim_{z \rightarrow z_0, z \in \Omega} |f(z)| = \infty. \quad (899)$$

Dazu: Es gibt wegen der Stetigkeit ein $\varepsilon > 0$ so, dass $|g(z)| \geq \frac{1}{2}|g(z_0)| > 0$ für alle $z \in B_\varepsilon(z_0)$. Sei nun $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \Omega$ eine beliebige Folge mit $z_n \rightarrow z_0$. Dann gilt $|h(z_n)| \rightarrow |h(z_0)| = 0$ und es gibt außerdem ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n \geq n_0$ gilt $z_n \in B_\varepsilon(z_0)$. Für $n \geq n_0$ folgt

$$|f(z_n)| = \frac{|g(z_n)|}{|h(z_n)|} \geq \frac{1}{2} \frac{|g(z_0)|}{|h(z_n)|} \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty). \quad (900)$$

Bemerkung 219. Es seien Ω, z_0, f wie in Proposition 218. Gleichung (895) erlaubt uns folgende Erweiterung von f : Wir definieren $f^* : \Omega \cup \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ durch

$$f^*(z) := \begin{cases} f(z) & z \in \Omega \\ \infty & z = z_0 \end{cases}. \quad (901)$$

Betrachte nun f^* als Abbildung zwischen den metrischen Räumen $(\Omega \cup \{z_0\}, d_{|\cdot|})$ und $(\mathbb{C}_\infty, \chi)$ (wobei χ der chordale Abstand ist, vergleiche Definition 75). Aus Gleichung (895) (und Korollar 79) liest man dann ab, dass f^* stetig ist. Da $(\mathbb{C}_\infty, \chi)$ mittels der stereographischen Projektion $\psi^{-1} : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{S}_{Rm}^2$ stetig in den metrischen Raum $(\mathbb{S}_{Rm}^2, d_{euc})$ abgebildet werden kann, liefert also $\psi^{-1} \circ f^*$ eine stetige Abbildung von $\Omega \cup \{z_0\}$ in die Riemann-Sphäre mit $(\psi^{-1} \circ f^*)(z_0) = N = (0, 0, 1)$. Diese Betrachtungsweise ist insofern schön: An dem Punkt z_0 passiert gar kein *singuläres Verhalten* mehr, sondern man beobachtet nichts anderes als eine stetige Funktion mit Werten in einem metrischen Raum.

Wir haben gesehen, dass wir um eine Polstelle stets eine Darstellung als *Quotient* zweier holomorpher Funktionen finden können. Es gilt auch eine Umkehrung.

Proposition 220. Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ und $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ ein isolierter Punkt von $\mathbb{C} \setminus \Omega$. Ferner seien $g, h \in \mathcal{H}(\Omega \cup \{z_0\})$ mit $h(z) \neq 0$ für alle $z \in \Omega$. Definiere nun für $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ durch $f(z) := \frac{g(z)}{h(z)}$. Dann hat f bei z_0 entweder eine hebbare Singularität oder eine Polstelle. Hat f eine Polstelle, so ist $h(z_0) = 0$ und die Polstellenordnung von f ist gegeben durch

$$\text{Ord}(f, z_0) := \text{ord}(h, z_0) - \text{ord}(g, z_0). \quad (902)$$

(Hierbei meint ord die Nullstellenordnung, vgl. Definition 176. Wir treffen zusätzlich die Konvention $\text{ord}(g, z_0) := 0$ falls g bei z_0 gar keine Nullstelle hat).

Beweis. Wir unterscheiden zwei Fälle.

FALL 1. $h(z_0) \neq 0$. Dann ist $\frac{g}{h}$ nach der Quotientenregel auch bei $z = z_0$ holomorph. Somit ist $\frac{g}{h}$ auf (der offenen Menge) $\Omega \cup \{z_0\}$ holomorph. Dann gilt für alle $r > 0$ mit $\overline{B_r(z_0)} \subset \Omega \cup \{z_0\}$, dass $\frac{g}{h}$ auf $\overline{B_r(z_0)}$ beschränkt ist. Da f nun auf $B_r(z_0) \setminus \{z_0\} \subset \Omega$ mit $\frac{g}{h}$ übereinstimmt, ist f auf $B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ beschränkt. Somit hat f bei z_0 eine hebbare Singularität.

FALL 2. $h(z_0) = 0$. Nach Bemerkung 175 gibt es ein (minimales) $m = \text{ord}(h, z_0) \in \mathbb{N}$ mit $h^{(m)}(z_0) \neq 0$ (denn sonst wäre $h \equiv 0$, was der Voraussetzung widersprechen würde). Nach dem Potenzreihenentwicklungssatz gilt

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{h^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \quad (903)$$

$$= (z - z_0)^m \sum_{n=m}^{\infty} \frac{h^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^{n-m} = (z - z_0)^m \tilde{h}(z), \quad (904)$$

für ein $\tilde{h} \in \mathcal{H}(\Omega \cup \{z_0\})$ mit $\tilde{h}(z_0) = \frac{h^{(m)}(z_0)}{m!} \neq 0$. Wir folgern

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m \tilde{h}(z)} \quad \forall z \in \Omega. \quad (905)$$

Insbesondere gilt

$$(z - z_0)^m f(z) = \frac{g(z)}{\tilde{h}(z)} \quad \forall z \in \Omega. \quad (906)$$

In Fall 1 haben wir bereits gezeigt, dass der Ausdruck $\frac{g}{h}$ bei z_0 eine hebbare Singularität haben muss (weil $\tilde{h}(z_0) \neq 0$). Wir folgern aus (906), dass $z \mapsto (z - z_0)^m f(z)$ bei z_0 eine hebbare Singularität hat. Somit hat f also eine Polstelle.

Noch \mathbb{Z} : $\text{Ord}(f, z_0) = \text{ord}(h, z_0) - \text{ord}(g, z_0)$. Dazu sei $k = \text{ord}(g, z_0)$ und $m = \text{ord}(h, z_0)$. \mathbb{Z} : $\text{Ord}(f, z_0) = m - k$. In Gleichung (904) haben wir bereits gesehen, dass es ein $\tilde{h} \in \mathcal{H}(\Omega \cup \{z_0\})$ gibt mit $\tilde{h}(z_0) \neq 0$ und $h(z) = (z - z_0)^m \tilde{h}(z)$ für alle $z \in \Omega \cup \{z_0\}$. Analog zeigt man, dass es $\tilde{g} \in \mathcal{H}(\Omega \cup \{z_0\})$ gibt mit $\tilde{g}(z_0) \neq 0$ und $g(z) = (z - z_0)^k \tilde{g}(z)$ für alle $z \in \Omega \cup \{z_0\}$. Dann gilt für $z \in \Omega$

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{(z - z_0)^k \tilde{g}(z)}{(z - z_0)^m \tilde{h}(z)} = (z - z_0)^{k-m} \frac{\tilde{g}(z)}{\tilde{h}(z)}. \quad (907)$$

Somit haben wir

$$(z - z_0)^{m-k} f(z) = \frac{\tilde{g}(z)}{\tilde{h}(z)} \quad \forall z \in \Omega. \quad (908)$$

Schritt 1. $\text{Ord}(f, z_0) \leq m - k$. Das liegt daran, dass $\frac{\tilde{g}}{\tilde{h}}$ in einer Umgebung von z_0 beschränkt sind (da \tilde{g}, \tilde{h} stetig und $\tilde{h}(z_0) \neq 0$). Gleichung (908) liefert dann dass $z \mapsto (z - z_0)^{m-k} f(z)$ eine hebbare Singularität haben muss.

Schritt 2. $\text{Ord}(f, z_0) = m - k$. Angenommen es gäbe ein $\ell < m - k$ so, dass $z \mapsto (z - z_0)^\ell f(z)$ eine hebbare Singularität hat. Dann gilt mit (908)

$$(z - z_0)^\ell f(z) = (z - z_0)^{\ell - (m - k)} \frac{\tilde{g}(z)}{\tilde{h}(z)} \quad \forall z \in \Omega. \quad (909)$$

Nun ist die linke Seite in einer Umgebung von z_0 beschränkt. Die rechte Seite aber nicht! In der Tat: es gilt $\lim_{z \rightarrow z_0} \left| \frac{\tilde{g}(z)}{\tilde{h}(z)} \right| = \left| \frac{\tilde{g}(z_0)}{\tilde{h}(z_0)} \right| \neq 0$ und $\lim_{z \rightarrow z_0} |(z - z_0)^{\ell - (m - k)}| = \lim_{z \rightarrow z_0} |z - z_0|^{\ell - (m - k)} = \infty$, weil $\ell < (m - k)$. Wir erhalten einen Widerspruch in (909).

Ein spannender Spezialfall ist $g = 1$, d.h. $f = \frac{1}{h}$. Dann gilt (falls z_0 eine Polstelle von $f = \frac{1}{h}$ ist) $\text{Ord}(f, z_0) = \text{ord}(h, z_0)$.

4.1.3 Verhalten um eine wesentliche Singularität

Es habe $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ bei $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ eine isolierte Singularität. Wir haben Folgendes bereits in den beiden vorangegangenen Abschnitten gesehen:

- Ist z_0 hebbbar so ist f bei z_0 holomorph fortsetzbar. Daher ist $f(B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\})$ für kleine $\varepsilon > 0$ stets eine kleine Umgebung eines einzelnen Punktes in \mathbb{C} — nämlich des Wertes der holomorphen Fortsetzung von f bei z_0 .
- Hat f bei $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ hingegen eine Polstelle, so ist $f(B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\})$ (sofern als Teilmenge von $(\mathbb{C}_\infty, \chi)$ aufgefasst) stets eine kleine Umgebung des Punktes ∞ , vergleiche Bemerkung 219.

Was passiert nun mit $f(B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\})$, falls z_0 eine wesentliche Singularität ist? Wir behaupten: Dann ist das Bild $f(B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\})$ komplett *zerstreut* in \mathbb{C}_∞ . Dies liegt am *Satz von Casorati-Weierstraß*, den wir nun kennenlernen wollen.

Satz 221. SATZ VON CASORATI-WEIERSTRASS. Es sei $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ und $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ eine wesentliche Singularität von f . Dann ist für alle $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\} \subset \Omega$ die Menge $f(B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\})$ *dicht* in \mathbb{C} , d.h. $\overline{f(B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\})} = \mathbb{C}$.

Beweis. Es sei z_0 wie in der Aussage. Sei $\varepsilon > 0$ so klein, dass $B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\} \subset \Omega$. Angenommen $\overline{f(B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\})} \neq \mathbb{C}$. Sei etwa $w_0 \in \mathbb{C} \setminus \overline{f(B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\})}$. Da $\mathbb{C} \setminus \overline{f(B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\})}$ eine als Komplement einer abgeschlossenen Menge offen ist, gibt es ein $\rho > 0$ so, dass $B_\rho(w_0) \subset \mathbb{C} \setminus \overline{f(B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\})}$, d.h. $B_\rho(w_0) \cap \overline{f(B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\})} = \emptyset$. Damit gilt für alle $z \in B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}$, dass $|f(z) - w_0| \geq \rho$ (denn gäbe es ein z mit $|f(z) - w_0| < \rho$ so wäre $f(z)$ zum einen in $B_\rho(w_0)$ und zum anderen in $f(B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\})$, und damit auch in $\overline{f(B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\})}$, was ein Widerspruch wäre, denn diese beiden Mengen müssen nach den obigen Ausführungen leeren Schnitt haben). Definiere $h : B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$h(z) := \frac{1}{f(z) - w_0}. \quad (910)$$

Nun ist h auf $B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}$ holomorph. Daher ist z_0 eine isolierte Singularität von h . Ferner gilt nach der obigen Beobachtung

$$|h(z)| = \frac{1}{|f(z) - w_0|} \leq \frac{1}{\rho} \quad \forall z \in B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}. \quad (911)$$

Somit ist z_0 nach Definition 213 eine hebbare Singularität von h . Nach dem Riemann'schen Hebbarkeitssatz gibt es dann $\tilde{h} \in \mathcal{H}(B_\varepsilon(z_0))$ mit $\tilde{h} \equiv h$ auf $B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}$. Für $z \in B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}$ gilt dann $\tilde{h}(z) = h(z) = \frac{1}{f(z) - w_0} \neq 0$. Durch Umformen erhält man Informationen über f :

$$\tilde{h}(z) = \frac{1}{f(z) - w_0} \quad \Rightarrow \quad f(z) - w_0 = \frac{1}{\tilde{h}(z)} \quad \Rightarrow \quad f(z) = \frac{1}{\tilde{h}(z)} + w_0 = \frac{1 + w_0 \tilde{h}(z)}{\tilde{h}(z)}. \quad (912)$$

Diese Darstellung von f als Quotient zweier auf ganz $B_\varepsilon(z_0)$ holomorpher Funktionen impliziert aber nach Proposition 220, dass f bei z_0 eine hebbare Singularität oder eine Polstelle haben muss. Ein Widerspruch dazu, dass z_0 eine wesentliche Singularität hat.

Wir geben zu beachten, dass die Bildung des Abschlusses $\overline{f(B_\varepsilon(z_0)) \setminus \{z_0\}}$ für das Resultat essentiell ist: Es kann bei einer wesentlichen Singularität z_0 durchaus vorkommen, dass $f(B_\varepsilon(z_0)) \setminus \{z_0\} \neq \mathbb{C}$. Ein gutes Beispiel dafür ist $f(z) = \exp(\frac{1}{z})$ mit wesentlicher Singularität bei $z_0 = 0$. Hier gilt stets $0 \notin f(B_\varepsilon(0) \setminus \{0\})$ für alle $\varepsilon > 0$.

4.2 Laurentreihen

Für holomorphe Funktionen auf Kreisscheiben $B_r(a)$ haben wir bereits eine Reihendarstellung gefunden: Die außerordentlich hilfreiche *Potenzreihenentwicklung*. Ist eine Funktion jedoch nicht auf einem ganzen Kreisscheibe, sondern z.B. nur auf einer punktierten Kreisscheibe holomorph, so kann global keine Potenzreihenentwicklung gefunden werden. Stattdessen werden wir in diesem Abschnitt eine *Laurentreihenentwicklung* kennen lernen. Diese konvergiert auf *Ringgebieten* der Form $A_{r,R}(a) := \{z \in \mathbb{C} : r < |z - a| < R\}$.

Definition 222. LAURENTREIHE. Es sei $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$ und $z_1 \in \mathbb{C}$. Eine *Laurentreihe* bezüglich $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ mit Referenzpunkt z_1 ist ein Ausdruck der Form

$$L(z) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - z_1)^n \quad (913)$$

Wir nennen $L(z)$ bei einem $z \in \mathbb{C}$ (absolut) konvergent falls beide Reihen

$$L_N(z) = \sum_{n \geq 0} c_n (z - z_1)^n \quad \text{und} \quad L_H(z) = \sum_{n \geq 1} c_{-n} (z - z_1)^{-n} \quad (914)$$

(absolut) konvergieren. $L_H(z)$ heißt *Hauptteil* der Laurentreihe und $L_N(z)$ heißt *Nebenteil*. Definiert man

$$D_B := \{z \in \mathbb{C} : L(z) \text{ ist konvergent}\} \quad (915)$$

so ist die Wertefunktion $f_L : D_B \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch

$$f_L(z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_1)^n := \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_1)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z - z_1)^{-n} \quad (916)$$

Bemerkung 223. Es sei eine Laurentreihe $L(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(z - z_1)^n$ gegeben. Der Nebenteil der Laurentreihe ist eine herkömmliche Potenzreihe, vgl. (914). Ihren Konvergenzradius nennen wir hier mal $R := R_N \in [0, \infty]$. Insbesondere gilt

$$|z - z_1| < R \quad \Rightarrow \quad L_N(z) \text{ konvergiert absolut.} \quad (917)$$

Der Hauptteil einer Laurentreihe

$$L_H(z) = \sum_{n \geq 1} c_{-n}(z - z_1)^{-n} = \sum_{n \geq 1} c_{-n} \left(\frac{1}{z - z_1} \right)^n \quad (918)$$

kann als Verkettung der Potenzreihe $P_H(w) := \sum_{n \geq 1} c_{-n} w^n$ mit einer Funktion der Form $z \mapsto \frac{1}{z - z_1}$ angesehen werden. Den Konvergenzradius von P_H nennen wir $R_H \in [0, \infty]$ und definieren $r := \frac{1}{R_H} \in [0, \infty]$ (mit der Konvention $\frac{1}{\infty} = 0$ und $\frac{1}{0} = \infty$). Man sieht

$$|z - z_1| > r \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{1}{z - z_1} \right| = \frac{1}{|z - z_1|} < \frac{1}{r} \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{1}{z - z_1} \right| < R_H \quad \stackrel{(918)}{\Rightarrow} \quad L_H(z) \text{ konv. absolut.} \quad (919)$$

Wir erinnern nun daran, dass $L(z)$ genau dann konvergiert wenn $L_H(z)$ und $L_N(z)$ konvergieren. Letzteres ist nach (950) der Fall wenn $|z - z_1| < R$ und ersteres gilt (wegen (919)) falls $|z - z_1| > r$. Wir folgern nun, dass der Konvergenzbereich eine Obermenge des *Kreisringgebietes*

$$A_{r,R}(z_1) := \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_1| < R\} \quad (920)$$

ist. Zu hoffen ist natürlich, dass $A_{r,R}(z_1) \neq \emptyset$, d.h. $R > r$.

BEOBACHTUNG. Die Wertefunktion $f_L : A_{r,R}(z_1) \rightarrow \mathbb{C}$, $f_L(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_1)^n$ ist auf $A_{r,R}(z_1)$ holomorph und kann dort summandenweise differenziert werden. Für den Nebenteil folgt das direkt aus der Tatsache, dass es sich um eine Potenzreihe handelt. Für den Hauptteil muss man die Darstellung in (918) und die Kettenregel verwenden. Differenzieren wir die Potenzreihe $P_H(w) = \sum_{n \geq 1} c_{-n} w^n$ summandenweise und benutzen die Kettenregel so erhalten wir

$$\partial_z \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z - z_1)^n = \partial_z \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \left(\frac{1}{z - z_1} \right)^n \stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} n \left(\frac{1}{z - z_1} \right)^{n-1} \left(\frac{-1}{(z - z_1)^2} \right) \quad (921)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (-n) \frac{1}{(z - z_1)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (-n) (z - z_1)^{-n-1} = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n n (z - z_1)^{n-1}. \quad (922)$$

Ab sofort dürfen wir also auch den Hauptteil einer Laurentreihe summandenweise differenzieren.

Unser Fazit: Der Nebenteil einer Laurentreihe konvergiert stets in $B_R(z_1)$ für ein $R > 0$ und der Hauptteil einer Laurentreihe konvergiert stets in $A_{r,\infty}(z_1)$. Der Konvergenzbereich ist damit $B_R(z_1) \cap A_{r,\infty}(z_1) = A_{r,R}(z_1)$.

Wir sehen als nächstes, dass genau wie bei Potenzreihen die Koeffizienten einer Laurentreihe eindeutig durch die Wertefunktion bestimmt sind

Proposition 224. Es sei

$$L(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - z_1)^n \quad (923)$$

eine Laurentreihe und seien r, R gewählt wie in Bemerkung 223 mit $R > r$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{Z}$ und alle $\rho \in (r, R)$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho(z_1)} f_L(z) (z - z_1)^{-(n+1)} dz. \quad (924)$$

Insbesondere legt der Wertefunktion f_L die Laurentreihe L eindeutig fest.

Beweis. Sei $k \in \mathbb{Z}$ und $\rho \in (r, R)$.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho(z_1)} f_L(z) (z - z_1)^{-(k+1)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho(z_1)} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_1)^n \right) (z - z_1)^{-(k+1)} dz \quad (925)$$

$$\stackrel{(*)}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho(z_1)} c_n (z - z_1)^n (z - z_1)^{-(k+1)} dz \quad (926)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} c_n \int_{\partial B_\rho(z_1)} (z - z_1)^{n-k-1} dz \quad (927)$$

Die Integralvertauschung in (*) kann mit [F. Pogorzelski, Maß- und Integrationstheorie, Proposition 2.26] begründet werden, siehe Beweisende. Wir erinnern uns nun daran, dass

$$\int_{\partial B_\rho(z_1)} (z - z_1)^\ell dz = \begin{cases} 2\pi i & \ell = -1 \\ 0 & \ell \neq -1 \end{cases}, \quad (928)$$

vgl. Beispiel 132. Das vereinfacht (927): Denn alle Summanden mit Index n sodass $n - k - 1 \neq -1$ verschwinden! Übrig bleibt somit nur der Summand für $n = k$ und man hat

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho(z_1)} f_L(z) (z - z_1)^{-(k+1)} dz = \frac{1}{2\pi i} c_k 2\pi i = c_k. \quad (929)$$

Dies ist die behauptete Gleichung (924). Noch **Z**: Die Integralvertauschung (*) war gerechtfertigt. Dazu:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho(z_1)} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_1)^n \right) (z - z_1)^{-(k+1)} dz \quad (930)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (\rho e^{it})^n \right) (\rho e^{it})^{-(k+1)} i \rho e^{it} dt \quad (931)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n (\rho e^{it})^n \right) (\rho e^{it})^{-(k+1)} i \rho e^{it} dt \quad (932)$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (\rho e^{it})^{-n} \right) (\rho e^{it})^{-(k+1)} i \rho e^{it} dt \quad (933)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} i c_n \rho^{n-k} e^{it(n-k)} + \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} i c_{-n} \rho^{-n-k} e^{it(-n-k)} dt. \quad (934)$$

Nach [F. Pogorzelski, Maß -und Integrationstheorie, Proposition 2.26] genügt es für die Vertauschung von Reihe und Integral in (934) zu zeigen, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} |i c_n \rho^{n-k} e^{it(n-k)}| dt < \infty \quad (935)$$

und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} |i c_{-n} \rho^{-n-k} e^{it(-n-k)}| dt < \infty. \quad (936)$$

Zuerst zu (935):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} |i c_n \rho^{n-k} e^{it(n-k)}| dt < \infty = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} |c_n| \rho^{n-k} dt \quad (937)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} 2\pi |c_n| \rho^{n-k} = 2\pi \rho^{-k} \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \rho^n < \infty, \quad (938)$$

wobei wir im letzten Schritt benutzt haben, dass $\rho < R_N = R$ und deswegen konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_1)^n$ für alle $z \in \partial B_\rho(z_1)$ absolut. Dies impliziert $\infty > \sum_{n=0}^{\infty} |c_n (z - z_1)^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \rho^n$ (mit einem beliebigen $z \in \partial B_\rho(z_1)$). Nun zu (936):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} |i c_{-n} \rho^{-n-k} e^{it(-n-k)}| dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} |c_{-n}| \rho^{-n-k} dt \quad (939)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} 2\pi |c_{-n}| \rho^{-n-k} = 2\pi \rho^{-k} \sum_{n=1}^{\infty} |c_{-n}| \left(\frac{1}{\rho} \right)^n < \infty, \quad (940)$$

wobei wir hier benutzen, dass $\frac{1}{\rho} < \frac{1}{r} = R_H$, wobei nach Bemerkung 223 R_H der Konvergenzradius von $R_H(w) = \sum_{n \geq 1} c_{-n} w^n$ ist. Somit konvergiert R_H für $w \in \partial B_{\frac{1}{\rho}}(0)$ absolut und es gilt $\infty > \sum_{n=1}^{\infty} |c_{-n} w^n| = \sum_{n=1}^{\infty} |c_{-n}| \left(\frac{1}{\rho}\right)^n$ (für eine beliebige Wahl von $w \in B_{\frac{1}{\rho}}(0)$). Wir folgern, dass wir in (934) Reihen und Integrale vertauschen können. Ganz ähnlich wie in (930) bis (934) leiten wir her, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} i c_n \rho^{n-k} e^{it(n-k)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} i c_{-n} \rho^{-n-k} e^{it(-n-k)} dt \quad (941)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_{\rho}(z_1)} c_n (z - z_1)^n (z - z_1)^{-(k+1)} dz. \quad (942)$$

Dies, (934) und die Vertauschung von Reihe und Integral, die wir begründet haben, liefern die (*).

Bemerkung 225. Die Herleitung der Vertauschungsregel (*) im vorangegangenen Beweis kann leicht verallgemeinert werden: Man findet heraus, dass Kurvenintegrale \int_{γ} die Summation in Laurentreihen $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_1)^n$ allgemein miteinander vertauscht werden können, sofern sich $\gamma([a, b])$ im assoziierten Kreisringgebiet $A_{r,R}(z_1)$ aufhält. Der Beweis hierzu ist den Lesenden als Übungsaufgabe überlassen

Für uns von zentraler Bedeutung ist der Fall $r = 0$ in Proposition 224, d.h. L konvergiert auf einer *punktierten Kreisscheibe* $A_{0,R}(z_1) = B_R(z_1) \setminus \{z_1\}$. Es wird sich herausstellen, dass sich jede Funktion $f \in \mathcal{H}(B_R(z_1) \setminus \{z_1\})$ mit isolierter Singularität bei z_1 in eine solche Laurentreihe entwickeln lässt. Eine besondere Rolle in unserem Studium der Kurvenintegrale wird dann der -1 'ste Koeffizient c_{-1} einer solchen Laurentreihe einnehmen, das sogenannte *Residuum*.

Definiton 226. RESIDUUM. Es sei für $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ und $z_1 \in \mathbb{C}$ der Ausdruck $L(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - z_1)^n$ eine auf $A_{0,R}(z_1)$ ($R > 0$) konvergente Laurentreihe mit Wertefunktion f_L . Dann heißt

$$\text{Res}(f_L, z_1) := c_{-1} \quad (943)$$

das *Residuum* von f_L an der Stelle z_1

Bemerkung 227. Die Definition in (943) ist nur deswegen sinnvoll, weil sich die Laurentkoeffizienten $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ aus f_L eindeutig rekonstruieren lassen, vgl. (924). Insbesondere liefert (924)

$$\text{Res}(f_L, z_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_{\rho}(z_1)} f_L(z) (z - z_1)^0 dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_{\rho}(z_1)} f_L(z) dz. \quad (944)$$

Nun werden wir zeigen, dass sich holomorphe Funktionen auf Kreisringgebieten stets als Laurentreihen schreiben lassen. Hierzu zunächst ein vorbereitendes Lemma

Lemma 228. Es sei $f \in \mathcal{H}(D)$ für ein Gebiet $D \supset \overline{A_{r,R}(a)}$, ($a \in \mathbb{C}$, $R > r > 0$). Dann gilt für alle $w \in A_{r,R}(a)$

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\partial B_R(a)} \frac{f(z)}{z-w} dz - \int_{\partial B_r(a)} \frac{f(z)}{z-w} dz \right). \quad (945)$$

Beweis. Nach Korollar 161 ist $g : D \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch

$$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z)-f(w)}{z-w} & z \neq w \\ f'(w) & z = w \end{cases} \quad (946)$$

holomorph auf D . Nach Korollar 146 (dessen Voraussetzungen erfüllt sind weil $D \supset \overline{A_{r,R}(a)} = \overline{B_R(a)} \setminus B_r(a)$) gilt dann

$$\int_{\partial B_R(a)} g(z) dz = \int_{\partial B_r(a)} g(z) dz. \quad (947)$$

Somit gilt (da $w \notin \partial B_R(a)$, $w \notin \partial B_r(a)$)

$$\int_{\partial B_R(a)} \frac{f(z) - f(w)}{z-w} dz = \int_{\partial B_r(a)} \frac{f(z) - f(w)}{z-w} dz. \quad (948)$$

Wir folgern

$$\int_{\partial B_R(a)} \frac{f(z)}{z-w} dz - \int_{\partial B_R(a)} \frac{f(w)}{z-w} dz = \int_{\partial B_r(a)} \frac{f(z)}{z-w} dz - \int_{\partial B_r(a)} \frac{f(w)}{z-w} dz. \quad (949)$$

Da $f(w)$ eine Konstante für die Integration bezüglich z ist, kann es vor das Integral vorgezogen werden und man erhält

$$\int_{\partial B_R(a)} \frac{f(z)}{z-w} dz - f(w) \int_{\partial B_R(a)} \frac{1}{z-w} dz = \int_{\partial B_r(a)} \frac{f(z)}{z-w} dz - f(w) \int_{\partial B_r(a)} \frac{1}{z-w} dz. \quad (950)$$

Nun gilt: Da $w \in B_R(a)$ ist nach der Cauchy-Integralformel $\int_{\partial B_R(a)} \frac{1}{z-w} dz = 2\pi i$. Da jedoch $w \notin \overline{B_r(a)}$ ist $z \mapsto \frac{1}{z-w}$ auf einer offenen Obermenge von $\overline{B_r(a)}$ holomorph. Der Cauchy-Integralsatz impliziert dann $\int_{\partial B_r(a)} \frac{1}{z-w} dz = 0$. Mit diesen Informationen liefert (950)

$$\int_{\partial B_R(a)} \frac{f(z)}{z-w} dz - 2\pi i f(w) = \int_{\partial B_r(a)} \frac{f(z)}{z-w} dz. \quad (951)$$

Stellen wir nach $f(w)$ um so folgt die Behauptung.

Nun können wir den *Laurentreihenentwicklungssatz* beweisen.

Satz 229. LAURENTREIHENENTWICKLUNGSSATZ. Es sei $a \in \mathbb{C}$ und $R, r \geq 0$, $R > r$. Sei $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ für ein Gebiet Ω mit

$$\begin{cases} \Omega \supset \overline{A_{r,R}(a)} & \text{falls } r > 0 \\ \Omega \supset \overline{B_R(a)} \setminus \{a\} & \text{falls } r = 0 \end{cases}. \quad (952)$$

Dann gibt es eine eundeutige Laurentreihe

$$L(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - a)^n, \quad (953)$$

die auf $A_{r,R}(a)$ konvergiert und so, dass

$$f(z) = f_L(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n \quad \forall z \in A_{r,R}(a). \quad (954)$$

Für alle $n \in \mathbb{Z}$ und $\rho \in (r, R)$ sind die *Laurentkoeffizienten* c_n durch die Formel

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho(a)} f(z) (z - a)^{-(n+1)} dz \quad (955)$$

gegeben.

Beweis. Wir müssen nur die Existenz der oben beschriebenen Laurentreihe zeigen. Die Eindeutigkeit folgt direkt aus Proposition 224.

ZU FALL 1. $r > 0$. In diesem Fall ist nach (952) $\Omega \supset \overline{A_{r,R}(a)}$ und $r, R > 0$. Deswegen dürfen wir hier Lemma 228 anwenden. Nach dem vorigen Lemma gilt für $w \in A_{r,R}(a) = B_R(a) \setminus \overline{B_r(a)}$

$$2\pi i f(w) = \int_{\partial B_R(a)} \frac{f(\xi)}{\xi - w} d\xi - \int_{\partial B_r(a)} \frac{f(\xi)}{\xi - w} d\xi \quad (956)$$

$$= \int_{\partial B_R(a)} \frac{f(\xi)}{(\xi - a) - (w - a)} d\xi - \int_{\partial B_r(a)} \frac{f(\xi)}{(\xi - a) - (w - a)} d\xi \quad (957)$$

$$= \int_{\partial B_R(a)} \frac{f(\xi)}{\xi - a} \frac{1}{1 - \frac{w-a}{\xi-a}} d\xi - \int_{\partial B_r(a)} \frac{f(\xi)}{w - a} \frac{1}{\left(\frac{\xi-a}{w-a} - 1\right)} d\xi \quad (958)$$

$$= \int_{\partial B_R(a)} \frac{f(\xi)}{\xi - a} \frac{1}{1 - \frac{w-a}{\xi-a}} d\xi + \int_{\partial B_r(a)} \frac{f(\xi)}{w - a} \frac{1}{1 - \frac{\xi-a}{w-a}} d\xi. \quad (959)$$

Beachte nun: Für $\xi \in \partial B_R(a)$ gilt $\left| \frac{w-a}{\xi-a} \right| = \frac{|w-a|}{|\xi-a|} = \frac{|w-a|}{R} < 1$ und für $\xi \in \partial B_r(a)$ gilt $\left| \frac{\xi-a}{w-a} \right| = \frac{|\xi-a|}{|w-a|} = \frac{r}{|w-a|} < 1$. Dies erlaubt uns im ersten Summanden die geometrische

Reihendarstellung

$$\frac{1}{1 - \frac{w-a}{\xi-a}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w-a}{\xi-a} \right)^n, \quad (960)$$

und im zweiten Summanden

$$\frac{1}{1 - \frac{\xi-a}{w-a}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\xi-a}{w-a} \right)^n. \quad (961)$$

Einsetzen dieser Reihendarstellung und Vertauschung von Reihe und Integral (welche wir hier nicht näher begründen und nur auf Bemerkung 225 verweisen) liefert

$$2\pi i f(w) = \int_{\partial B_R(a)} \frac{f(\xi)}{\xi-a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w-a}{\xi-a} \right)^n d\xi + \int_{\partial B_r(a)} \frac{f(\xi)}{w-a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\xi-a}{w-a} \right)^n d\xi \quad (962)$$

$$= \int_{\partial B_R(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} (w-a)^n d\xi + \int_{\partial B_r(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\xi)(\xi-a)^n}{(w-a)^{n+1}} d\xi \quad (963)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{\partial B_R(a)} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi \right) (w-a)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{\partial B_r(a)} f(\xi)(\xi-a)^n d\xi \right) (w-a)^{-(n+1)} \quad (964)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{\partial B_R(a)} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi \right) (w-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{\partial B_r(a)} f(\xi)(\xi-a)^{n-1} d\xi \right) (w-a)^{-n} \quad (965)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{\partial B_R(a)} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi \right) (w-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{\partial B_r(a)} f(\xi)(\xi-a)^{-(-n)-1} d\xi \right) (w-a)^{-n} \quad (966)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{\partial B_R(a)} f(\xi)(\xi-a)^{-(n+1)} d\xi \right) (w-a)^n \quad (967)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{\partial B_r(a)} f(\xi)(\xi-a)^{-[(-n)+1]} d\xi \right) (w-a)^{-n} \quad (968)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_1)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z - z_1)^{-n}, \quad (969)$$

wobei

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(a)} f(z)(z-a)^{-(n+1)} dz & n \geq 0 \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(a)} f(z)(z-a)^{-(n+1)} dz & n < 0 \end{cases}. \quad (970)$$

Nach Korollar 146 dürfen wir in beiden Fällen den Radius zu ρ verändern und erhalten so

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho(a)} f(z)(z-a)^{-(n+1)} dz \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (971)$$

ZU FALL 2. Es sei $\rho \in (0, R)$ und $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ gegeben wie in (955). Wähle nun ein beliebiges $\tilde{r} \in (0, \rho)$. Nach (952) gilt $\Omega \supset \overline{B_r(a)} \setminus \{a\} \supset A_{\tilde{r}, R}(a)$. Wenden wir Fall 1 auf $A_{\tilde{r}, R}(a)$ an, so folgt

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n \quad \forall z \in A_{\tilde{r}, R}(a). \quad (972)$$

Da $\tilde{r} \in (0, \rho)$ beliebig war, muss die Laurentreihe auf $\bigcup_{\tilde{r} \in (0, \rho)} A_{\tilde{r}, R}(a) \stackrel{\text{ÜA}}{=} A_{0, R}(a)$ konvergieren. Wir folgern, dass die Gleichheit (972) auf $A_{0, R}(a)$ gilt, was zu zeigen war.

Bemerkung 230. Sei $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Ist $z_0 \in \mathbb{C}$ eine isolierte Singularität von f so gibt es stets ein $R > 0$ mit $\Omega \supset B_R(z_0) \setminus \{z_0\}$. Aus dem vorangegangenen Satz folgern wir, dass es stets möglich ist f auf $A_{0, R}(z_0)$ in eine Laurentreihe $L(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - z_0)^n$ zu entwickeln, d.h. $f(z) = f_L(z)$ für alle $z \in A_{0, R}(z_0)$. Für den -1 'sten Koeffizient dieser Laurentreihe gilt dann

$$\text{Res}(f, z_0) := \text{Res}(f_L, z_0) = c_{-1}. \quad (973)$$

Beispiel 231.

- (i) Wir entwickeln die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{1-z}$ auf $A_{0, \infty}(1)$ in eine Laurentreihe. Dazu:

$$\frac{1}{1-z} = \frac{-1}{z-1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-1)^n, \quad (974)$$

wobei $c_n = \begin{cases} -1 & n = -1 \\ 0 & n \neq -1 \end{cases}$. Wir folgern also $\text{Res}(f, -1) = -1$. Wir haben hier als

Entwicklungspunkt die Singularität $z_1 = 1$ gewählt. Eine Laurentreihe muss aber nicht unbedingt um eine Singularität zentriert sein, wie wir in Teil (ii) und (iii) sehen werden.

- (ii) Für $f : \mathbb{C} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{1-z}$ wie in (i) suchen wir eine Laurentreihendarstellung auf $A_{0, 1}(0)$. Beachte: Da f auf $B_1(0)$ holomorph ist, lässt f sich dort in eine Potenzreihe entwickeln, nämlich wie folgt:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n. \quad (975)$$

Eine solche Potenzreihendarstellung ist nun auch eine Laurentreihendarstellung. Wegen der Eindeutigkeit (224) gibt es auf $A_{0, 1}(0)$ auch keine andere Laurentreihendarstellung. Dies führt zu der folgenden allgemeinen Beobachtung: Wenn sich eine Funktion auf einen kompletten Kreisringgebiet als Potenzreihe darstellen lässt, stimmen Laurentreihendarstellung und Potenzreihendarstellung überein. Für das Residuum gilt dann $\text{Res}(f, 0) = 0$.

(iii) Eine Veränderung des Kreisringgebietes kann jedoch durchaus zu einer anderen Laurentreihendarstellung führen, denn die Eindeutigkeit der Darstellung gilt nur auf einem fixierten Kreisringgebiet. So zum Beispiel erhält man für $f : \mathbb{C} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{1-z}$ wie in (i)/(ii) eine andere Laurentreihendarstellung auf $A_{1,\infty}(0)$. In der Tat gilt für $|z| > 1$ dass $|\frac{1}{z}| < 1$ und daher

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{z} \frac{1}{(\frac{1}{z} - 1)} = -\frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n \quad (976)$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^{-(n+1)} = -\sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} \quad (977)$$

Beispiel 232. Wir bestimmen die Laurentreihendarstellung von $f(z) = \sin \frac{1}{z}$ auf $A_{0,\infty} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Beachte, dass für alle $w \in \mathbb{C}$ gilt

$$\sin w = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} w^{2k+1} \quad (978)$$

Setzen wir $w = \frac{1}{z}$ ein, so erhalten wir

$$\sin \frac{1}{z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left(\frac{1}{z}\right)^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{-2k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} z^{-2k+1} \quad (979)$$

Es folgt

$$\sin\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n z^n \quad (980)$$

für

$$c_n = \begin{cases} \frac{(-1)^{-k-1}}{(2(-k)-1)!} & n = 2k+1, k < 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (981)$$

Das Residuum ist dann gegeben durch $\text{Res}(f, 0) = c_{-1} = \frac{(-1)^{-2}}{1!} = 1$.

Zu Abschluss dieses Abschnittes möchten wir klären, ob und wie man aus der Laurentreihenentwicklung die Art der Singularität ablesen kann.

Proposition 233. Es sei $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ und $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ eine isolierte Singularität von f . Ferner sei $L(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - z_0)^n$ eine in $A_{0,R}(z_0)$ ($R > 0$) konvergente Laurentreihe, so, dass $f(z) = f_L(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ für alle $z \in A_{0,R}(z_0)$.

- (i) z_0 ist genau dann eine hebbare Singularität wenn der Hauptteil von L verschwindet.
- (ii) z_0 ist genau dann eine Polstelle, wenn der Hauptteil von L nicht verschwindet aber eine *abbrechende endliche Summe* ist, d.h. es gibt ein $N \in \mathbb{N}$ mit $c_n = 0$ für alle

$n < -N$. (Hierbei kann übrigens $N = \text{Ord}(f, z_0)$ gewählt werden)

(iii) z_0 ist genau dann eine wesentliche Singularität wenn unendlich viele Summanden im Hauptteil von L nicht verschwinden.

Beweis. Zu (i). ‘ \Leftarrow ’: Ist z_0 eine hebbare Singularität, so ist f nach dem Riemann’schen Hebbarkeitssatz (Satz 217) auf die offene Menge $\Omega \cup \{z_0\}$ holomorph fortsetzbar. Sei nun $R > 0$ so, dass $B_R(z_0) \subset \Omega \cup \{z_0\}$. Nach dem Potenzreihenentwicklungssatz (Satz 158) ist die holomorphe Fortsetzung von f dann auf $B_R(z_0)$ als Potenzreihe darstellbar. Diese Potenzreihe muss dann auf $A_{0,R}(z_0)$ auch die Laurentreihe sein (wegen der Eindeutigkeit von Laurentreihendarstellungen). Potenzreihen sind aber nun gerade diejenigen Laurentreihen, für die der Hauptteil verschwindet, vgl. Definition 222.

‘ \Rightarrow ’: Verschwindet der Hauptteil von L , so ist L eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt z_0 . Da solche Potenzreihen stets auf einem Kreisgebiet konvergieren muss diese Potenzreihe gleich auf ganz $B_R(z_0)$ konvergieren. Somit ist sie aber auch in $B_R(z_0)$ holomorph und damit auch auf $B_s(z_0)$ beschränkt für alle $s < R$. Somit ist auch $|f| = |f_L|$ in einer Umgebung von z_0 beschränkt und die Singularität ist hebbar.

Zu (ii). ‘ \Rightarrow ’. Ist z_0 eine Polstelle von f , so gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ so, dass $z \mapsto (z - z_0)^m f(z)$ eine hebbare Singularität bei z_0 hat. Dann gibt es nach Teil (i) $(c_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{C}$ so dass

$$(z - z_0)^m f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad \forall z \in A_{0,R}(z_0). \quad (982)$$

Teilen wir durch $(z - z_0)^m$ so ergibt sich

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^{n-m} = \sum_{n=-m}^{\infty} c_{n+m} (z - z_0)^n \quad \forall z \in A_{0,R}(z_0). \quad (983)$$

Dies ist dann (aufgrund der Eindeutigkeit der Laurentreihendarstellung) die Laurentreihe von f und ihr Hauptteil $\sum_{n=-m}^{-1} c_n (z - z_0)^n$ ist eine abbrechende Summe.

Zu ‘ \Leftarrow ’: Ist der Hauptteil der Laurentreihe in $A_{0,R}(z_0)$ eine abbrechende endliche Summe, so gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass

$$f(z) = \sum_{n=-N}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad \forall z \in A_{0,R}(z_0). \quad (984)$$

Dann gilt für alle $z \in A_{0,R}(z_0)$

$$(z - z_0)^N f(z) = (z - z_0)^N \sum_{n=-N}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=-N}^{\infty} c_n (z - z_0)^{n+N} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n-N} (z - z_0)^n. \quad (985)$$

Somit ist $z \mapsto (z - z_0)^N f(z)$ in einer Umgebung von 0 in eine Potenzreihe entwickelbar. Daher ist diese Funktion in einer Umgebung von z_0 beschränkt und besitzt folglich eine hebbare Singularität. (iii) ist logische Konsequenz aus (i) und (ii).

4.3 Der Residuensatz

Wir lernen nun das zentrale Resultat der Vorlesung kennen — den *Residuensatz*, welcher sämtliche kennengelernten Integralsätze verallgemeinert.

Satz 234. RESIDUENSATZ. Es sei $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ und der erweiterte Definitionsbereich $D = \Omega \cup \text{Iso}(f, \Omega)$ sei ein Elementargebiet. Dann gilt für alle geschlossenen, stückweise C^1 -Kurven $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$

$$\int_{\gamma} f(z) \, dz = 2\pi i \sum_{w \in \text{Iso}(f, \Omega)} \text{Res}(f, w) n(\gamma, w). \quad (986)$$

Hierbei sind in der Summe auf der rechten Seite stets nur endlich viele Terme verschieden von Null und daher ist die Summe stets wohldefiniert.

Bevor wir diesen Satz beweisen möchten wir schonmal klären, warum nur endlich viele Terme der Summe nicht verschwinden.

Lemma 235. Es sei $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ mit erweitertem Definitionsbereich $D = \Omega \cup \text{Iso}(f, \Omega)$, der ein Elementargebiet ist. Ferner sei $\gamma : [a, b] \rightarrow D$ geschlossen und stückweise C^1 . Wir definieren

$$S := \{w \in \text{Iso}(f, \Omega) : n(\gamma, w) \neq 0\}. \quad (987)$$

Dann ist S endlich.

Beweis. Wir zeigen die Behauptung in zwei Schritten.

Schritt 1. S ist beschränkt. Dazu: Sei $w \in \mathbb{C}$ mit $|w| > \frac{L(\gamma)}{2\pi} + \max_{\xi \in \gamma([a, b])} |\xi|$. Wir behaupten, dass dann $n(\gamma, w) = 0$. Dazu: Zum einen gilt $n(\gamma, w) \in \mathbb{Z}$ und zum anderen

$$|n(\gamma, w)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z - w} \, dz \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\gamma} \frac{1}{z - w} \, dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} L(\gamma) \sup_{z \in \gamma([a, b])} \frac{1}{|z - w|} \quad (988)$$

$$\stackrel{\text{inverse}}{\leq} \frac{L(\gamma)}{2\pi} \sup_{z \in \gamma([a, b])} \frac{1}{|w| - |z|} = \frac{L(\gamma)}{2\pi} \frac{1}{|w| - \sup_{z \in \gamma([a, b])} |z|} \quad (989)$$

$$= \frac{L(\gamma)}{2\pi} \frac{1}{|w| - \max_{z \in \gamma([a, b])} |z|} < \frac{L(\gamma)}{2\pi} \frac{1}{\frac{L(\gamma)}{2\pi} + \max_{z \in \gamma([a, b])} |z| - \max_{z \in \gamma([a, b])} |z|} = 1 \quad (990)$$

Wir folgern $|n(\gamma, w)| < 1$. Die einzige ganze Zahl die jedoch betragsmäßig kleiner als 1 ist ist die Null und wir schließen $n(\gamma, w) = 0$. Somit ist also $w \notin S$. Wir haben also gezeigt, dass S kein Element mit Betrag größer als $\frac{L(\gamma)}{2\pi} + \max_{\xi \in \gamma([a, b])} |\xi|$ enthält.

Schritt 2. S ist endlich. Angenommen S ist unendlich. Dann gäbe es eine Folge $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ verschiedener Elemente in S . Diese Folge hätte dann als (nach Schritt 1) beschränkte Folge eine konvergente Teilfolge $(w_{l_n})_{n \in \mathbb{N}}$. Sei etwa ζ der Grenzwert dieser Teilfolge.

FALL 1. $\zeta \notin D$. Dann ist $z \mapsto \frac{1}{z-\zeta}$ holomorph auf D . Der Cauchy'sche Integralsatz für Elementargebiete besagt dann, dass $\int_\gamma \frac{1}{z-\zeta} dz = 0$. Insbesondere $n(\gamma, \zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z-\zeta} dz = 0$. Übungsaufgabe 1 auf Blatt 11 impliziert, dass es ein $r > 0$ gibt mit $n(\gamma, w) = 0$ für alle $w \in B_r(\zeta)$. Da nun aber $w_{l_n} \rightarrow \zeta$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $w_{l_N} \in B_r(\zeta)$, d.h. $n(\gamma, w_{l_N}) \neq 0$. Ein Widerspruch, denn $w_{l_N} \in S$ impliziert, dass $n(\gamma, w_{l_N}) \neq 0$.

FALL 2. $\zeta \in D$. Hier gibt es wieder zwei Möglichkeiten: $\zeta \in \Omega$ oder $\zeta \in \text{Iso}(f, \Omega)$.

FALL 2.1. $\zeta \in \Omega$. Da Ω offen ist gibt es ein $r > 0$ mit $B_r(\zeta) \subset \Omega$. Jedoch muss es dann ein $N \in \mathbb{N}$ geben sodass $w_{l_N} \in B_r(\zeta) \subset \Omega$. Ein Widerspruch, da w_{l_N} eine isolierte Singularität von f ist.

FALL 2.2. $\zeta \in \text{Iso}(f, \Omega)$. Dann gibt es nach Bemerkung 208 ein $r > 0$ so, dass $B_r(\zeta) \setminus \{\zeta\} \subset \Omega$. Da alle Elemente $(w_{l_n})_{n \in \mathbb{N}} \subset S$ verschieden sind, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $w_{l_N} \neq \zeta$ und $w_{l_N} \in B_r(\zeta)$, d.h. $w_{l_N} \in B_r(\zeta) \setminus \{\zeta\} \subset \Omega$. Mal wieder ein Widerspruch dazu, dass w_{l_N} eine isolierte Singularität ist.

Da die Summe in (986) auch als Summe über S geschrieben werden kann

Bemerkung 236. Auf die Voraussetzung, dass D im obigen Lemma ein Elementargebiet ist, kann nicht verzichtet werden. Als Beispiel betrachte $\Omega = \mathbb{C} \setminus (\{0\} \cup \{\frac{1}{\pi n} : n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\})$ und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch $f(z) = \frac{1}{\sin \frac{1}{z}}$. Wie in Beispiel 212 gesehen ist $\text{Iso}(f, \Omega) = \{\frac{1}{\pi n} : n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$ und $D = \Omega \cup \text{Iso}(f, \Omega) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (was kein Elementargebiet ist, vgl. Beispiel 168). Definiert man nun $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \Omega$ durch $\gamma(t) = e^{it}$, ($t \in [0, 2\pi]$) so ist

$$S = \{w \in \text{Iso}(f, \Omega) : n(\gamma, w) \neq 0\} \quad (991)$$

nicht endlich, da $n(\gamma, \frac{1}{n\pi}) = 1$ für alle $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Man sieht also auch, dass beim Residuensatz die Voraussetzung, dass D ein Elementargebiet ist, unverzichtbar ist (denn andernfalls ist die Summe in (986) nicht zwingend endlich).

Nun können wir den Residuensatz beweisen. Allerdings werden wir nur den Spezialfall zeigen, dass $\text{Iso}(f, \Omega)$ endlich ist. Für den allgemeineren Fall hätten wir einen allgemeineren Aufbau der Vorlesung, z.B. des Cauchy'schen Integralsatzes wählen müssen. In der Praxis soll uns das nicht stören, schließlich ist die Menge der *relevanten* Singularitäten S (vgl. (987)) stets endlich. Man kann diese Endlichkeit also durch geeignete *Verkleinerung* des Gebietes D erreichen. Das Problem: Die Verkleinerung eines Elementargebietes bleibt nicht zwingend ein Elementargebiet. Daher wären an dieser Stelle weitere Untersuchungen über Elementargebiete notwendig.

Beweis von Satz 234. Es seien $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ wie in der Aussage. Wir beweisen die Behauptung (wie angekündigt) nur unter der zusätzlichen Annahme, dass $\text{Iso}(f, \Omega) = \{w_1, \dots, w_\ell\}$ endlich ist. Für alle $k = 1, \dots, \ell$ ist gibt es ein $R_k > 0$ so, dass $B_{R_k}(w_k) \setminus \{w_k\} \subset \Omega$ (da w_k eine isolierte Singularität ist). Auf $A_{0, R_k}(w_k)$ ist f dann wegen

Satz 229 als Laurentreihe darstellbar, etwa seien $(c_n^{(k)})_{n \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$ so, dass

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^{(k)} (z - w_k)^n \quad \forall z \in A_{0, R_k}(w_k). \quad (992)$$

Insbesondere ist $c_{-1}^{(k)} = \text{Res}(f, w_k)$ für alle $k = 1, \dots, \ell$. Wir definieren nun für $k = 1, \dots, \ell$ Hilfsfunktionen $h_k : \mathbb{C} \setminus \{w_k\} \rightarrow \mathbb{C}$, die die *Hauptteile* der Laurentreihen repräsentieren, d.h.

$$h_k(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}^{(k)}}{(z - w_k)^n} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{w_k\}. \quad (993)$$

Man beachte: Die Hauptteile der Laurentreihe konvergieren in $A_{0, \infty}(w_k) = \mathbb{C} \setminus \{w_k\}$ und nicht nur in $A_{0, R_k}(w_k)$, denn die Konvergenz der Laurentreihe in $A_{0, R_k}(w_k)$ impliziert, dass $r = 0$ in Bemerkung 223. Mit (919) für $r = 0$ folgt dann Konvergenz des Hauptteils in $A_{0, \infty}(w_k) = \{z \in \mathbb{C} : |z - w_k| > 0\}$. Deswegen ist h_k wohldefiniert. Definiere nun auch $h : \mathbb{C} \setminus \{w_1, \dots, w_\ell\}$ durch

$$h(z) := \sum_{j=1}^{\ell} h_j(z). \quad (994)$$

Zwischenbehauptung. $f - h : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ hat eine holomorphe Fortsetzung auf D . Dazu: Da $\text{Iso}(f, \Omega) = \text{Iso}(h, \Omega) = \{w_1, \dots, w_\ell\}$ gilt $\text{Iso}(f - h, \Omega) = \{w_1, \dots, w_\ell\}$. Es genügt zu zeigen, dass für alle $k = 1, \dots, \ell$ der Punkt w_k eine hebbare Singularität von $f - h$ ist (denn dann kann $f - h$ nach ℓ -maliger Anwendung des Riemann'schen Hebbarkeitssatzes holomorph auf alle Singularitäten fortgesetzt werden). Sei nun $k \in \{1, \dots, \ell\}$. Da $B_{R_k}(w_k) \setminus \{w_k\} \subset \Omega$ gilt $w_j \notin B_{R_k}(w_k)$ für alle $j \neq k$. Insbesondere ist für alle $j \neq k$ die Abbildung h_j holomorph auf $B_{R_k}(w_k)$ (da h_j eine in $\mathbb{C} \setminus \{w_j\}$ konvergente und somit dort auch holomorphe Laurentreihe ist, vgl. Bemerkung 223). Nun gilt für $z \in B_{R_k}(w_k) \setminus \{w_k\}$, dass

$$(f - h)(z) = f(z) - h(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^{(k)} (z - w_k)^n - \sum_{j=1}^{\ell} h_j(z) \quad (995)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^{(k)} (z - w_k)^n - \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}^{(j)}}{(z - w_j)^n} \quad (996)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(k)} (z - w_k)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}^{(k)}}{(z - w_k)^n} - \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}^{(j)}}{(z - w_j)^n} \quad (997)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(k)} (z - w_k)^n - \sum_{j=1, j \neq k}^{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}^{(j)}}{(z - w_j)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(k)} (z - w_k)^n - \sum_{j=1, j \neq k}^{\ell} h_j. \quad (998)$$

Der erste Summand ist nun eine in $B_{R_k}(w_k)$ konvergente Potenzreihe (vgl. Bemerkung 223 und Satz 229). Wie bereits gesagt ist auch für alle $j \neq k$ die Funktion h_j holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{w_j\} \supset B_{R_k}(w_k)$. Man folgert aus (998), dass $f - h$ holomorph auf $B_{R_k}(w_k)$ fortgesetzt

werden kann. Daher muss eine hebbare Singularität vorliegen. Insgesamt gibt es also ein $g \in \mathcal{H}(D)$ mit $g|_{\Omega} = f - h$. **Ende der Zwischenbehauptung.**

Nach dem Cauchy'schen Integralsatz für Elementargebiete (vgl. Proposition 170) gilt

$$0 = \int_{\gamma} g(z) dz = \int_{\gamma} (f(z) - h(z)) dz = \int_{\gamma} f(z) dz - \int_{\gamma} h(z) dz, \quad (999)$$

also

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} h(z) dz \quad (1000)$$

Nun gilt

$$\int_{\gamma} h(z) dz = \sum_{j=1}^{\ell} \int_{\gamma} h_j(z) dz = \sum_{j=1}^{\ell} \int_{\gamma} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}^{(j)}}{(z - w_j)^n} dz \quad (1001)$$

$$\stackrel{\text{Bemerkung 225}}{=} \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}^{(j)} \int_{\gamma} \frac{1}{(z - w_j)^n} dz \quad (1002)$$

Nach Goursat's Beobachtung (Korollar 203) gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{\gamma} \frac{1}{(z - w_j)^n} dz = \int_{\gamma} \frac{1}{(z - w_j)^{(n-1)+1}} dz = \frac{2\pi i}{(n-1)!} \partial_z^{n-1}(1)n(\gamma, w_j) \quad (1003)$$

$$= \begin{cases} 2\pi i n(\gamma, w_j) & n = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}. \quad (1004)$$

Daraufhin implizieren (1000) und (1002)

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} h(z) dz = \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}^{(j)} \int_{\gamma} \frac{1}{(z - w_j)^n} dz \stackrel{(1004)}{=} \sum_{j=1}^{\ell} c_{-1}^{(j)} [2\pi i n(\gamma, w_j)]. \quad (1005)$$

Setzen wir nun ein, dass $c_{-1}^{(j)} = \text{Res}(f, w_j)$ so folgt die Behauptung.

Der Rest dieses Kapitels wird uns befähigen, den Residuensatz (Satz 234) anzuwenden. Wer möchte kann den Satz aber jetzt schon üben: Wir können alle Beispiele aus dieser Vorlesung und alle Integrale, die wir in den Übungsaufgaben berechnet haben fortan auch mit dem Residuensatz berechnen. Ich lade Sie dazu ein, die zu tun und zu untersuchen, welche der Integrale einfacher zu berechnen werden. Warten Sie aber eventuell noch ab, bis zum nächsten Abschnitt, da wir dort noch eine wichtige Methode diskutieren um Residuen zu bestimmen.

4.3.1 Residuenbestimmung

Um den Residuensatz anwenden zu können, müssen wir zuerst lernen, wie Residuen in der Realität bestimmt werden können.

Bemerkung 237. Haben wir $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben und eine hebbare Singularität bei $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ vorliegen, so ist die Residuenbestimmung einfach: Das Residuum ist stets gleich 0! Dies liegt daran, dass wegen Proposition 233 gleich der gesamte Hauptteil der Laurentreihe um z_0 (und somit auch das Residuum) verschwinden muss.

Wir werden sehen, dass wir bei Polstellen eine dankbar auszuwertende Formel für das Residuum haben.

Proposition 238. RESIDUENBESTIMMUNG BEI POLSTELLEN. Es sei $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$ und $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ eine Polstelle von f mit $\text{Ord}(f, z_0) \leq k$. Dann gilt

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \partial_z^{k-1} [(z - z_0)^k f(z)]. \quad (1006)$$

Beweis. Da $\text{Ord}(f, z_0) \leq k$ hat $g_k(z) := (z - z_0)^k f(z)$ eine hebbare Singularität, vgl. Bemerkung 215. Somit hat g_k eine holomorphe Fortsetzung auf $\Omega \cup \{z_0\}$, nennen wir diese $p : \Omega \cup \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$. Nach dem Potenzreihenentwicklungssatz gibt es nun $(\tilde{c}_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ und $r > 0$ so, dass $B_r(z_0) \subset \Omega \cup \{z_0\}$ und

$$p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{c}_n (z - z_0)^n \quad \forall z \in B_r(z_0) \quad (1007)$$

Beachte, dass (weil $c_n = \frac{p^{(n)}(z_0)}{n!}$)

$$\tilde{c}_{k-1} = \frac{1}{(k-1)!} p^{(k-1)}(z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} p^{(k-1)}(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \partial_z^{k-1} [(z - z_0)^k f(z)], \quad (1008)$$

wobei wir im letzten Schritt benutzt haben, dass für $z \neq z_0$ gilt, dass $p(z) = g_k(z) = (z - z_0)^k f(z)$. Wir behaupten nun, dass $\tilde{c}_{k-1} = \text{Res}(f, z_0)$. Dazu: (1007) liefert, dass für alle $z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$

$$(z - z_0)^k f(z) = p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{c}_n (z - z_0)^n. \quad (1009)$$

Teilen durch $(z - z_0)^k$ liefert

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{c}_n (z - z_0)^{n-k} = \sum_{n=-k}^{\infty} \tilde{c}_{n+k} (z - z_0)^n \quad \forall z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\}. \quad (1010)$$

Dies ist wegen der Eindeutigkeit der Laurentreihendarstellung (vgl. Proposition 224) die Laurentreihendarstellung von f in $A_{0,R}(z_0)$. Das Residuum ist dann gerade der Koeffizient

der, also $\tilde{c}_{-1+k} = \tilde{c}_{k-1}$. Wir folgern

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \tilde{c}_{k-1} = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \partial_z^{k-1} [(z - z_0)^k f(z)], \quad (1011)$$

was zu zeigen war.

Als Korollar erhalten wir eine Formel die angibt, wie bei der Quotientendarstellung aus Lemma 220 das Residuum bestimmt werden kann, sofern der Nenner Nullstellenordnung 1 hat. Dieser Fall ist in der Anwendung besonders wichtig.

Korollar 239. Es sei $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ mit einer Polstelle bei $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ und $g, h \in \mathcal{H}(\Omega \cup \{z_0\})$ so, dass $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ und $h(z_0) = 0$. (Für die Existenz solcher g, h vgl. Proposition 218). Ist $\operatorname{ord}(h, z_0) = 1$, so gilt

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}. \quad (1012)$$

Beweis. Es seien f, g, h wie in der Aussage, d.h. $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ für alle $z \in \Omega$. Nach Proposition 220 gilt

$$\operatorname{Ord}(f, z_0) = \operatorname{ord}(h, z_0) - \operatorname{ord}(g, z_0) \leq \operatorname{ord}(h, z_0) = 1. \quad (1013)$$

Es gilt aber, da z_0 eine Polstelle von f ist, auch $\operatorname{Ord}(f, z_0) \geq 1$. Daher haben wir $\operatorname{Ord}(f, z_0) = 1$. Proposition 238 impliziert

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{0!} \lim_{z \rightarrow z_0} \partial_z^0 [(z - z_0) f(z)] = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{g(z)}{h(z)}. \quad (1014)$$

Mit

$$\frac{z - z_0}{h(z)} = \frac{z - z_0}{h(z) - h(z_0)} = \frac{1}{\frac{h(z) - h(z_0)}{z - z_0}} \rightarrow \frac{1}{h'(z_0)} \quad (z \rightarrow z_0) \quad (1015)$$

folgt man aus (1014)

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}. \quad (1016)$$

Beispiel 239.

- (i) Wir definieren für ein festes $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $z_0 \in \mathbb{C}$ die Funktion $f(z) := \frac{1}{e^{\alpha z} - e^{\alpha z_0}}$. f hat Polstellen bei $z_\ell = z_0 + \frac{1}{\alpha} 2\ell\pi i$ für sämtliche $\ell \in \mathbb{Z}$. Eine Quotientendarstellung wie in Proposition 218 in einer Umgebung von z_ℓ ist stets gegeben durch $g(z) = 1$ und $h(z) = e^{\alpha z} - e^{\alpha z_0}$. Man beachte dass die Nullstellenordnung des Nenners h stets gleich 1 ist weil $h'(z) = \alpha e^{\alpha z} \neq 0$. Es folgt für alle $\ell \in \mathbb{Z}$

$$\operatorname{Res}(f, z_\ell) = \frac{g(z_\ell)}{h'(z_\ell)} = \frac{1}{\alpha e^{\alpha z_\ell}} = \frac{1}{\alpha e^{\alpha z_0}}. \quad (1017)$$

(ii) Betrachte die Integrale

$$\int_{\partial B_3(0)} \frac{1}{e^z - 1} dz, \quad \int_{\partial B_3(0)} \frac{1}{(e^z - 1)(e^z - 2)} dz, \quad \text{und} \quad \int_{\partial B_3(0)} \frac{1}{(e^z - 1)(z - 2)} dz. \quad (1018)$$

Das erste Integral kann wie in Beispiel 162 berechnet werden. Einfacher geht es nun aber mit dem Residuensatz

$$\int_{\partial B_3(0)} \frac{1}{e^z - 1} dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{e^z - 1}, 0\right) n(\partial B_3(0), 0) \stackrel{(1017)}{=} 2\pi i \frac{1}{1 \cdot e^0} = 2\pi i. \quad (1019)$$

Wer das zweite Integral ohne den Residuensatz berechnen will, würde wohl so vorgehen: Eine Partialbruchzerlegung liefert $\frac{1}{(w-1)(w-2)} = \frac{1}{w-2} - \frac{1}{w-1}$. Setz man hier $w = e^z$ ein so folgert man

$$\int_{\partial B_3(0)} \frac{1}{(e^z - 1)(e^z - 2)} dz = \int_{\partial B_3(0)} \left(\frac{1}{e^z - 2} - \frac{1}{e^z - 1} \right) dz \quad (1020)$$

$$= \int_{\partial B_3(0)} \frac{1}{e^z - 2} dz - \int_{\partial B_3(0)} \frac{1}{e^z - 1} dz. \quad (1021)$$

Die beiden auftauchenden Integrale lassen sich dann berechnen wie in Beispiel 162. Mit dem Residuensatz geht allerdings das alles viel einfacher:

$$\int_{\partial B_3(0)} \frac{1}{(e^z - 1)(e^z - 2)} dz = 2\pi i (\operatorname{Res}\left(\frac{1}{(e^z - 1)(e^z - 2)}, 0\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{1}{(e^z - 1)(e^z - 2)}, \log(2)\right)). \quad (1022)$$

Hierbei haben wir benutzt, dass alle Umlaufzahlen 1 sind, wie man sich leicht geometrisch veranschaulicht. Um $\operatorname{Res}\left(\frac{1}{(e^z - 1)(e^z - 2)}, 0\right)$ zu bestimmen fassen wir $\frac{1}{(e^z - 1)(e^z - 2)}$ als Quotient von $g_1(z) = \frac{1}{e^z - 2}$ und $h_1(z) = e^z - 1$ auf. Genau wie in Teil (i) dieses Beispiels folgern wir

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{(e^z - 1)(e^z - 2)}, 0\right) = \frac{g_1(0)}{h_1'(0)} = \frac{\frac{1}{e^0 - 2}}{e^0} = \frac{1}{1 - 2} = -1. \quad (1023)$$

Um hingegen $\operatorname{Res}\left(\frac{1}{(e^z - 1)(e^z - 2)}, \log 2\right)$ zu bestimmen fassen wir $\frac{1}{(e^z - 1)(e^z - 2)}$ als Quotient von $g_2(z) = \frac{1}{e^z - 1}$ und $h_2(z) = e^z - 2$ auf. Wiederum genau wie in Teil (i) dieses Beispiels folgern wir

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{(e^z - 1)(e^z - 2)}, \log 2\right) = \frac{g_2(\log 2)}{h_2'(\log 2)} = \frac{\frac{1}{e^{\log 2} - 1}}{e^{\log 2}} = \frac{1}{2 - 1} = \frac{1}{2}. \quad (1024)$$

Gleichung (1022) liefert dann

$$\int_{\partial B_3(0)} \frac{1}{(e^z - 1)(e^z - 2)} dz = 2\pi i (-1 + \frac{1}{2}) = -\pi i. \quad (1025)$$

Noch ein Wort zum dritten Integral. Wer dies ohne Residuensatz lösen wollen würde wäre dazu imstande: Hierzu würde man wohl die folgende Umformung machen

$$\int_{\partial B_3(0)} \frac{1}{(e^z - 1)(z - 2)} dz = \int_{\partial B_3(0)} \frac{\frac{z}{e^z - 1}}{z(z - 2)} dz. \quad (1026)$$

Dann würde man $z \mapsto \frac{z}{e^z - 1}$ holomorph fortsetzen und auf $z \mapsto \frac{1}{z(z - 2)}$ eine Partialbruchzerlegung anwenden. Hat man das erfolgreich gemacht, so wird sich jeder Summand mithilfe des Cauchy'schen Integralformel bearbeiten lassen. Je komplexer das wird, desto mühsamer werden die Rechnungen. Die Anwendung des Residuensatzes hingegen wird kein bisschen schwieriger: Es gilt

$$\int_{\partial B_3(0)} \frac{1}{(e^z - 1)(z - 2)} dz = 2\pi i (\text{Res}(\frac{1}{(e^z - 1)(z - 2)}, 0) + \text{Res}(\frac{1}{(e^z - 1)(z - 2)}, 2)) \quad (1027)$$

Zu $\text{Res}(\frac{1}{(e^z - 1)(z - 2)}, 0)$. Definiere $g_1(z) := \frac{1}{z - 2}$, $h_1(z) = e^z - 1$. Dann ist

$$\text{Res}(\frac{1}{(e^z - 1)(z - 2)}, 0) = \frac{g_1(0)}{h_1'(0)} = -1. \quad (1028)$$

Zu $\text{Res}(\frac{1}{(e^z - 1)(z - 2)}, 2)$. Definiere $g_2(z) := \frac{1}{e^z - 1}$, $h_2(z) = z - 2$. Dann ist

$$\text{Res}(\frac{1}{(e^z - 1)(z - 2)}, 2) = \frac{g_2(2)}{h_2'(2)} = \frac{1}{e^2 - 1} = \frac{1}{e^2 - 1}. \quad (1029)$$

Es folgt mit (1027)

$$\int_{\partial B_3(0)} \frac{1}{(e^z - 1)(z - 2)} dz = 2\pi i (-1 + \frac{1}{e^2 - 1}). \quad (1030)$$

Bemerkung 240. Wir haben behauptet, dass der Residuensatz alle vorher gelernten Integralsätze verallgemeinert. Hier zeigen beispielhaft, dass die Cauchy'sche Integralformel aus dem Residuensatz gefolgert werden kann: Sei $\phi \in \mathcal{H}(D)$, D Elementargebiet, und $w \in D$ sowie $\gamma : [a, b] \rightarrow D$ geschlossen und stückweise C^1 . Wir wollen nun $\int_{\gamma} \frac{\phi(z)}{z - w} dz$ mit dem Residuensatz berechnen. Dazu: Beachte, dass die einzige isolierte Singularität von $z \mapsto \frac{\phi(z)}{z - w}$ in D bei $z = w$ vorliegt. Der Residuensatz impliziert

$$\int_{\gamma} \frac{\phi(z)}{z - w} dz = 2\pi i \text{Res}(\frac{\phi(z)}{z - w}, w) n(\gamma, w) \quad (1031)$$

Korollar 239 mit $g(z) = \phi(z)$ und $h(z) = z - w$ impliziert dann

$$\text{Res}(\frac{\phi(z)}{z - w}, w) = \frac{g(w)}{h'(w)} = \frac{\phi(w)}{1}. \quad (1032)$$

Es folgt

$$\int_{\gamma} \frac{\phi(z)}{z-w} dz = 2\pi i \phi(w) n(\gamma, w), \quad (1033)$$

und somit die Cauchy'sche Integralformel. Die Formel, dass für alle $\phi \in \mathcal{H}(B_r(w))$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\phi(z)}{z-w}, w\right) = \phi(w) \quad (1034)$$

ist allgemein sehr hilfreich. Wir werden sie im Folgenden häufiger verwenden.

Wir haben hier die Residuenbestimmung nur für Polstellen diskutiert. Für wesentliche Singularitäten gibt es keine so einfache Formel wie die von und in diesem Kapitel besprochenen. Trotzdem ist es uns zumeist möglich, bei wesentlichen Singularitäten an die Residuen zu kommen: Für die *Paradebeispiele* wie $\sin \frac{1}{z}$, $\exp \frac{1}{z}$ kann wie in Beispiel 232 Laurentreihenentwicklungen bestimmen. Aus denen kann man dann die Residuen einfach ablesen. Dieselbe Technik funktioniert dann auch für $z^m \exp(\frac{1}{z})$ für $m \in \mathbb{Z}$ indem man z^m einfach in die Laurentreihe hineinmultipliziert. Das deckt schon ziemlich viele Funktionen mit wesentlichen Singularitäten ab.

Beispiel 240. Auch wenn der Residuensatz nicht direkt anwendbar ist, sollte man nicht direkt aufgeben. Viele Integrale lassen sich durch geeignete Umformungen auf ein lösbares Integral zurückführen. So kann zum Beispiel auch

$$\int_{\partial B_1(0)} \frac{1}{\sin(\frac{1}{z})} dz \quad (1035)$$

berechnet werden, obwohl der Integrand den Voraussetzungen des Residuensatzes nicht genügt, vgl. Beispiel 236. Definiere hierfür $T : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ durch $T(z) := \frac{1}{z}$. Dann gilt

$$T'(z) = -\frac{1}{z^2} = -\left(\frac{1}{z}\right)^2 = -T(z)^2 \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \quad (1036)$$

Wir folgern dass $\frac{-T'(z)}{T(z)^2} = 1$. Nun berechnen wir

$$\int_{\partial B_1(0)} \frac{1}{\sin(\frac{1}{z})} dz = \int_{\partial B_1(0)} \frac{1}{\sin(T(z))} dz = \int_{\partial B_1(0)} \frac{1}{\sin(T(z))} \frac{-T'(z)}{T(z)^2} dz \quad (1037)$$

$$= - \int_{\partial B_1(0)} \frac{T'(z)}{\sin(T(z))T(z)^2} dz. \quad (1038)$$

Nach der Substitutionsformel gilt

$$- \int_{\partial B_1(0)} \frac{T'(z)}{\sin(T(z))T(z)^2} dz = - \int_{T(\partial B_1(0))} \frac{1}{\sin(\xi)\xi^2} d\xi. \quad (1039)$$

Beachte: Für $\gamma(t) := e^{it}$, ($t \in [0, 2\pi]$) gilt $(T \circ \gamma)(t) = \frac{1}{e^{it}} = e^{-it} = e^{i(2\pi-t)} = \gamma_{rev}(t)$. Somit durchläuft $T \circ \gamma$ den Einheitskreis im Uhrzeigersinn. Wir werden daher einen Vorzeichen-

wechsel machen:

$$-\int_{T(\partial B_1(0))} \frac{1}{\sin(\xi)\xi^2} d\xi = \int_{\partial B_1(0)} \frac{1}{\sin(\xi)\xi^2} d\xi \quad (1040)$$

Das Integral auf der rechten Seite kann mithilfe des Residuensatzes berechnet werden. Es gilt

$$\int_{\partial B_1(0)} \frac{1}{\sin(\xi)\xi^2} d\xi = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{\sin(z)z^2}, 0\right). \quad (1041)$$

Man überzeugt sich leicht, dass $\frac{1}{\sin(z)z^2}$ eine Polstelle der Ordnung 3 bei Null hat. Wir folgern mit Proposition 238

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{\sin(z)z^2}, 0\right) = \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow 0} \partial_z^2 \left(z^3 \frac{1}{\sin(z)z^2} \right) = \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow 0} \partial_z^2 \left(\frac{z}{\sin(z)} \right). \quad (1042)$$

Nun definiere $\phi(z) := \frac{\sin(z)}{z}$. Eine Potenzreihendarstellung für ϕ ist wie folgt gegeben:

$$\phi(z) = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k} = 1 - \frac{z^2}{6} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k} \quad (1043)$$

Wir lesen aus den Koeffizienten ab, dass $\phi(0) = 1$, $\frac{1}{1!}\phi'(0) = 0$ und $\frac{1}{2!}\phi''(0) = -\frac{1}{6}$, also $\phi(0) = 1$, $\phi'(0) = 0$ und $\phi''(0) = -\frac{1}{3}$. Gleichung (1042) impliziert, dass

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{\sin(z)z^2}, 0\right) = \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow 0} \partial_z^2 \left(\frac{z}{\sin(z)} \right) = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} \partial_z^2 \left(\frac{1}{\phi(z)} \right) = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} \partial_z \left(\frac{-\phi'(z)}{\phi(z)^2} \right) \quad (1044)$$

$$= -\frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} \partial_z \left(\frac{\phi'(z)}{\phi(z)^2} \right) = -\frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{\phi''(z)\phi(z)^2 - 2\phi'(z)^2\phi(z)}{\phi(z)^4} \right) \quad (1045)$$

$$= -\frac{1}{2} \left(\frac{\phi''(0)\phi(0)^2 - 2\phi'(0)^2\phi(0)}{\phi(0)^4} \right) = \frac{1}{6}. \quad (1046)$$

Gleichung (1041) impliziert dann dass

$$\int_{\partial B_1(0)} \frac{1}{\sin(\xi)\xi^2} d\xi = \frac{\pi i}{3} \quad (1047)$$

und somit (mit (1038) und (1040))

$$\int_{\partial B_1(0)} \frac{1}{\sin(\frac{1}{z})} dz = \frac{\pi i}{3}. \quad (1048)$$

4.4 Residuenkalkül

In dem nächsten Abschnitt werden wir uns dem *Residuenkalkül* widmen, d.h. wir werden Möglichkeiten kennenlernen, wichtige Integralausdrücke, z.B. *reelle Integrale*, mithilfe des Residuensatzes zu vereinfachen.

4.4.1 Trigonometrische Ausdrücke

Problem 241. Es sei $f : \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Berechne

$$\int_0^{2\pi} f(\cos(\theta), \sin(\theta)) \, d\theta. \quad (1049)$$

(Beachte: Der Ausdruck im Integral ist wohldefiniert weil $|(\cos(\theta), \sin(\theta))| = \sqrt{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} = 1$ für alle $\theta \in (0, 2\pi)$)

Wir werden nun lernen solche Integrale über trigonometrische Ausdrücke als Kurvenintegrale aufzufassen.

Proposition 242. Es sei $f : \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt

$$\int_0^{2\pi} f(\cos(\theta), \sin(\theta)) \, d\theta = \int_{\partial B_1(0)} \frac{1}{iz} f\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) \, dz \quad (1050)$$

Beweis. Liest man Gleichung (1050) rückwärts, so ist sie leicht durch Einsetzen einer Parametrisierung herzuleiten. Wir wollen das aber ein wenig konstruktiver machen.

$$\int_0^{2\pi} f(\cos(\theta), \sin(\theta)) \, d\theta = \int_0^{2\pi} f\left(\frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}), \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})\right) \, d\theta \quad (1051)$$

$$= \int_0^{2\pi} f\left(\frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + \frac{1}{e^{i\theta}}\right), \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - \frac{1}{e^{i\theta}}\right)\right) \, d\theta \quad (1052)$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{ie^{i\theta}} f\left(\frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + \frac{1}{e^{i\theta}}\right), \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - \frac{1}{e^{i\theta}}\right)\right) ie^{i\theta} \, d\theta \quad (1053)$$

$$= \int_{\partial B_1(0)} \frac{1}{iz} f\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) \, dz, \quad (1054)$$

wobei man die letzte Gleichung am besten rückwärts liest: Sie folgt durch Einsetzen der Parametrisierung $\theta \mapsto e^{i\theta}$.

Das Integral auf der rechten Seite von (1050) kann häufig mit dem Residuensatz oder mit der Cauchy'schen Integralformel ausgerechnet werden (sofern der Integrand die entsprechenden Voraussetzungen dafür erfüllt). Dazu ein Beispiel.

Beispiel 243. Wir berechnen

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2(\theta)}{1 + \frac{1}{4} \cos(\theta)} \, d\theta. \quad (1055)$$

Dazu verwenden wir Proposition 242.

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2(\theta)}{1 + \frac{1}{4} \cos(\theta)} d\theta = \int_{\partial B_1(0)} \frac{1}{iz} \frac{[\frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z})]^2}{1 + \frac{1}{4}[\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})]} dz = \int_{\partial B_1(0)} \frac{1}{iz} \frac{(-\frac{1}{4})(z - \frac{1}{z})^2}{(1 + \frac{z}{8} + \frac{1}{8z})} dz \quad (1056)$$

$$= -\frac{1}{4i} \int_{\partial B_1(0)} \frac{(z - \frac{1}{z})^2}{z + \frac{1}{8}z^2 + \frac{1}{8}} dz = 2i \int_{\partial B_1(0)} \frac{z^2 - 2 + \frac{1}{z^2}}{8z + z^2 + 1} dz \quad (1057)$$

$$= 2i \left(\int_{\partial B_1(0)} \frac{z^2 - 2}{8z + z^2 + 1} dz + \int_{\partial B_1(0)} \frac{1}{z^2(8z + z^2 + 1)} dz \right). \quad (1058)$$

Wir untersuchen nun die Nullstellen des Nenners. Dazu ergänzen wir quadratisch

$$z^2 + 8z + 1 = [(z + 4)^2 - 16] + 1 = (z + 4)^2 - 15. \quad (1059)$$

Damit ist $z^2 + 8z + 1 = 0$ äquivalent zu $(z + 4)^2 = 15$. Die einzigen zwei komplexen Lösungen von $w^2 = 15$ sind nach gegeben durch $w_k = \sqrt{15}e^{\frac{2k\pi i}{2}}$, ($k = 0, 1$). Da $e^0 = 1$ und $e^{\frac{2\pi i}{2}} = e^{\pi i} = -1$ gilt $w_0 = \sqrt{15}$ und $w_1 = -\sqrt{15}$. Man hat also $z + 4 = \pm\sqrt{15}$ und somit $z_{1,2} = -4 \pm \sqrt{15}$. Man erhält

$$z^2 + 8z + 1 = (z - (-4 - \sqrt{15}))(z - (-4 + \sqrt{15})). \quad (1060)$$

Beachte, dass $-4 \pm \sqrt{15} \leq 0$. Außerdem gilt $-4 + \sqrt{15} > -4 + \sqrt{9} = -1$ und $-4 - \sqrt{15} < -4 < -1$, d.h. $-4 + \sqrt{15} \in B_1(0)$ und $-4 - \sqrt{15} \notin B_1(0)$. Wir folgern

$$\int_{\partial B_1(0)} \frac{z^2 - 2}{8z + z^2 + 1} dz = \int_{\partial B_1(0)} \frac{z^2 - 2}{(z - (-4 - \sqrt{15}))(z - (-4 + \sqrt{15}))} dz \quad (1061)$$

$$= 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{z^2 - 2}{(z - (-4 - \sqrt{15}))(z - (-4 + \sqrt{15}))}, -4 + \sqrt{15}\right) \quad (1062)$$

Benutzen wir (1034) mit $\phi(z) = \frac{z^2 - 2}{(z - (-4 - \sqrt{15}))}$ und $w = -4 + \sqrt{15}$ so folgt

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z^2 - 2}{(z - (-4 - \sqrt{15}))(z - (-4 + \sqrt{15}))}, -4 + \sqrt{15}\right) = \phi(w) = \frac{(-4 + \sqrt{15})^2 - 2}{(-4 + \sqrt{15}) - (-4 - \sqrt{15})} \quad (1063)$$

$$= \frac{(-4 + \sqrt{15})^2 - 2}{2\sqrt{15}}. \quad (1064)$$

Mit (1062) folgt

$$\int_{\partial B_1(0)} \frac{z^2 - 2}{8z + z^2 + 1} dz = \pi i \frac{(-4 + \sqrt{15})^2 - 2}{2\sqrt{15}}. \quad (1065)$$

Ferner gilt

$$\int_{\partial B_1(0)} \frac{1}{z^2(8z + z^2 + 1)} dz \quad (1066)$$

$$= 2\pi i \left(\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2(z-(-4-\sqrt{15}))(z-(-4+\sqrt{15}))}, -4 + \sqrt{15}\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2(z-(-4-\sqrt{15}))(z-(-4+\sqrt{15}))}, 0\right) \right) \quad (1067)$$

Die Berechnung des ersten Residuums ist analog zum vorigen Residuum. Man erhält

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2(z-(-4-\sqrt{15}))(z-(-4+\sqrt{15}))}, -4 + \sqrt{15}\right) = \frac{1}{(-4 + \sqrt{15})^2(2\sqrt{15})} = \frac{1}{2\sqrt{15}(-4 + \sqrt{15})^2}. \quad (1068)$$

Für die Berechnung des zweiten Residuums beobachten wir

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2(z-(-4-\sqrt{15}))(z-(-4+\sqrt{15}))}, 0\right) = \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2(z^2+8z+1)}, 0\right) \quad (1069)$$

$$\stackrel{\text{Proposition 238, } k=2}{=} \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow 0} \partial_z^1 \left[z^2 \frac{1}{z^2(z^2+8z+1)} \right] \quad (1070)$$

$$= \lim_{z \rightarrow 0} \partial_z^1 \left[\frac{1}{z^2+8z+1} \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{-1}{(z^2+8z+1)^2} \right) (2z + 8) = -8 \quad (1071)$$

Mit diesen Erkenntnissen und (1067) ergibt sich

$$\int_{\partial B_1(0)} \frac{1}{z^2(8z + z^2 + 1)} dz = 2\pi i \left(\frac{1}{2\sqrt{15}(4 + \sqrt{15})^2} - 8 \right) \quad (1072)$$

Final ergibt (1058), (1065) und die vorige Gleichung

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2(\theta)}{1 + \frac{1}{4} \cos(\theta)} d\theta = 2i \left(\pi i \frac{(-4 + \sqrt{15})^2 - 2}{2\sqrt{15}} + 2\pi i \left(\frac{1}{2\sqrt{15}(4 + \sqrt{15})^2} - 8 \right) \right) \quad (1073)$$

$$= -8(\sqrt{15} - 4)\pi. \quad (1074)$$

4.4.2 Rationale Funktionen

Problem 245. Es sei R eine *rationale Funktion*, d.h. es gibt nichttriviale \mathbb{C} -Polynome p, q so dass $R(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $q(z) \neq 0$. Berechne (sofern existent)

$$p.v. \int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx. \quad (1075)$$

Wir benötigen zunächst ein vorbereitendes Lemma

Lemma 246. Es seien p_1, p_2 nichttriviale \mathbb{C} -Polynome.

(i) Falls $\deg(p_1) \leq \deg(p_2) - 1$, gilt

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{z \in \partial B_R(0)} \frac{|p_1(z)|}{|p_2(z)|} = 0. \quad (1076)$$

(ii) Falls $\deg(p_1) \leq \deg(p_2)$, so gibt es ein $R_0 > 0$ und $C > 0$ so, dass

$$\sup_{z \in \partial B_R(0)} \frac{|p_1(z)|}{|p_2(z)|} \leq C \quad \forall R > R_0 \quad (1077)$$

Beweis. Es sei $m := \deg(p_1)$ und $n := \deg(p_2)$. Dann gibt es $a_0, \dots, a_m \in \mathbb{C}$ mit $a_m \neq 0$ und $b_0, \dots, b_n \in \mathbb{C}$ mit $b_n \neq 0$ so, dass

$$p_1(z) = \sum_{k=0}^m a_k z^k, \quad p_2(z) = \sum_{k=0}^n b_k z^k \quad \forall z \in \mathbb{C}. \quad (1078)$$

Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > 1$ gilt dann mit der Dreiecksungleichung

$$|p_1(z)| = \left| \sum_{k=0}^m a_k z^k \right| \leq \sum_{k=0}^m |a_k| |z|^k = \sum_{k=0}^m |a_k| |z|^k \cdot 1 \quad (1079)$$

$$\stackrel{|z|>1}{\leq} \sum_{k=0}^m |a_k| |z|^k |z|^{m-k} = \sum_{k=0}^m |a_k| |z|^m = C_1 |z|^m, \quad (1080)$$

wobei $C_1 = \sum_{k=0}^m |a_k|$. Der Betrag von p_2 kann mithilfe der inversen Dreiecksungleichung nach unten abgeschätzt werden: Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > 1$ gilt

$$|p_2(z)| = \left| \sum_{k=0}^n b_k z^k \right| = \left| b_n z^n + \sum_{k=0}^{n-1} b_k z^k \right| \geq |b_n z^n| - \left| \sum_{k=0}^{n-1} b_k z^k \right| \quad (1081)$$

$$= |b_n| |z|^n - \left| \sum_{k=0}^{n-1} b_k z^k \right| \geq |b_n| |z|^n - \sum_{k=0}^{n-1} |b_k| |z|^k \geq |b_n| |z|^n - \sum_{k=0}^{n-1} |b_k| |z|^k |z|^{n-1-k} \quad (1082)$$

$$= |b_n| |z|^n - C_2 |z|^{n-1} = (|b_n| |z| - C_2) |z|^{n-1} \quad (1083)$$

wobei $C_2 = \sum_{k=0}^{n-1} |b_k|$. Beachte nun: Für $R > \frac{C_2}{|b_n|}$ gilt, dass $|b_n|R - C_2 > 0$ und somit ist die rechte Seite von (1083) auch positiv sofern $|z| > \frac{C_2}{|b_n|}$. Gleichungen (1080) und (1083) ergeben zusammen, dass für alle $z \in \partial B_R(0)$, ($R > \frac{C_2}{|b_n|}$) gilt

$$\frac{|p_1(z)|}{|p_2(z)|} \leq \frac{C_1 |z|^m}{(|b_n| |z| - C_2) |z|^{n-1}} = \frac{C_1 |z|^{m-n+1}}{|b_n| |z| - C_2} = \frac{C_1 R^{m-n+1}}{|b_n| R - C_2} \quad (1084)$$

Nun zu (i). Ist $m \leq n - 1$ so gilt (da $|b_n| \neq 0$)

$$0 \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{z \in \partial B_R(0)} \frac{|p_1(z)|}{|p_2(z)|} \leq \limsup_{R \rightarrow \infty} \frac{C_1 R^{m-n+1}}{|b_n| R - C_2} \leq \limsup_{R \rightarrow \infty} \frac{C_1}{|b_n| R - C_2} = 0, \quad (1085)$$

wobei wir im letzten Schritt benutzt haben, dass $R^{m-n+1} \leq 1$ für alle $R > 1$.

Zu (ii). Ist $m \leq n$ so gilt für $R > 1$

$$\sup_{z \in \partial B_R(0)} \frac{|p_1(z)|}{|p_2(z)|} \leq \frac{C_1 R^{m-n+1}}{|b_n| R - C_2} \leq \frac{C_1 R}{|b_n| R - C_2} = \frac{C_1}{|b_n|} \left(\frac{|b_n| R}{|b_n| R - C_2} \right) = \frac{C_1}{|b_n|} \left(1 + \frac{C_2}{|b_n| R - C_2} \right). \quad (1086)$$

Ist nun $R > \max\{2\frac{C_2}{|b_n|}, 1\} =: R_0$ so folgt

$$\sup_{z \in \partial B_R(0)} \frac{|p_1(z)|}{|p_2(z)|} \leq \frac{C_1}{|b_n|} \left(1 + \frac{C_2}{|b_n| R - C_2} \right) \leq \frac{C_1}{|b_n|} \left(1 + \frac{C_2}{2C_2 - C_2} \right) = \frac{2C_1}{|b_n|} =: C \quad (1087)$$

Die Behauptung folgt.

Proposition 247. Es seien p, q nichttriviale \mathbb{C} -Polynome so, dass q auf \mathbb{R} keine Nullstellen besitzt und $\deg(p) \leq \deg(q) - 2$. Sei $\mathbb{H}^+ := \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$. Dann gilt

$$p.v. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx = 2\pi i \sum_{w \in \mathbb{H}^+ : q(w)=0} \text{Res}\left(\frac{p}{q}, w\right) \quad (1088)$$

Im Beweis werden wir $z \mapsto \frac{p(z)}{q(z)}$ entlang eines bestimmten *Hilfsweges* γ_R integrieren und den Grenzfalle $R \rightarrow \infty$ betrachten.

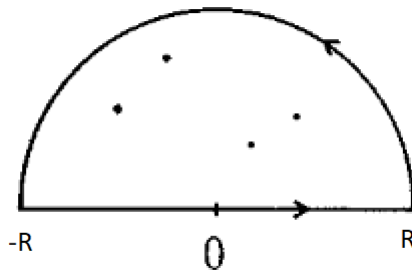


Abbildung 8: Der Hilfsweg γ_R

Beweis. Es sei $m = \deg(p)$, $n = \deg(q)$ und z_1, \dots, z_r , $r \leq n$ die paarweise verschiedenen Nullstellen von q . Dann ist $\frac{p}{q}$ auf $\Omega := \mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_r\}$ holomorph. Somit sind alle Nullstellen z_i isolierte Singularitäten von $\frac{p}{q}$. Es sei für $R > 0$ die Kurve $\gamma_R(t) := \gamma_R^1 \oplus \gamma_R^2$ wobei γ_R^1 das Streckensegment $\gamma_R^1(t) := t$, ($t \in [-R, R]$) ist und γ_R^2 der Halbkreis gegeben durch

$\gamma_R^2(t) := Re^{it}$, ($t \in [0, \pi]$). Vergleiche auch Abbildung 8.

Da die Kurve γ_R geschlossen ist (mit Start -und Endpunkt bei $-R$) gilt nach dem Residuensatz

$$\int_{\gamma_R} \frac{p(z)}{q(z)} dz = 2\pi i \sum_{w \in \text{Iso}(\frac{p}{q}, \Omega)} \text{Res}(\frac{p}{q}, w) n(\gamma_R, w) = 2\pi i \sum_{j=1}^r \text{Res}(\frac{p}{q}, z_j) n(\gamma_R, z_j). \quad (1089)$$

Man überzeugt sich leicht anschaulich, dass $n(\gamma_R, w) = 1$ für alle $w \in \mathbb{H}^+ \cap B_R(0)$ und $n(\gamma_R, w) = 0$ für alle $w \notin \mathbb{H}^+ \cap B_R(0)$. Man erhält also

$$\int_{\gamma_R} \frac{p(z)}{q(z)} dz = 2\pi i \sum_{j: z_j \in \mathbb{H}^+ \cap B_R(0)} \text{Res}(\frac{p}{q}, z_j). \quad (1090)$$

Für $R > \max\{|z_1|, \dots, |z_r|\}$ gilt dann (da in diesem Fall $z_1, \dots, z_r \in B_R(0)$)

$$\int_{\gamma_R} \frac{p(z)}{q(z)} dz = 2\pi i \sum_{j: z_j \in \mathbb{H}^+} \text{Res}(\frac{p}{q}, z_j), \quad (1091)$$

was der Summe aus (1088) entspricht.

BEHAUPTUNG.

$$p.v. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} \frac{p(z)}{q(z)} dz. \quad (1092)$$

Die Behauptung zusammen mit (1091) würden den Beweis vollenden. Nun also zum Beweis der Behauptung.

$$\int_{\gamma_R} \frac{p(z)}{q(z)} dz = \int_{\gamma_R^1} \frac{p(z)}{q(z)} dz + \int_{\gamma_R^2} \frac{p(z)}{q(z)} dz = \int_{-R}^R \frac{p(x)}{q(x)} dx + \int_{\gamma_R^2} \frac{p(z)}{q(z)} dz. \quad (1093)$$

Außerdem impliziert die Fundamentalabschätzung

$$\left| \int_{\gamma_R^2} \frac{p(z)}{q(z)} dz \right| \leq \sup_{z \in \gamma_R^2([0, \pi])} \left| \frac{p(z)}{q(z)} \right| L(\gamma_R^2) = \sup_{z \in \partial B_R(0)} \frac{|p(z)|}{|q(z)|} (\pi R) \quad (1094)$$

$$= \sup_{z \in \partial B_R(0)} \left(\frac{|p(z)|}{|q(z)|} \pi |z| \right) = \sup_{z \in \partial B_R(0)} \left(\frac{|\pi z p(z)|}{|q(z)|} \right). \quad (1095)$$

Es definiert $p_1(z) := \pi z p(z)$ ein Polynom von Grad $\deg(p)+1 = m+1$ und $p_2(z) := q(z)$ ein Polynom vom Grad $\deg(q) = n$. Da $m \leq n-2$ gilt $m+1 \leq n-1$, d.h. $\deg(p_1) \leq \deg(p_2)-1$. Wir folgern aus Lemma 246, dass

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{\gamma_R^2} \frac{p(z)}{q(z)} dz \right| \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{z \in \partial B_R(0)} \left(\frac{|\pi z p(z)|}{|q(z)|} \right) = \lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{z \in \partial B_R(0)} \left(\frac{|p_1(z)|}{|p_2(z)|} \right) = 0. \quad (1096)$$

Aus (1093) (für $R \rightarrow \infty$) folgt dann

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} \frac{p(z)}{q(z)} dz = p.v. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx. \quad (1097)$$

Die Behauptung ist gezeigt. Zusammen mit (1091) erhalten wir,

$$p.v. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} \frac{p(z)}{q(z)} dz \stackrel{(1091)}{=} 2\pi i \sum_{j: z_j \in \mathbb{H}^+} \operatorname{Res}\left(\frac{p}{q}, z_j\right). \quad (1098)$$

Dies ist exakt die behauptete Formel.

Bemerkung 248. Man könnte zeigen, dass unter den Voraussetzungen des obigen Satzes $\frac{p}{q}$ stets auf \mathbb{R} integrierbar ist. Daher gilt auch

$$p.v. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx. \quad (1099)$$

Den Beweis hierzu überlassen wir den Lesenden als Übungsaufgabe.

Beispiel 248. In Beispiel 206 haben wir bereits $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx$ berechnet. Dies könnten wir nun wesentlich einfacher machen. Wir berechnen nun allgemein $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^{2m}} dx$ für beliebige $m \geq 1$. Wir wenden dafür Proposition 247 mit $p(z) = 1$ und $q(z) = 1 + z^{2m}$ an. Die Voraussetzungen für die Anwendung der Proposition sind erfüllt, da

$$\deg(p) = 0 = 2 - 2 \leq 2m - 2 = \deg(q) - 2. \quad (1100)$$

Insbesondere gilt also

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^{2m}} dx = 2\pi i \sum_{w \in \mathbb{H}^+ : q(w)=0} \operatorname{Res}\left(\frac{1}{1+z^{2m}}, w\right) \quad (1101)$$

Beachte

$$q(z) = 0 \Leftrightarrow z^{2m} = -1 = e^{i\pi} \Leftrightarrow z = z_k := e^{i\frac{\pi}{2m} + i\frac{k}{m}\pi} \quad \text{für } k = 0, \dots, m-1. \quad (1102)$$

Wir fragen und nun welche von diesen Nullstellen in \mathbb{H}^+ liegen. Dazu:

$$\operatorname{Im}(z_k) = \operatorname{Im}\left(e^{i\frac{\pi}{2m} + i\frac{k}{m}\pi}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2m} + \frac{k}{m}\pi\right) \quad (1103)$$

Für $k = 0, \dots, m-1$ gilt

$$0 < \frac{\pi}{2m} + \frac{k}{m}\pi \leq \frac{\pi}{2m} + \frac{m-1}{m}\pi = \pi - \frac{\pi}{2m} < \pi. \quad (1104)$$

und somit $\sin(\frac{\pi}{2m} + \frac{k}{m}\pi) > 0$. Für $k = m, \dots, 2m - 1$ gilt

$$\sin(\frac{\pi}{2m} + \frac{k}{m}\pi) = \sin(\frac{\pi}{2m} + \frac{k-m}{m}\pi + \pi) = -\sin(\frac{\pi}{2m} + \frac{k-m}{m}\pi) \in (-\pi, 0), \quad (1105)$$

wegen (1104) und da $k - m \in \{0, \dots, m - 1\}$. Gleichung (1103) impliziert dann dass

$$\operatorname{Im}(z_k) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad k \in \{0, \dots, m\}. \quad (1106)$$

Proposition 247 impliziert dann dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^{2m}} dx = 2\pi i \sum_{k=0}^{m-1} \operatorname{Res}\left(\frac{1}{1+z^{2m}}, z_k\right) \quad (1107)$$

Beachte nun, dass

$$\frac{1}{1+z^{2m}} = \frac{1}{\prod_{j=1}^{2m} (z - z_j)}. \quad (1108)$$

Wendet man (1034) mit $\phi_k(z) := \frac{1}{\prod_{j=1, j \neq k}^{2m} (z - z_j)}$ (was holomorph auf einer Umgebung von z_k ist, da die Nullstellen z_j alle verschieden sind) so erhält man

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{1+z^{2m}}, z_k\right) = \operatorname{Res}\left(\frac{1}{\prod_{j=1}^{2m} (z - z_j)}, z_k\right) = \operatorname{Res}\left(\frac{\phi_k(z)}{z - z_k}, z_k\right) = \phi_k(z_k). \quad (1109)$$

Setzen wir dies in (1107) ein so ergibt sich

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^{2m}} dx = 2\pi i \sum_{k=0}^{m-1} \phi_k(z_k) = 2\pi i \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{\prod_{j=1, j \neq k}^{2m} (z_k - z_j)}. \quad (1110)$$

Durch Einsetzen der Formel aus (1102) ließe sich dieses Integral nun leicht auswerten.

Wir können nun das Problem noch ein wenig erweitern und Produkte von Rationalen Funktionen mit einer oszillierenden Funktion e^{ikx} (mit $k \in \mathbb{R}$) integrieren.

Problem 249. Es sei R eine rationale Funktion, d.h. es gibt nichttriviale \mathbb{C} -Polynome p, q so dass $R(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $q(z) \neq 0$. Berechne (sofern existent) für $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$p.v. \int_{-\infty}^{\infty} R(x) e^{ikx} dx \quad (1111)$$

Haben p und q nur reelle Koeffizienten, so würden sich mit einer Formel für (1111) auch die Integrale

$$p.v. \int_{-\infty}^{\infty} R(x) \cos(kx) dx, \quad p.v. \int_{-\infty}^{\infty} R(x) \sin(kx) dx. \quad (1112)$$

durch Bildung des Real- und Imaginärteils berechnen lassen.

Bemerkung 250. Es genügt, eine Formel für (1111) im Fall $k > 0$ zu finden. In der Tat können wir den Fall $k < 0$ auf den Fall $k > 0$ zurückführen: Für $k < 0$ liefert die Substitution $\tilde{x} = -x$

$$p.v. \int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{ikx} dx = \lim_{S \rightarrow \infty} \int_{-S}^S R(x)e^{ikx} dx = \lim_{S \rightarrow \infty} \int_{-S}^S R(-\tilde{x})e^{-ik\tilde{x}} d\tilde{x} \quad (1113)$$

$$= p.v. \int_{-\infty}^{\infty} R(-\tilde{x})e^{-ik\tilde{x}} d\tilde{x} = p.v. \int_{-\infty}^{\infty} R(-\tilde{x})e^{i(-k)\tilde{x}} d\tilde{x}. \quad (1114)$$

Da $x \mapsto R(-x)$ wieder eine rationale Funktion ist (und da $-k > 0$) kann das obenstehende Integral also mit einer Formel für positive k berechnet werden.

Proposition 251. Es seien p, q nichttriviale \mathbb{C} -Polynome so, dass q keine Nullstellen in \mathbb{R} besitzt und $\deg(p) \leq \deg(q) - 1$. Ferner sei $k > 0$. Dann gilt

$$p.v. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} e^{ikx} dx = 2\pi i \sum_{w \in \mathbb{H}^+ : q(w)=0} \operatorname{Res}\left(\frac{p(z)}{q(z)} e^{ikz}, w\right). \quad (1115)$$

Beweis. Wir gehen vor wie im Beweis von Proposition 247. Seien wie dort $\gamma_R^1(t) := t, (t \in [-R, R])$ und $\gamma_R^2(t) := Re^{it}, (t \in [0, \pi])$, sowie $\gamma_R := \gamma_R^1 \oplus \gamma_R^2$. Seien außerdem wieder $n := \deg(q)$, $m := \deg(p)$ (d.h. $m \leq n - 1$) und $z_1, \dots, z_r, (r \leq n)$ die paarweise verschiedenen Nullstellen von q . Man sieht wie im Beweis von Proposition 247, dass die Menge aller isolierten Singularitäten von $z \mapsto \frac{p(z)}{q(z)} e^{ikz}$ gegeben ist durch $\{z_1, \dots, z_r\}$. Der Residuensatz impliziert

$$\int_{\gamma_R} \frac{p(z)}{q(z)} e^{ikz} dz = 2\pi i \sum_{j=1}^r \operatorname{Res}\left(\frac{p(z)}{q(z)} e^{ikz}, z_j\right) n(\gamma_R, z_j). \quad (1116)$$

Wie im Beweis von Proposition 247 gilt $n(\gamma_R, z_j) = 1$ falls $z_j \in B_R(0) \cap \mathbb{H}^+$ und $n(\gamma_R, z_j) = 0$ falls $z_j \notin B_R(0) \cap \mathbb{H}^+$. Es ergibt sich also

$$\int_{\gamma_R} \frac{p(z)}{q(z)} e^{ikz} dz = 2\pi i \sum_{j: z_j \in B_R(0) \cap \mathbb{H}^+} \operatorname{Res}\left(\frac{p(z)}{q(z)} e^{ikz}, z_j\right). \quad (1117)$$

Da für $R > \max\{|z_1|, \dots, |z_r|\}$ alle Nullstellen z_j automatisch in $B_R(0)$ liegen folgert man

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} \frac{p(z)}{q(z)} e^{ikz} dz = 2\pi i \sum_{j: z_j \in \mathbb{H}^+} \operatorname{Res}\left(\frac{p(z)}{q(z)} e^{ikz}, z_j\right). \quad (1118)$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite ist genau der Ausdruck auf der rechten Seite von

(1115). Nun bedenke man auch, dass

$$\int_{\gamma_R} \frac{p(z)}{q(z)} e^{ikz} dz = \int_{\gamma_R^1} \frac{p(z)}{q(z)} e^{ikz} dz + \int_{\gamma_R^2} \frac{p(z)}{q(z)} e^{ikz} dz = \int_{-R}^R \frac{p(x)}{q(x)} e^{ikx} dx + \int_{\gamma_R^2} \frac{p(z)}{q(z)} e^{ikz} dz. \quad (1119)$$

Wir schätzen nun $\left| \int_{\gamma_R^2} \frac{p(z)}{q(z)} e^{ikz} dz \right|$ ab. Dazu setzen wir die Parametrisierung ein:

$$\left| \int_{\gamma_R^2} \frac{p(z)}{q(z)} e^{ikz} dz \right| = \left| \int_0^\pi \frac{p(Re^{it})}{q(Re^{it})} e^{ikRe^{it}} Rie^{it} dt \right| \leq \int_0^\pi \left| \frac{p(Re^{it})ie^{it}}{q(Re^{it})} \right| \left| e^{ikRe^{it}} \right| dt \quad (1120)$$

$$= \int_0^\pi \sup_{z \in \partial B_R(0)} \left| \frac{p(z)iz}{q(z)} \right| e^{\operatorname{Re}(ikRe^{it})} dt \quad (1121)$$

$$= \sup_{z \in \partial B_R(0)} \left| \frac{p(z)iz}{q(z)} \right| \int_0^\pi e^{\operatorname{Re}[ikR(\cos(t)+i\sin(t))]} dt \quad (1122)$$

$$= \sup_{z \in \partial B_R(0)} \left| \frac{p(z)iz}{q(z)} \right| \int_0^\pi e^{-kR\sin(t)} dt. \quad (1123)$$

Definiert man nun $p_1(z) := p(z)iz$ und $p_2(z) := q(z)$ so erhält man $\deg(p_1) = m + 1 \leq n = \deg(p_2)$. Es folgt mit Lemma 246 (ii), dass es $R_0 > 0$, $C > 0$ gibt so, dass $\sup_{z \in \partial B_R(0)} \left| \frac{p(z)iz}{q(z)} \right| \leq C$ für alle $R > R_0$. Man erhält für $R > R_0$ aus der vorigen Abschätzung

$$\left| \int_{\gamma_R^2} \frac{p(z)}{q(z)} e^{ikz} dz \right| \leq C \int_0^\pi e^{-kR\sin(t)} dt \quad (1124)$$

Beachte nun: $e^{-kR\sin(t)}$ konvergiert auf $(0, \pi)$ punktweise gegen 0 für $R \rightarrow \infty$. Außerdem gilt $|e^{-kR\sin(t)}| \leq 1$, weswegen die Konstante 1-Funktion eine auf $(0, \pi)$ integrierbare Majorante ist. Der Satz über die dominierte Konvergenz impliziert dann, dass

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^\pi e^{-kR\sin(t)} dt = 0. \quad (1125)$$

Dies und (1124) implizieren dann

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{\gamma_R^2} \frac{p(z)}{q(z)} e^{ikz} dz \right| = 0. \quad (1126)$$

Dies erlaubt uns den Grenzübergang $R \rightarrow \infty$ in (1119) und wir erhalten

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} \frac{p(z)}{q(z)} e^{ikz} dz = p.v. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} e^{ikx} dx. \quad (1127)$$

Dank (1118) kennen wir den Ausdruck auf der linken Seite schon und wir folgern

$$p.v. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} e^{ikx} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} \frac{p(z)}{q(z)} e^{ikz} dz = 2\pi i \sum_{j: z_j \in \mathbb{H}^+} \operatorname{Res}\left(\frac{p(z)}{q(z)} e^{ikz}, z_j\right). \quad (1128)$$

Die Behauptung folgt.

4.4.3 Der Integralsinus

In dem gesamten nachfolgenden Abschnitt bezeichnet $\mathbb{H}^+ := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\}$.

Problem 252. Berechne das uneigentliche Riemann-Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx := \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \frac{\sin(x)}{x} dx \quad (1129)$$

Bemerkung 253. Man beachte: $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ ist auf $(0, \infty)$ nicht Lebesgue-integrierbar: Wir werden hier im Folgenden kurz skizzieren, warum der Betrag $x \mapsto \left| \frac{\sin(x)}{x} \right|$ nicht Lebesgue-integrierbar ist. Es gilt für alle $k \geq 0$ und $x \in [2k\pi + \frac{\pi}{4}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}]$ die Abschätzung $\sin(x) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Man erhält also $|\sin(x)| \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \chi_{\cup_{k \geq 0} [2k\pi + \frac{\pi}{4}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}]} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \chi_{[2k\pi + \frac{\pi}{4}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}]}$. Daher

$$\int_0^{\infty} \frac{|\sin(x)|}{x} dx \geq \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \chi_{[2k\pi + \frac{\pi}{4}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}]} \frac{1}{x} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \chi_{[2k\pi + \frac{\pi}{4}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}]} \frac{1}{x} dx, \quad (1130)$$

wobei wir bei der Vertauschung von Reihe und Integral den Satz über die monotone Konvergenz benutzt haben (denn die Partialsummen bilden wegen der Positivität der Summanden eine monotone Funktionenfolge). Schätzt man weiter nach unten ab, so erhält man

$$\int_0^{\infty} \frac{|\sin(x)|}{x} dx \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \chi_{[2k\pi + \frac{\pi}{4}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}]} \frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\pi}{4} \frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}}. \quad (1131)$$

Die Reihe auf der rechten Seite ist divergent, da $\frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}} \geq \frac{1}{2k\pi + 2\pi} = \frac{1}{2\pi(k+1)}$ und $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert, weil es sich gerade um die harmonische Reihe handelt.

Man beachte: Da $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ eine gerade Funktion ist gilt

$$\int_0^R \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{1}{2} \int_{-R}^R \frac{\sin(x)}{x} dx. \quad (1132)$$

Lässt man $R \rightarrow \infty$ streben so erhält man (mit (1129) im Sinne des uneigentlichen Riemann-Integrals)

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{1}{2} \cdot p.v. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx. \quad (1133)$$

Es genügt also den Cauchy'schen Hauptwert zu bestimmen

Proposition 253. Es gilt

$$p.v. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \pi. \quad (1134)$$

Beweis. Definiere $\Omega := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ durch $f(z) := \frac{e^{iz}}{z}$. Beachte dass $\text{Iso}(f, \Omega) = \{0\}$ und daher $D := \Omega \cup \mathbb{C}$ (ein Elementargebiet!). Seien $\varepsilon > 0$ und $R > 0$ beliebig vorgegeben. Definiere $\gamma := \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \gamma_3 \oplus \gamma_4$ gegeben durch

$$\gamma_1(t) := t \quad (t \in [-R, -\varepsilon]) \quad (1135)$$

$$\gamma_2(t) := \varepsilon e^{i(\pi-t)} \quad (t \in [0, \pi]) \quad (1136)$$

$$\gamma_3(t) := t \quad (t \in [\varepsilon, R]) \quad (1137)$$

$$\gamma_4(t) := R e^{it} \quad (t \in [0, \pi]). \quad (1138)$$

Nach dem Residuensatz gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \text{Res}(f, 0) n(\gamma, 0) = 0, \quad (1139)$$

da $n(\gamma, 0) = 0$. (Dies liegt daran, dass das Bild von γ im Elementargebiet $\mathbb{C} \setminus (i\mathbb{R}_{\leq 0})$ liegt und daher $\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = 0$, weswegen auch $n(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = 0$.) Also gilt

$$0 = \int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{j=1}^4 \int_{\gamma_j} f(z) dz. \quad (1140)$$

Schreibt man die Kurvenintegrale über γ_1 und γ_3 als reelle Integrale um, so hat man

$$0 = \int_{-R}^{-\varepsilon} f(x) dx + \int_{\varepsilon}^R f(x) dx + \int_{\gamma_2} f(z) dz + \int_{\gamma_4} f(z) dz \quad (1141)$$

Beachte: γ_4 stimmt mit γ_R^2 aus dem Beweis von Proposition 251 überein. Außerdem hat $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$ die Gestalt $z \mapsto \frac{p(z)}{q(z)} e^{ikz}$ für $p \equiv 1, q(z) = z$ und $k = 1$. Da $\deg(p) = 0 = \deg(q) - 1$ liegt auch dieselbe Situation wie in Proposition 251 vor. Das Integral über γ_4 kann also auf die gleiche Weise wie das Integral über γ_R^2 in Proposition 251 studiert werden. Wie in der Herleitung von (1126) folgert man dann, dass der (von R abhängige Ausdruck) $\int_{\gamma_4} f(z) dz$ für große Werte von R beliebig klein wird. Anders ausgedrückt könnte man sagen: Es gibt eine Funktion $\omega : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\int_{\gamma_4} f(z) dz = \omega(R)$ und $\lim_{R \rightarrow \infty} \omega(R) = 0$. Wir folgern mit (1141)

$$\int_{-R}^{-\varepsilon} f(x) dx + \int_{\varepsilon}^R f(x) dx = -\omega(R) - \int_{\gamma_2} f(z) dz = -\omega(R) + \int_{(\gamma_2)_{rev}} f(z) dz. \quad (1142)$$

Beachte, dass $(\gamma_2)_{rev}$ den *oberen Halbkreis* $\mathbb{H}^+ \cap \partial B_\varepsilon(0)$ gegen den Uhrzeigersinn durchläuft. Wir bezeichnen ab sofort

$$\int_{\partial B_\varepsilon(0)^+} f(z) dz := \int_{(\gamma_2)_{rev}} f(z) dz. \quad (1143)$$

Damit wird (1142) zu

$$\int_{-R}^{-\varepsilon} f(x) dx + \int_{\varepsilon}^R f(x) dx = -\omega(R) + \int_{\partial B_\varepsilon(0)^+} f(z) dz. \quad (1144)$$

Nun gilt

$$\int_{\partial B_\varepsilon(0)^+} f(z) dz = \int_{\partial B_\varepsilon(0)^+} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{\partial B_\varepsilon(0)^+} \frac{\cos(z) + i \sin(z)}{z} dz \quad (1145)$$

$$= \int_{\partial B_\varepsilon(0)^+} \frac{\cos(z)}{z} dz + i \int_{\partial B_\varepsilon(0)^+} \frac{\sin(z)}{z} dz \quad (1146)$$

Zum ersten Integral aus (1146): Wir definieren für die *untere Halbkreis* $\sigma(t) := \varepsilon e^{it}$, ($t \in [-\pi, 0]$) das Integral

$$\int_{\partial B_\varepsilon(0)^-} \frac{\cos(z)}{z} dz := \int_{\sigma} \frac{\cos(z)}{z} dz. \quad (1147)$$

Definiere außerdem $T(z) := -z = e^{i\pi}z$, ($z \in \mathbb{C}$). Dann durchläuft $T \circ \sigma$ die obere Halbkreis

$$\int_{\partial B_\varepsilon(0)^-} \frac{\cos(z)}{z} dz = \int_{\partial B_\varepsilon(0)^-} \frac{\cos(-z)}{-z} (-1) dz = \int_{\partial B_\varepsilon(0)^-} \frac{\cos(T(z))}{T(z)} T'(z) dz \quad (1148)$$

$$= \int_{T(\partial B_\varepsilon(0)^-)} \frac{\cos(z)}{z} dz = \int_{\partial B_\varepsilon(0)^+} \frac{\cos(z)}{z} dz \quad (1149)$$

Man erhält, dass

$$2 \int_{\partial B_\varepsilon(0)^+} \frac{\cos(z)}{z} dz = \int_{\partial B_\varepsilon(0)^+} \frac{\cos(z)}{z} dz + \int_{\partial B_\varepsilon(0)^-} \frac{\cos(z)}{z} dz \quad (1150)$$

$$= \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{\cos(z)}{z} dz \stackrel{\text{Residuensatz}}{=} 2\pi i \cos(0) = 2\pi i. \quad (1151)$$

Teilt man durch 2 so folgt

$$\int_{\partial B_\varepsilon(0)^+} \frac{\cos(z)}{z} dz = \pi i. \quad (1152)$$

Nun zum zweiten Integral auf (1146). Es gilt

$$\left| i \int_{\partial B_\varepsilon(0)^+} \frac{\sin(z)}{z} dz \right| \leq \sup_{z \in \partial B_\varepsilon(0)} \frac{|\sin(z)|}{|z|} L(\partial B_\varepsilon(0)^+) = \sup_{z \in \partial B_\varepsilon(0)} \frac{|\sin(z)|}{|z|} (\pi\varepsilon) \quad (1153)$$

$$= \sup_{z \in \partial B_\varepsilon(0)} \frac{|\sin(z)|\pi|z|}{|z|} = \sup_{z \in \partial B_\varepsilon(0)} |\sin(z)| \longrightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0). \quad (1154)$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite strebt gegen Null für $\varepsilon \rightarrow 0+$. Man erhält

$$i \int_{\partial B_\varepsilon(0)^+} \frac{\sin(z)}{z} dz = \tilde{\omega}(\varepsilon) \quad (1155)$$

für eine Funktion $\tilde{\omega} : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{\omega}(\varepsilon) = 0$. Wir folgern zusammen mit (1146)

$$\int_{\partial B_\varepsilon(0)^+} f(z) dz = \pi i + \tilde{\omega}(\varepsilon). \quad (1156)$$

Diese Erkenntnis in (1144) eingesetzt ergibt

$$\int_{-R}^{-\varepsilon} f(x) dx + \int_{\varepsilon}^R f(x) dx = -\omega(R) + \pi i + \tilde{\omega}(\varepsilon). \quad (1157)$$

Wir erhalten

$$\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{ix}}{x} dx = -\omega(R) + \pi i + \tilde{\omega}(\varepsilon). \quad (1158)$$

Betrachten wir den Imaginärteil so erhalten wir

$$\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\sin(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^R \frac{\sin(x)}{x} dx = -\operatorname{Im}(\omega(R)) + \pi + \operatorname{Im}(\tilde{\omega}(\varepsilon)). \quad (1159)$$

Nun ist $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ auf $(-\varepsilon, \varepsilon)$ integrierbar (da messbar auf $(-\varepsilon, \varepsilon) \setminus \{0\}$ und beschränkt). Somit können wir auf beiden Seiten $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\sin(x)}{x} dx$ dazuaddieren und erhalten

$$\int_{-R}^R \frac{\sin(x)}{x} dx = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\sin(x)}{x} dx - \operatorname{Im}(\omega(R)) + \pi + \operatorname{Im}(\tilde{\omega}(\varepsilon)) \quad (1160)$$

Lassen wir $\varepsilon \rightarrow 0$ und danach $R \rightarrow \infty$ gehen so folgt

$$p.v. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \pi. \quad (1161)$$

Die Behauptung ist gezeigt.

Aus (1133) schließen wir dann auch dass das uneigentliche Riemann-integral $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx$ existiert und den Wert $\frac{\pi}{2}$ annimmt. Beachte: Das steht nicht im Widerspruch zu Bemerkung 253! Zunächst könnte man dies vermuten, weil ein Resultat aus der Integrationstheorie

besagt, dass jede Riemann-integrierbare Funktion auch Lebesgue-integrierbar ist.

Die Auflösung für diesen Sachverhalt ist die folgende: Zwar sind (eigentlich) Riemann-integrierbare Funktionen stets Lebesgue-integrierbar aber für uneigentlich Riemann-integrierbare Funktionen gibt es kein solches Resultat (wie das von uns behandelte Beispiel zeigt).

4.4.4 Das Argumentprinzip

Im folgenden lernen wir ein Integralausdruck kennen, der *Nullstellen* und *Polstellen* auf eine gewisse Weise zählen kann. Dazu zunächst ein vorbereitendes Lemma

Lemma 254. Es sei $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

- (i) Hat f bei $z_0 \in \Omega$ eine Nullstelle und ist $k = \text{ord}(f, z_0)$ so gibt es für ein $r > 0$ eine holomorphe Funktion $g \in \mathcal{H}(B_r(z_0))$ mit $g(z_0) \neq 0$ und $f(z) = (z - z_0)^k g(z)$ für alle $z \in B_r(z_0)$.
- (ii) Hat f bei $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ eine Polstelle und ist $k = \text{Ord}(f, z_0)$ so gibt für ein $r > 0$ eine holomorphe Funktion $g \in \mathcal{H}(B_r(z_0))$ mit $g(z_0) \neq 0$ und $f(z) = (z - z_0)^{-k} g(z)$ für alle $z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$.

Beweis. Zu (i). Entwickle f um z_0 in eine Potenzreihe, d.h. es gibt $r > 0$ und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{C}$ so, dass

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \forall z \in B_r(z_0). \quad (1162)$$

mit $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$. Weil $k = \text{ord}(f, z_0)$ gilt $f(z_0) = f^{(1)}(z_0) = \dots = f^{(k-1)}(z_0) = 0$ und $f^{(k)}(z_0) \neq 0$, vgl. Definition 176). Somit gilt auch $a_0 = \dots = a_{k-1} = 0$ und $a_k \neq 0$. Mit (1162) erhalten wir für alle $z \in B_r(z_0)$

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^k \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-k} = (z - z_0)^k \left(a_k + \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-k} \right). \quad (1163)$$

Definieren wir nun $g : B_r(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$, $g(z) := a_k + \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-k}$, so folgt die Behauptung: Denn g ist als Potenzreihe holomorph und $g(z_0) = a_k \neq 0$.

Zu (ii). Folgt direkt wie im Beweis vom Zusatz zu Proposition 218. Wir wiederholen die Argumente der einfacheren Lesbarkeit halber. Sei $k = \text{Ord}(f, z_0)$ und $r > 0$ so, das $B_r(z_0) \setminus \{z_0\} \subset \Omega$. Dann hat $g_k(z) := (z - z_0)^k f(z)$ nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz eine holomorphe Fortsetzung auf $B_r(z_0)$, nennen wir sie $g \in \mathcal{H}(B_r(z_0))$. Wäre nun $g(z_0) = 0$ so wäre

$$q(z) := \begin{cases} \frac{g(z)}{z - z_0} & z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\} \\ g'(z_0) & z = z_0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} & z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\} \\ g'(z_0) & z = z_0 \end{cases} \quad (1164)$$

auch holomorph auf $B_r(z_0)$. Auf $B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ würde dann gelten

$$(z - z_0)^{k-1} f(z) = \frac{1}{z - z_0} g_k(z) = \frac{g(z)}{z - z_0} = q(z) \quad (1165)$$

und somit hätte (wegen der Holomorphie von q auf $B_r(z_0)$ und der daraus resultierenden Beschränktheit auf $B_{\frac{r}{2}}(z_0)$) bereits $g_{k-1}(z) := (z - z_0)^{k-1} f(z)$ eine hebbare Singularität. Dies widerspricht der Tatsache, dass $k = \text{Ord}(f, z_0)$ das minimale $k \in \mathbb{N}$ ist so, dass $(z - z_0)^k f(z)$ eine hebbare Singularität hat.

Satz 255. DER SATZ VOM ARGUMENT. Es sei $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $f \not\equiv 0$ so, dass $D = \Omega \cup \text{Iso}(f, \Omega)$ ein Elementargebiet ist. Ferner enthalte $\text{Iso}(f, \Omega)$ keine wesentlichen Singularitäten. Seien nun

$$N_f := \{z \in \Omega : f(z) = 0\} \quad (1166)$$

und

$$P_f := \{z \in \text{Iso}(f, \Omega) : z \text{ Polstelle}\} \quad (1167)$$

Dann gilt für $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega \setminus N_f$ geschlossen und stückweise C^1

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{w \in N_f} \text{ord}(f, w) n(\gamma, w) - \sum_{w \in P_f} \text{Ord}(f, w) n(\gamma, w) \quad (1168)$$

Beweis. O.b.d.A nehmen wir an, dass $\text{Iso}(f, \Omega)$ nur Polstellen enthält (denn alle hebbaren Singularitäten könne durch Wahl einer holomorphen Fortsetzung eliminiert werden, vgl. Riemannscher Abbildungssatz). Insbesondere ist also $\text{Iso}(f, \Omega) = P_f$. Wir wollen den Residuensatz auf $\frac{f'}{f}$ anwenden. Die Funktion $\frac{f'}{f}$ ist nach Goursat's Beobachtung holomorph auf $\hat{\Omega} := \Omega \setminus N_f$. Wir zeigen nun zuerst, dass

$$\text{Iso}\left(\frac{f'}{f}, \hat{\Omega}\right) = N_f \cup \text{Iso}(f, \Omega) [= N_f \cup P_f]. \quad (1169)$$

Ist das gezeigt, so ist der erweiterte Definitionsbereich von $\frac{f'}{f}$ gegeben durch

$$\hat{\Omega} \cup \text{Iso}\left(\frac{f'}{f}, \hat{\Omega}\right) = (\Omega \setminus N_f) \cup (N_f \cup \text{Iso}(f, \Omega)) = \Omega \cup \text{Iso}(f, \Omega) = D. \quad (1170)$$

Da D ein Elementargebiet ist, ist dann der Residuensatz anwendbar. Zeigen wir also (1169). Wir zeigen dafür $N_f \subset \text{Iso}\left(\frac{f'}{f}, \hat{\Omega}\right)$ und $\text{Iso}(f, \Omega) \subset \text{Iso}\left(\frac{f'}{f}, \hat{\Omega}\right)$. Zur ersten Teilmengenrelation: Sei dazu zuerst $z_0 \in N_f$. Wir müssen zeigen, dass z_0 isolierte Singularität von $\frac{f'}{f} : \hat{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$ ist, d.h. es gibt $r > 0$ so, dass $B_r(z_0) \setminus \{z_0\} \subset \hat{\Omega}$. Da $z_0 \in \Omega$ gibt es zunächst ein $r' > 0$ so, dass $B_{r'}(z_0) \subset \Omega$. Angenommen es gibt nun kein $r > 0$ so, dass $B_r(z_0) \setminus \{z_0\} \subset \hat{\Omega}$. Dann gibt es für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $z_n \in (B_{\frac{1}{n}}(z_0) \setminus \{z_0\}) \setminus \hat{\Omega}$. Ist $\frac{1}{n} < r'$ so ist $z_n \in \Omega$. Die einzige Möglichkeit, dass z_n nicht in $\hat{\Omega}$ landet ist daher, dass $z_n \in N_f$. Somit gilt also $f(z_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da $z_n \in B_{\frac{1}{n}}(z_0)$ gilt aber auch, dass $z_n \rightarrow z_0$.

Das würde bedeuten, dass z_0 ein Häufungspunkt von $N_f := \{z \in \Omega : f(z) = 0\}$ ist. Ein Widerspruch zum Identitätssatz für holomorphe Funktionen, vgl. Satz 173. Nun muss noch gezeigt werden, dass $\text{Iso}(f, \Omega) \subset \text{Iso}(\frac{f'}{f}, \hat{\Omega})$. Sei dazu $z_0 \in \text{Iso}(f, \Omega)$ (d.h. z_0 ist eine Polstelle). Insbesondere gilt $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ und es gibt $r > 0$ so, dass $B_r(z_0) \setminus \{z_0\} \subset \Omega$. Wir behaupten nun, dass es ein $\tilde{r} < r$ gibt mit $B_{\tilde{r}}(z_0) \setminus \{z_0\} \subset \hat{\Omega}$. In der Tat: Gibt es ein solches \tilde{r} nicht so gäbe es eine Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset (\Omega \setminus \hat{\Omega}) \setminus \{z_0\} [= N_f \setminus \{z_0\}]$ so, dass $z_n \rightarrow z_0$. Wiederum wäre also $f(z_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach dem Zusatz zu Proposition 218 gilt aber an der Polstelle z_0 , dass $\lim_{z \rightarrow z_0, z \in \Omega} |f(z)| = \infty$. Ein Widerspruch (denn dann müsste auch $|f(z_n)| \rightarrow \infty$ gelten). Endlich haben wir geklärt was die isolierten Singularitäten von $\frac{f'}{f}$ sind und können den Residuensatz anwenden. Dazu:

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i \sum_{w \in \text{Iso}(\frac{f'}{f}, \Omega)} \text{Res}(\frac{f'}{f}, w) n(\gamma, w) = 2\pi i \sum_{w \in P_f \cup N_f} \text{Res}(\frac{f'}{f}, w) n(\gamma, w). \quad (1171)$$

Nun bestimmen wir die Residuen. Hierzu verwenden wir Lemma 254. Ist $z_0 \in N_f$ und $\text{ord}(f, z_0) = k$ so gibt es nach Lemma 254 (i) $g \in \mathcal{H}(B_r(z_0))$, $g(z_0) \neq 0$ so dass

$$f(z) = (z - z_0)^k g(z) \quad \forall z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\} \quad (1172)$$

und somit

$$f'(z) = k(z - z_0)^{k-1} g(z) + (z - z_0)^k g'(z) \quad \forall z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\}. \quad (1173)$$

Daher gilt auch

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k(z - z_0)^{k-1} g(z) + (z - z_0)^k g'(z)}{(z - z_0)^k g(z)} = \frac{k}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)} \quad \forall z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\}. \quad (1174)$$

Da $g(z_0) \neq 0$, ist $\frac{g'}{g}$ in einer Umgebung von z_0 holomorph und kann somit in eine Potenzreihe entwickelt werden. Etwa gelte $\frac{g'(z)}{g(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ für alle $z \in B_R(z_0)$. Wir erhalten also mit (1174)

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k}{(z - z_0)} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad \forall z \in B_{\min\{r, R\}}(z_0) \setminus \{z_0\}. \quad (1175)$$

Dies ist eine Laurentreihendarstellung für $\frac{f'}{f}$ in einem punktierten Kreisringgebiet. Aus einer solchen Laurentreihendarstellung lässt sich das Residuum ablesen: Da $k(z - z_0)^{-1}$ der Hauptteil der Laurentreihe ist gilt

$$\text{Res}(\frac{f'}{f}, z_0) = k = \text{ord}(f, z_0). \quad (1176)$$

Völlig analog (nur mit der Verwendung von Lemma 254 (ii) anstatt (i)) finden wir heraus, dass bei einer Polstelle $z_0 \in P_f$ gilt

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}, z_0\right) = -\operatorname{Ord}(f, z_0). \quad (1177)$$

Mit diesen Erkenntnissen und (1171) ergibt sich die Behauptung.

Bemerkung 256. Die Abbildung $z \mapsto \frac{f'(z)}{f(z)}$ wird häufig *logarithmische Ableitung* von f genannt. Dies ist motiviert dadurch, dass $\log'(w) = \frac{1}{w}$ für alle $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ und daher impliziert das formale Anwenden der Kettenregel

$$\partial_z \log(f(z)) = \frac{1}{f(z)} f'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}. \quad (1178)$$

Einen Haken gibt es allerdings bei der Anwendung dieser Kettenregel: Damit der Logarithmus bei $f(z)$ holomorph ist, muss $f(z)$ in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ liegen. Diese Zusatzvoraussetzung würde unsere Möglichkeiten erheblich einschränken, weswegen wir Details hier nicht vertiefen. Nichtsdestotrotz kann die Intuition als logarithmische Ableitung hilfreich sein.

4.4.5 *Die Fouriertransformation

Der Residuensatz erlaubt uns, einige Ausdrücke der Form $\hat{f}(k) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ikx} dx$ zu berechnen. Dies ist sehr hilfreich: Denn wir können damit die *Fouriertransformation* einiger Funktionen explizit berechnen. Diese wiederum ist sehr hilfreich dabei, Differentialgleichungen zu lösen wie Sie bereits zum Teil in der Maß- und Integrationstheorie gesehen haben. Wir wiederholen zunächst einige wichtige Fakten über die Fouriertransformation

Wiederholung 257. FOURIERTRANSFORMATION. Es sei $f \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$. Dann definieren wir für $k \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}(f)(k) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} dx. \quad (1179)$$

Wir definieren den *Schwartz'schen Funktionenraum* durch

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C}) : \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^\beta f^{(\alpha)}(x)| < \infty \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0\}. \quad (1180)$$

Hierbei bezeichnet wie immer in unserer Vorlesung $f^{(\alpha)}$ die α -te Ableitung von f . Dann gilt

- (i) $\mathcal{F}(f) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ für alle $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Außerdem ist $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$ \mathbb{C} -linear, d.h. $\mathcal{F}(f + \lambda g) = \mathcal{F}(f) + \lambda \mathcal{F}(g)$ für alle $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ und $\lambda \in \mathbb{C}$.
- (ii) Für alle $\alpha \in \mathbb{N}$ und $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ gilt $\mathcal{F}(f)^{(\alpha)} = (-i)^\alpha \mathcal{F}(M_\alpha f)$, wobei $M_\alpha f(x) := x^\alpha f(x)$ für $x \in \mathbb{R}$

(iii) Für alle $\alpha \in \mathbb{N}$ und $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ gilt $i^\alpha M_\alpha \mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(f^{(\alpha)})$, wobei für alle $[M_\alpha \mathcal{F}(f)](k) := k^\alpha \mathcal{F}(f)(k)$, ($k \in \mathbb{R}$).

(iv) Die Abbildung $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist bijektiv und ihre Inverse ist gegeben durch

$$\mathcal{F}^{-1}(g)(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(k) e^{ikt} dk \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (1181)$$

Kurzgesagt: Die Fouriertransformation ist eine bijektive lineare Abbildung auf $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ welche Ableitung in Multiplikation überführt (und rückwärts).

Die Eigenschaft, dass Ableitung in Multiplikation überführt wird, kann hervorragend genutzt werden um *Differentialgleichungen* explizit zu lösen. Denn wenn Ableitungen zu Multiplikationen werden, so werden Differentialgleichungen zu *algebraischen Gleichungen*. Diese Beobachtung wird in der folgenden Proposition entscheidend sein.

Proposition 258. Es sei $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ und die *gewöhnliche Differentialgleichung*

$$y''(t) - y(t) = g(t) \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (1182)$$

gegeben. Dann ist

$$y_F(t) := -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+k^2} \mathcal{F}(g)(k) e^{ikt} dk \quad (1183)$$

eine Lösung. Die allgemeine Lösung ist dann gegeben durch

$$\mathbb{L} := \{y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + y_F(t) : c_1, c_2 \in \mathbb{C}\} \quad (1184)$$

Beweis. Zunächst treffen wir die folgende ANNAHME: Man findet eine Lösung $y \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Diese Annahme muss nicht gerechtfertigt sein, denn es kann durchaus sein, dass es keine Lösungen in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ gibt. Wir probieren sie aber trotzdem aus. Wenn dieser Ansatz keine Lösung liefern würde müssten wir uns etwas anderes einfallen lassen. Glücklicherweise geht am Ende aber alles auf. Die Aussage " $y'' - y = g$ auf \mathbb{R} " ist nun (dank $y \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$) äquivalent zu

$$\mathcal{F}(y'') - \mathcal{F}(y) = \mathcal{F}(g). \quad (1185)$$

Mit Bemerkung 257 (iii) (rückwärts gelesen) gilt

$$\mathcal{F}(y'') = \mathcal{F}(y^{(2)}) = i^2 M_2 \mathcal{F}(y). \quad (1186)$$

Somit erhält man aus (1185)

$$\mathcal{F}(g)(k) = [\mathcal{F}(y'') - \mathcal{F}(y)](k) = i^2 [M_2 \mathcal{F}(y)](k) - [\mathcal{F}(y)](k) \quad (1187)$$

$$= -k^2 \mathcal{F}(y)(k) - \mathcal{F}(y)(k) = -(k^2 + 1) \mathcal{F}(y)(k). \quad (1188)$$

Teilt man durch $-(k^2 + 1)$ und liest rückwärts so erhält man

$$\mathcal{F}(y)(k) = -\frac{1}{k^2 + 1} \mathcal{F}(g)(k). \quad (1189)$$

ZWISCHENBEHAUPTUNG. $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $H(x) := -\frac{1}{x^2+1} \mathcal{F}(g)(x)$ erfüllt $H \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Das sieht man so: Die Funktion $p(x) := \frac{1}{1+x^2}$ erfüllt, dass es zu jedem $k \in \mathbb{N}_0$ ein Polynom q_k gibt mit

$$p^{(k)}(x) = \frac{q_k(x)}{(1+x^2)^{k+1}} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0. \quad (1190)$$

Dies zeigt man leicht mit Induktion nach k . Da $H = p\mathcal{F}(g)$ gilt (nach der Leibnizschen Produktregel)

$$H^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{k} p^{(k)}(x) \mathcal{F}(g)^{\alpha-k}(x) = \sum_{k=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{k} \frac{q_k(x)}{(1+x^2)^k} \mathcal{F}(g)(x)^{\alpha-k} \quad (1191)$$

Somit gilt für $\beta \in \mathbb{N}$

$$|x^\beta H^{(\alpha)}(x)| = \left| \sum_{k=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{k} \frac{x^\beta q_k(x)}{(1+x^2)^k} \mathcal{F}(g)(x)^{\alpha-k} \right| \quad (1192)$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{k} \frac{|x^\beta q_k(x) \mathcal{F}(g)(x)^{\alpha-k}|}{(1+x^2)^k} \leq \sum_{k=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{k} |x^\beta q_k(x) \mathcal{F}(g)(x)^{\alpha-k}| \quad (1193)$$

Da $\mathcal{F}(g) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ fällt jede Ableitung von $\mathcal{F}(g)$ schneller als jedes Polynom, weswegen $x \mapsto |x^\beta q_k(x) \mathcal{F}(g)(x)^{\alpha-k}|$ auf ganz \mathbb{R} beschränkt ist. Somit folgt auch die Beschränktheit von $x \mapsto x^\beta H^{(\alpha)}(x)$.

ENDE DER ZWISCHENBEHAUPTUNG.

Da nun die rechte Seite von (1189) in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ liegt, kann man \mathcal{F}^{-1} auf (1189) anwenden und erhält

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(y))(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(y)(k) e^{ikt} dk \stackrel{(1189)}{=} -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathcal{F}(g)(k)}{1+k^2} e^{ikt} dk =: y_F(t). \quad (1194)$$

Diese Formel gilt also für alle Lösungen y mit der (bisher nicht gerechtfertigten) Zusatzannahme, dass $y \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Man sieht also auch, dass nur eine einzige Lösung $y = y_F$ die getroffene Annahme " $y \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ " erfüllt. Wir setzen nun

$$y_F(t) := -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathcal{F}(g)(k)}{1+k^2} e^{ikt} dk \quad (t \in \mathbb{R}). \quad (1195)$$

Nun noch zu (1184). Es sei $y \in \mathbb{L}$ eine Lösung. Definiere $z(t) := y(t) - y_F(t)$, ($t \in \mathbb{R}$). Dann gilt

$$z''(t) - z(t) = (y - y_F)''(t) - (y - y_F)(t) = y''(t) - y_F''(t) - y(t) + y_F(t) \quad (1196)$$

$$= (y''(t) - y(t)) - (y_F''(t) - y_F(t)) = g(t) - g(t) = 0. \quad (1197)$$

Somit löst z die *homogene Gleichung* $z''(t) - z(t) = 0$. In der Vorlesung gewöhnlichen Differentialgleichungen haben wir gesehen, dass

$$z(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} \quad \text{für gewisse } c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \quad (1198)$$

Mit $z(t) = y(t) - y_F(t)$ erhalten wir

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + y_F(t). \quad (1199)$$

Man sollte stets bedenken, dass die Beweistechnik im vorigen Beweis sich nicht für jede beliebige Differentialgleichung

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = g(t) \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (a, b \in \mathbb{C}, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})) \quad (1200)$$

wiederholen lässt. Denn es ist a priori nicht klar, ob es möglich ist, eine Lösung in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ zu finden. Falls es aber eine solche Lösung gibt, kann sie wie oben mithilfe der Fouriertransformation bestimmt werden. Einen Versuch ist es daher immer wert.

5 *Die Gammafunktion

Wir kennen derzeit noch wenige Beispiele holomorphe Funktionen. Sicherlich sind sämtliche konvergente Potenzreihen Beispiele für holomorphe Funktionen. Jedoch ist hier das Holomorphiegebiet stets ein Ball und auch lassen sich nur wenige Eigenschaften der Funktion aus der Potenzreihe ablesen.

Hier lernen wir eine holomorphen Funktion kennen, die nicht einfach mit den gängigen Funktionen darstellbar ist — wir besprechen die holomorphe *Gamma-Funktion*.

Wir werden diese Funktion zunächst für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(z) > 0$ definieren und dann größtmöglich *holomorph fortsetzen*. Solche *analytischen Fortsetzungen* sind oft schwer zu fassen, da es nicht leicht ist, deren Werte auszurechnen.

Unser Studium wird uns aber erlauben, die Fortsetzung der Gammafunktion explizit verstehen. Der Schlüssel dazu ist die *Euler'sche Erweiterungsidentität*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}. \quad (1201)$$

Die Herleitung dieser Identität wird viele Eigenschaften der Gamma-Funktion und unser Vorwissen über holomorphe Funktionen benötigen.

Definition 259. GAMMA-INTEGRAL. Für $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(z) > 0$ definieren wir das

Gamma-Integral

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, \quad (1202)$$

sofern dieses Integral im Lebesgue'schen Sinne existiert. Hierbei ist wie üblich $t^{z-1} := e^{(z-1)\log(t)}$.

Proposition 259. $\Gamma(z)$ ist für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(z) > 0$ ein konvergentes Integral und die Abbildung $z \mapsto \Gamma(z)$ ist auf $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$ holomorph.

Beweisskizze. Zur Konvergenz des Integrals.

$$\int_0^\infty |t^{z-1} e^{-t}| dt = \int_0^\infty |e^{(z-1)\log(t)} e^{-t}| dt = \int_0^\infty e^{(\operatorname{Re}(z)-1)\log(t)} e^{-t} dt = \int_0^\infty t^{\operatorname{Re}(z)-1} e^{-t} dt. \quad (1203)$$

Es sei $R > 0$ nun so gewählt, dass $t^{\operatorname{Re}(z)-1} e^{-t/2} < 1$ für alle $t > R$. [Ein solches $R > 0$ gibt es weil $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\operatorname{Re}(z)} e^{-t} \rightarrow 0$, ($t \rightarrow \infty$)]. Nun teilen wir das Integral auf.

$$\int_0^R t^{\operatorname{Re}(z)-1} \underbrace{e^{-t}}_{\leq 1} dt \leq \int_0^R t^{\operatorname{Re}(z)-1} dt = \left[\frac{1}{\operatorname{Re}(z)} t^{\operatorname{Re}(z)} \right]_0^R = \frac{1}{\operatorname{Re}(z)} R^{\operatorname{Re}(z)} < \infty. \quad (1204)$$

$$\int_R^\infty t^{\operatorname{Re}(z)-1} e^{-t} dt = \int_R^\infty \underbrace{t^{\operatorname{Re}(z)-1} e^{-t/2}}_{\leq 1} e^{-t/2} dt = \int_R^\infty e^{-t/2} dt = [-2e^{-t/2}]_R^\infty = 2e^{-R/2} < \infty. \quad (1205)$$

Die Konvergenz des Integrals folgt aus den beiden vorigen Gleichungen. Zur Holomorphie. Schreibe

$$\Gamma(x + iy) = \int_0^\infty t^{x+iy} e^{-t} dt = \int_0^\infty t^x t^{iy} e^{-t} dt = \int_0^\infty e^{x \log(t)-t} e^{iy \log(t)} dt \quad (1206)$$

und definiere für $x > 0$, $y \in \mathbb{R}$

$$u(x, y) := \operatorname{Re}(\Gamma(x + iy)) = \int_0^\infty e^{x \log(t)-t} \cos(y \log t) dt \quad (1207)$$

und

$$v(x, y) := \operatorname{Im}(\Gamma(x + iy)) = \int_0^\infty e^{x \log(t)-t} \sin(y \log t) dt \quad (1208)$$

Nutze dann Bemerkung 125 um u und v nach x und y zu differenzieren und prüfe die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen nach.

Proposition 260. DIE FUNKTIONALGLEICHUNG. Es gilt

(i) $\Gamma(1) = 1$,

(ii) $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(z) > 0$.

Beweis. Zu (i). Man rechnet leicht nach

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty t^{1-1} e^{-t} dt = \int_0^\infty e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^\infty = 1. \quad (1209)$$

Zu (ii). Wir integrieren partiell (vgl. Bemerkung 125).

$$\Gamma(z + 1) = \int_0^\infty t^{z+1-1} e^{-t} dt = \int_0^\infty t^z e^{-t} dt = \int_0^\infty t^z \frac{d}{dt}(-e^{-t}) dt \quad (1210)$$

$$= [t^z(-e^{-t})]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{d}{dt}(t^z)(-e^{-t}) dt = \int_0^\infty \frac{d}{dt}(t^z)e^{-t} dt = \int_0^\infty \frac{d}{dt}(e^{z \log(t)})e^{-t} dt \quad (1211)$$

$$= \int_0^\infty z \frac{1}{t} e^{z \log(t)} e^{-t} dt = \int_0^\infty z \frac{1}{t} t^z e^{-t} dt = \int_0^\infty z t^{z-1} e^{-t} dt = z \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \quad (1212)$$

$$= z\Gamma(z). \quad (1213)$$

Das war zu zeigen

Ein wichtiges (und wahrscheinlich schon bekanntes) Korollar aus der Funktionalgleichung ist, dass das Gammaintegral einen Bezug hat zu der Fakultät. Genauer: Es *interpoliert* die Funktion $n \mapsto n!$.

Korollar 261. Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\Gamma(n + 1) = n!. \quad (1214)$$

Beweis. Induktion nach n . Für $n = 0$ gilt

$$\Gamma(0 + 1) = \Gamma(1) = 1 \quad (1215)$$

und

$$0! = 1. \quad (1216)$$

Somit gilt (1214) im Fall $n = 0$. Es gelte nun für ein $n \in \mathbb{N}_0$ die Gleichung (1214). Dann gilt auch

$$\Gamma((n+1)+1) = \Gamma(n+2) \stackrel{\text{Proposition 260}}{=} (n+1)\Gamma(n+1) \stackrel{\text{Induktionshyp.}}{=} (n+1)n! = (n+1)!. \quad (1217)$$

Die Behauptung folgt.

Bemerkung 262. Eine weitere Beobachtung aus der Funktionalgleichung ist, dass Γ in einer Umgebung von $z = 0$ unbeschränkt ist. In der Tat: Aus der Funktionalgleichung $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$ folgt

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z + 1)}{z} \quad \forall z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0. \quad (1218)$$

Lassen wir z gegen Null streben und benutzen $\Gamma(1) = 1$ so erhalten wir

$$|\Gamma(z)| \rightarrow \infty \quad (z \rightarrow 0). \quad (1219)$$

Im Folgenden werden wir noch eine weitere Eigenschaft der Gammafunktion häufig verwenden: Die Beschränktheit auf einem *Vertikalstreifen*.

Proposition 263. Für alle $z \in \mathbb{C} : 1 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 3$ gilt $|\Gamma(z)| \leq 3$.

Beweis. Es sei $z = x + iy$ mit $1 \leq x \leq 3$. Dann gilt

$$|\Gamma(z)| = |\Gamma(x + iy)| = \left| \int_0^\infty t^{x+iy-1} e^{-t} dt \right| \leq \int_0^\infty |t^{x+iy-1} e^{-t}| dt \leq \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt. \quad (1220)$$

Wir teilen das Integral auf

$$\int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt \leq \int_0^1 t^{x-1} dt = \left[\frac{1}{x} t^x \right]_0^1 = \frac{1}{x} \leq 1 \quad (1221)$$

und (weil $x \leq 3$)

$$\int_1^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \leq \int_1^\infty t^{3-1} e^{-t} dt \leq \int_0^\infty t^{3-1} e^{-t} dt = \Gamma(3) = 2! = 2 \quad (1222)$$

Aus den drei obigen Gleichungen folgt

$$|\Gamma(z)| = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt = \int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt + \int_1^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \leq 1 + 2 = 3. \quad (1223)$$

Die Funktionalgleichung kann nun benutzt werden, um das Gammaintegral zu einer holomorphen Funktion fortzusetzen, der *Gammafunktion*.

Man beachte allerdings, dass eine solche Fortsetzung bei $z = 0$ nicht holomorph sein kann, vgl. Bemerkung 262. Die Frage, die sich stellt ist daher auch, was die größtmögliche Menge ist, auf der eine holomorphe Fortsetzung gefunden werden kann.

Proposition 264. Es gibt genau eine Funktion $\tilde{\Gamma} \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{-n : n \in \mathbb{N}_0\})$ so, dass

(i) $\tilde{\Gamma}(z + 1) = z\tilde{\Gamma}(z)$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{-n : n \in \mathbb{N}_0\}$

(ii) $\tilde{\Gamma}|_{\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}} = \Gamma$.

Beweis. Existenz. Es sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $\Omega_n := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > -n\} \setminus \{0, -1, \dots, -n+1\}$. Für $z \in \Omega_n$ definieren wir

$$\tilde{\Gamma}_n(z) := \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1) \cdots (z+n-1)}. \quad (1224)$$

(Beachte, dass $\tilde{\Gamma}_0 \equiv \Gamma$, da die Liste der Faktoren im Nenner dann leer ist und das Produkt daher als 1 behandelt wird). Klarerweise ist $\tilde{\Gamma}_n$ holomorph auf Ω_n (da die Nullstellen des Nenners nicht in Ω_n enthalten sind und $z+n$ positiven Realteil hat, d.h. im Holomorphiegebiet von Γ liegt).

BEHAUPTUNG 1. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $\tilde{\Gamma}_{n+1}|_{\Omega_n} = \tilde{\Gamma}_n$. Dazu: Es sei $z \in \Omega_n$. Aus $\operatorname{Re}(z) > -n$ folgt $\operatorname{Re}(z+n) > 0$. Daher gilt

$$\tilde{\Gamma}_{n+1}(z) \stackrel{(1224)}{=} \frac{\Gamma(z+(n+1))}{z(z+1) \cdots (z+n)} = \frac{\Gamma((z+n)+1)}{z(z+1) \cdots (z+n)} \quad (1225)$$

$$\stackrel{\text{Proposition 260}}{=} \frac{\Gamma(z+(n+1))}{z(z+1) \cdots (z+n)} = \frac{(z+n)\Gamma(z+n)}{z(z+1) \cdots (z+n)} \quad (1226)$$

$$= \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1) \cdots (z+n-1)} = \tilde{\Gamma}_n(z). \quad (1227)$$

Induktiv folgert man, dass für alle $k < n$ gilt $\tilde{\Gamma}_n|_{\Omega_k} = \tilde{\Gamma}_k$. Insbesondere $\tilde{\Gamma}_n|_{\Omega_0} = \tilde{\Gamma}_0 = \Gamma$. Somit handelt es sich bei allen $\tilde{\Gamma}_n$ um holomorphe Fortsetzungen von Γ .

BEHAUPTUNG 2. Für alle $z \in \Omega_n$ gilt $\tilde{\Gamma}_n(z+1) = z\tilde{\Gamma}_n(z)$. Dazu:

$$\tilde{\Gamma}_n(z+1) = \frac{\Gamma(z+1+n)}{(z+1) \cdots (z+n)} = \frac{(z+n)\Gamma(z+n)}{(z+1) \cdots (z+n)} \quad (1228)$$

$$= \frac{\Gamma(z+n)}{(z+1) \cdots (z+n-1)} = z \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1) \cdots (z+n-1)} = z\tilde{\Gamma}_n(z). \quad (1229)$$

Definiere nun für $z \in \mathbb{C} \setminus \{-n : n \in \mathbb{N}_0\} = \bigcup_{k \geq 0} \Omega_k$

$$\tilde{\Gamma}(z) := \tilde{\Gamma}_k(z) \quad (\text{falls } z \in \Omega_k) \quad (1230)$$

Ein solches $\tilde{\Gamma}$ ist wohldefiniert und holomorph aufgrund von Behauptung 1. Außerdem ist es wegen Behauptung 1 auch eine Fortsetzung von Γ . Wir folgern ferner aus Behauptung 2, dass $\tilde{\Gamma}$ die Funktionalgleichung (i) erfüllt.

Eindeutigkeit. Angenommen es gäbe zwei holomorphe Fortsetzungen $\tilde{\Gamma}, \hat{\Gamma} \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{-n : n \in \mathbb{N}_0\})$, die (i) und (ii) genügen. Dann würde für alle $z \in A := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$ gelten, dass

$$\tilde{\Gamma}(z) = \Gamma(z) = \hat{\Gamma}(z). \quad (1231)$$

Somit wäre $\{z \in \mathbb{C} : \tilde{\Gamma}(z) = \hat{\Gamma}(z)\} \supset A$. Da A einen Häufungspunkt besitzt folgt aus dem Identitätssatz für holomorphe Funktionen (Satz 173), dass $\tilde{\Gamma} \equiv \hat{\Gamma}$.

Definition 265. Die Funktion $\tilde{\Gamma} : \mathbb{C} \setminus \{-n : n \in \mathbb{N}_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ nennen wir *Gamma-Funktion*. Im Folgenden werden wir sie salopp nur mit Γ bezeichnen.

Es ist übrigens nicht möglich, Γ auf eine größere Menge holomorph fortzusetzen, wie die folgende Proposition zeigt.

Proposition 266. Es sei $n \in \mathbb{N}_0$. Dann hat Γ bei $-n$ eine Polstelle der Ordnung 1 und $\text{Res}(\Gamma, -n) = \frac{(-1)^n}{n!}$. Insbesondere gibt es für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Potenzreihe $P_n(z) = \sum_{k \geq 0} c_k^n (z+n)^k$ mit Entwicklungspunkt $-n$ und Konvergenzradius 1 so, dass

$$\Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k^n (z+n)^k \quad \forall z \in A_{0,1}(-n). \quad (1232)$$

Beweis. Es sei $n \in \mathbb{N}_0$. Klarerweise gilt $-n \in \text{Iso}(\Gamma, \mathbb{C} \setminus \{-k : k \in \mathbb{N}_0\})$. Ein $n+1$ -mailges Anwenden der Funktionalgleichung liefert

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} = \frac{\Gamma(z+2)}{z(z+1)} = \dots = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1) \cdot \dots \cdot (z+n)}. \quad (1233)$$

Insbesondere ist Γ Quotient von zwei Funktionen in $\mathcal{H}(B_r(-n))$ ($r \in (0, 1)$). Da der Zähler bei $z = -n$ den Wert $\Gamma(1) = 1$ annimmt und der Nenner den Wert 0 haben wir bei $-n$ eine Polstelle vorliegen (vgl. Proposition 220). Ferner gilt

$$(z+n)\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1) \cdot \dots \cdot (z+n-1)} \quad (1234)$$

und daher

$$\lim_{z \rightarrow -n} (z+n)\Gamma(z) = \frac{\Gamma(1)}{(-n)(-n+1) \cdot \dots \cdot (-n+n-1)} \quad (1235)$$

$$= \frac{1}{(-n)(-n-1)(-n-2) \cdot \dots \cdot (-1)} \quad (1236)$$

$$= \frac{1}{(-1)^n (n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1)} = \frac{(-1)^n}{n!}. \quad (1237)$$

Wir folgern, dass $z \mapsto (z - (-n))^1 \Gamma(z)$ in einer Umgebung von $z = -n$ beschränkt ist und daher ein Pol der Ordnung ≤ 1 vorliegt. Für das Residuum gilt dann nach Proposition 238

$$\text{Res}(\Gamma, -n) = \lim_{z \rightarrow -n} (z - (-n))\Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!}. \quad (1238)$$

Wegen Proposition 233 (ii) besteht der der Hauptteil der Laurentreihe in $A_{0,1}(-n)$ aus höchstens $\text{Ord}(\Gamma, -n) = 1$ Summanden. Somit ist nur der -1 -ste Koeffizient wichtig für den Hauptteil der Laurentreihen. Da dieser aber nach Definition gerade $\text{Res}(\Gamma, -n)$ ist folgt (1232).

Die obige Proposition lehrt uns bereits einiges über die holomorphe Fortsetzung Γ : Wir haben schonmal die Singularitäten und Residuen bestimmt. Unser Ziel ist es, eine explizite Formel für die Fortsetzung zu bestimmen. Diese wird durch den *Euler'schen Erweiterungssatz* gegeben sein, der besagt, dass

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}. \quad (1239)$$

Mit dieser Formel lässt sich die Fortsetzung explizit bestimmen: Für $z \in \mathbb{C}$ mit $\text{Re}(z) \leq 0$ gilt dann nämlich

$$\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)\Gamma(1-z)} = \frac{\pi}{\sin(\pi z) \int_0^\infty t^{-z} e^{-t} dt}. \quad (1240)$$

Um (1239) zu beweisen, werden wir zunächst ein paar Gemeinsamkeiten der Funktionen $z \mapsto \Gamma(z)\Gamma(1-z)$ und $z \mapsto \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$ studieren.

Korollar 267. Definiere $f : \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ durch $f(z) := \Gamma(z)\Gamma(1-z)$. Dann gilt

$$f(z+1) = -f(z) \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \quad (1241)$$

und

$$f(z+2) = f(z) \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}. \quad (1242)$$

Ferner ist jedes alle $n \in \mathbb{Z}$ ein Polstelle der Ordnung 1 und es gilt $\text{Res}(f, n) = (-1)^n$. Insbesondere gibt es für alle $n \in \mathbb{Z}$ eine Potenzreihe der Form $P_n(z) = \sum_{k \geq 0} a_k^n (z-n)^k$ mit Entwicklungspunkt n und Konvergenzradius 1 so, dass

$$f(z) = \frac{(-1)^n}{z-n} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k^n (z-n)^k \quad \forall z \in A_{0,1}(n) \quad (1243)$$

Beweis. Wir zeigen zuerst $f(z+1) = -f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Dazu:

$$f(z+1) = \Gamma(z+1)\Gamma(1-(z+1)) = \Gamma(z+1)\Gamma(-z) = z\Gamma(z)\Gamma(-z) = -\Gamma(z)(-z)\Gamma(-z) \quad (1244)$$

$$= -\Gamma(z)[(-z)\Gamma(-z)] = -\Gamma(z)\Gamma(-z+1) = -\Gamma(z)\Gamma(1-z) = -f(z). \quad (1245)$$

Somit gilt

$$f(z+2) = -f(z+1) = -[-f(z)] = f(z). \quad (1246)$$

Es sei nun $n \in \mathbb{Z}$. Falls $n \leq 0$, etwa $n = -\tilde{n}$ für $\tilde{n} \in \mathbb{N}_0$ so, ist n Polstelle der Ordnung 1

von $z \mapsto \Gamma(z)$. Ferner gilt

$$\lim_{z \rightarrow -\tilde{n}} \Gamma(1 - z) = \Gamma(1 + \tilde{n}) = \tilde{n}! \neq 0. \quad (1247)$$

Aufgrund dieser Tatsache überzeugt man sich leicht, dass $z \mapsto \Gamma(z)\Gamma(1 - z)$ eine Polstelle der Ordnung 1 hat und es gilt

$$\operatorname{Res}(f, -\tilde{n}) = \lim_{z \rightarrow -\tilde{n}} (z - (-\tilde{n}))\Gamma(z)\Gamma(1 - z) \quad (1248)$$

$$= \operatorname{Res}(\Gamma, -\tilde{n}) \lim_{z \rightarrow -\tilde{n}} \Gamma(1 - z) \stackrel{(1247)}{=} \frac{(-1)^{\tilde{n}}}{\tilde{n}!} \tilde{n}! = (-1)^{\tilde{n}}. \quad (1249)$$

Für $n > 0$ gilt $1 - n \leq 0$. Man überzeugt sich schnell davon, dass $f(z) = f(1 - z)$ und somit muss die Polstellenordnung von f bei n dasselbe sein wie das bei $1 - n$. Daher ist diese gleich 1. Wir folgern

$$\operatorname{Res}(f, n) = \lim_{z \rightarrow n} (z - n)f(z) = \lim_{z \rightarrow n} -((1 - z) - (1 - n))f(z) \quad (1250)$$

$$= \lim_{z \rightarrow n} -((1 - z) - (1 - n))f(1 - z) \stackrel{=}{=} \lim_{w:1-z \rightarrow 1-n} -(w - (1 - n))f(w) \quad (1251)$$

$$= -\operatorname{Res}(f, 1 - n) = -(-1)^{1-n} = (-1)^n. \quad (1252)$$

Gleichung (1255) folgt wie im vorigen Beweis.

Wir überzeugen uns nun davon, dass $z \mapsto \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$ dieselben Eigenschaften wie in der obigen Proposition erfüllt.

Lemma 268. Definiere $g : \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ durch $g(z) := \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$. Dann gilt

$$g(z + 1) = -g(z) \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \quad (1253)$$

und

$$g(z + 2) = g(z) \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}. \quad (1254)$$

Ferner ist jedes $n \in \mathbb{Z}$ eine Polstelle der Ordnung 1 und es gilt $\operatorname{Res}(g, n) = (-1)^n$. Insbesondere gibt es für alle $n \in \mathbb{Z}$ eine Potenzreihe der Form $P_n(z) = \sum_{k \geq 0} b_k^n (z - n)^k$ mit Entwicklungspunkt n und Konvergenzradius 1 so, dass

$$g(z) = \frac{(-1)^n}{z - n} + \sum_{k=0}^{\infty} b_k^n (z - n)^k \quad \forall z \in A_{0,1}(n). \quad (1255)$$

Beweisskizze. Gleichung (1253) folgt aus der Tatsache, dass $\sin(w + \pi) = -\sin(w)$ für alle $w \in \mathbb{C}$. Gleichung (1254) folgt direkt aus (1253). Der Rest der Behauptung folgt leicht

aus der Tatsache, dass

$$\lim_{z \rightarrow n} (z-n)^1 g(z) = \lim_{z \rightarrow n} \frac{\pi(z-n)}{\sin(\pi z)} = \lim_{z \rightarrow n} \frac{\pi z - \pi n}{\sin(\pi z)} = \lim_{z \rightarrow n} \frac{\pi z - \pi n}{\sin(\pi z) - \sin(\pi n)} = \lim_{z \rightarrow n} \frac{1}{\frac{\sin(\pi z) - \sin(\pi n)}{\pi z - \pi n}} \quad (1256)$$

Substituiert man $w := \pi z$ so gilt $w \rightarrow \pi n$ und daher $\frac{\sin(w) - \sin(\pi n)}{w - \pi n} \rightarrow \sin'(\pi n) = \cos(\pi n) = (-1)^n$. Diese Erkenntnis liefert in der vorigen Gleichung

$$\lim_{z \rightarrow n} (z-n)^1 g(z) = \frac{1}{(-1)^n} = (-1)^n. \quad (1257)$$

Wir werden nun eine Methode sehen wie man Gleichheit zweier Funktionen mit denselben Polstellen und Residuen zeigen kann. Es sei gesagt, dass eine solche Gleichheit im Allgemeinen nicht wahr ist. Und doch liefert z.B. der *Satz von Liouville* ein starkes Konzept mit dem oft gezeigt werden kann, dass sich zwei Funktionen nur um eine Konstante unterscheiden

Satz 269. EULER'SCHER ERWEITERUNGSSATZ.

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}. \quad (1258)$$

Beweis. Es sei $h : \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch

$$h(z) := \Gamma(z)\Gamma(1-z) - \frac{\pi}{\sin(\pi z)}. \quad (1259)$$

BEHAUPTUNG 1. Für alle $n \in \mathbb{Z}$ hat h eine hebbare Singularität bei n . Insbesondere gibt es dann (nach dem Riemann'schen Hebbbarkeitssatz) $\tilde{h} \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ so, dass $\tilde{h}(z) = h(z)$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Dazu: Es sei $n \in \mathbb{Z}$. Aus Korollar 267 wissen wir, dass für alle $z \in A_{0,1}(n)$

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{(-1)^n}{z-n} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k^n (z-n)^k \quad (1260)$$

und aus Lemma

$$\frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \frac{(-1)^n}{z-n} + \sum_{k=0}^{\infty} b_k^n (z-n)^k \quad (1261)$$

für gewisse $(a_k^n)_{k \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{C}$ und $(b_k^n)_{k \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{C}$. Die Hauptteile der Laurentreihen sind also gleich! Es gilt daher für $z \in A_{0,1}(n)$

$$h(z) = \Gamma(z)\Gamma(1-z) - \frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k^n - b_k^n)(z-n)^k. \quad (1262)$$

Somit ist h in einer Umgebung von n als auf $B_1(0)$ konvergente Potenzreihe darstellbar. Damit muss die Singularität hebbbar sein.

BEHAUPTUNG 2. Die holomorphe Fortsetzung $\tilde{h} \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ ist beschränkt auf \mathbb{C} . Dazu:

Aufgrund der Periodizitätsaussagen in Korollar 267 und Lemma 268 gilt $h(z+2) = h(z)$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Es folgt $\tilde{h}(z+2) = \tilde{h}(z)$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ und wegen der Stetigkeit von \tilde{h} gilt diese Gleichung auch für alle $z \in \mathbb{C}$. Es genügt daher zu zeigen, dass \tilde{h} auf

$$S := \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 3\} \quad (1263)$$

beschränkt ist. (Denn für alle $z \in \mathbb{C}$ gibt es ein $k \in \mathbb{Z}$ so, dass $\tilde{z} = z + 2k \in S$. Wegen der Periodizität gilt dann auch $\tilde{h}(z) = \tilde{h}(z + 2k) = \tilde{h}(\tilde{z})$. Somit genügt es, \tilde{h} bei $\tilde{z} \in S$ zu beschränken.) Zur Beschränktheit auf S : Schreibe $S = S_1 \cup S_2$, wobei $S_1 := \{z \in S : |\operatorname{Im}(z)| \leq 1\}$ und $S_2 := \{z \in S : |\operatorname{Im}(z)| \geq 1\}$. Da S_1 kompakt ist und \tilde{h} stetig ist, ist \tilde{h} auf S_1 beschränkt. Zur Beschränktheit auf S_2 : Beachte, dass aus S_2 gilt $\tilde{h}(z) = h(z) = \Gamma(z)\Gamma(1-z) - \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$. Wir zeigen die Beschränktheit jedes Summanden einzeln. Wir wissen, dass Γ auf S_2 beschränkt ist, vgl. Proposition 263. Sei etwa $C > 0$ so, dass $|\Gamma(z)| \leq C$ für alle $z \in S_2$. Nun gilt für alle $z \in S_2$, dass $\operatorname{Re}(1-z) \in [-2, 0]$. Auch gilt

$$\Gamma(1-z) = \frac{\Gamma(2-z)}{1-z} = \frac{\Gamma(3-z)}{(1-z)(2-z)} = \frac{\Gamma(4-z)}{(1-z)(2-z)(3-z)} \quad \forall z \in S_2. \quad (1264)$$

Wegen der obigen Überlegung ist $\operatorname{Re}(4-z) = 3 + \operatorname{Re}(1-z) \in [1, 3]$ und daher hat man $|\Gamma(4-z)| \leq C$. Ferner gilt für alle $z \in S_2$, dass $|\operatorname{Im}(z)| \geq 1$ und somit auch $|\operatorname{Im}(1-z)| = |\operatorname{Im}(z)| \geq 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Dies impliziert auch $|1-z| \geq |\operatorname{Im}(1-z)| \geq 1$. Analog zeigt man $|\operatorname{Im}(2-z)|, |\operatorname{Im}(3-z)| \geq 1$ für alle $z \in S_2$. Wir folgern mit (1264)

$$|\Gamma(1-z)| = \frac{|\Gamma(4-z)|}{|1-z| |2-z| |3-z|} \leq \frac{C}{1 \cdot 1 \cdot 1} = C \quad \forall z \in S_2. \quad (1265)$$

Zusammengefasst gilt

$$|\Gamma(z)\Gamma(1-z)| \leq C^2 \quad \forall z \in S_2. \quad (1266)$$

Nun noch zur Beschränktheit von $z \mapsto \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$ auf S_2 . Sei $z = x + iy \in S_2$ (d.h. $x \in [1, 3]$ und $|y| > 1$). Dann gilt

$$\sin(\pi z) = \sin(\pi(x + iy)) = \sin(\pi x + i\pi y) = \sin(\pi x) \cos(i\pi y) + \cos(\pi x) \sin(i\pi y). \quad (1267)$$

In Aufgabe 1 b von Blatt 2 haben wir gezeigt, dass $\cos(iz) = \cosh(z)$ und $\sin(iz) = i \sinh(z)$. Wir erhalten also

$$\sin(\pi z) = \sin(\pi x) \cosh(\pi y) + i \cos(\pi x) \sinh(\pi y). \quad (1268)$$

Daher gilt

$$|\sin(\pi z)|^2 = \sin^2(\pi x) \cosh^2(\pi y) + \cos^2(\pi x) \sinh^2(\pi y) \quad (1269)$$

$$\frac{\cosh^2 - \sinh^2 = 1}{\cosh^2 - \sinh^2 = 1} \sin^2(\pi x)(1 + \sinh^2(\pi y)) + \cos^2(\pi x) \sinh^2(\pi y) \quad (1270)$$

$$= \sin^2(\pi x) + \sinh^2(\pi y)(\sin^2(\pi x) + \cos^2(\pi x)) = \sin^2(\pi x) + \sinh^2(\pi y). \quad (1271)$$

Da $|y| \geq 1$ gilt (wegen der Monotonie von \sinh auf \mathbb{R}), dass $\sinh^2(\pi y) \geq \sinh^2(\pi)$. Man folgert

$$\frac{\pi}{|\sin(\pi z)|} = \frac{\pi}{\sqrt{|\sin(\pi z)|^2}} \leq \frac{\pi}{\sqrt{\sinh^2(\pi)}} = \frac{\pi}{\sinh(\pi)}. \quad (1272)$$

Dies und (1266) implizieren die Beschränktheit von \tilde{h} in S_2 .

BEHAUPTUNG 3. $\tilde{h} \equiv 0$ (und somit auch $h \equiv 0$). Zunächst erstmal folgt aus Behauptung 2 und dem Satz von Liouville, dass \tilde{h} konstant ist (da $\tilde{h} \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ beschränkt). Somit gibt es also $c \in \mathbb{C}$ so, dass

$$h(z) = \Gamma(z)\Gamma(1-z) - \frac{\pi}{\sin(\pi z)} = c \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}. \quad (1273)$$

Gleichungen (1241) und (1253) implizieren nun aber $h(z+1) = -h(z)$. Da h aber konstant ist, bedeutet das $c = -c$. Wir schließen, dass $c = 0$. Die Behauptung ist gezeigt.

Korollar 270. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Beweis. Einsetzen von $z = \frac{1}{2}$ in (1258) liefert

$$\Gamma(\frac{1}{2})^2 = \Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(1 - \frac{1}{2}) = \frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{2})} = \pi. \quad (1274)$$

Es folgt

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \pm\sqrt{\pi}. \quad (1275)$$

Man beachte nun, dass

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty t^{\frac{1}{2}-1} e^{-t} dt = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t} dt > 0. \quad (1276)$$

Wegen dieser Positivität ist in (1275) ' $\pm = +$ ' und die Behauptung ist gezeigt.

Korollar 271.

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}. \quad (1277)$$

Beweis.

$$\sqrt{\pi} = \Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t} dt \stackrel{t=u^2}{=} \int_0^\infty \frac{2u}{\sqrt{u^2}} e^{-u^2} du = 2 \int_0^\infty e^{-u^2} du = \int_{-\infty}^\infty e^{-u^2} du. \quad (1278)$$

Damit sind wir am Ende dieser Vorlesung angekommen. Ich bedanke mich bei den Lesenden für die Ausdauer die aktive Mitarbeit in der Vorlesung.