



ÜBUNGSBLATT

Abgabe am:
Dienstag, 04.07.2023

Marius Müller Bernd Käsemödel Sommersemester 2023 Punktzahl: 100 Punkte
--

Funktionentheorie: Probeklausur

Bearbeitungszeit: 90 Minuten. Erlaubte Hilfsmittel: Ein beidseitig von Hand beschriebenes DIN A4-Blatt.

1. [10 Punkte] Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$ so, dass $f(z) = \bar{z}^2 + z^2$ komplex differenzierbar ist.

2. [10 Punkte] Es sei $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ mit $f(z) \in \mathbb{R}$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie: f ist konstant.

3. [10 Punkte] Berechnen Sie

$$\int_{\partial B_1(0)} \frac{1}{ze^{2z}} dz.$$

4. [10 Punkte] Berechnen Sie

$$\int_{\partial B_1(0)} \frac{\operatorname{Re}(z)}{ze^{2z}} dz.$$

5. [10 Punkte] Berechnen Sie

$$\int_{\partial B_2(0)} \frac{e^z}{(z+1)(z-1-i)} dz.$$

6. [10 Punkte] Berechnen Sie

$$\int_{\gamma} \frac{e^z}{(z+1)(z-1-i)} dz.$$

wobei $\gamma(t) = 2 \cos(t) + i \sin(t)$, ($t \in [0, 2\pi]$).

7. [10 Punkte] Berechnen Sie

$$\int_{\partial B_1(0)} \frac{1}{(e^{2z} - 1)^3} dz.$$

8. [10 Punkte] Berechnen Sie

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix}}{x^3 + i} dx.$$

9. [10 Punkte] Berechnen Sie

$$\int_{\partial B_1(0)} z^2 \sin(\bar{z}) dz.$$

10. [10 Punkte] Wahr oder falsch? (mit Begründung) Die Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \bar{z}^3 + \bar{z}$ erfüllt das schwache Maximumsprinzip, d.h. für alle beschränkten Gebiete $G \subset \mathbb{C}$ gilt

$$\max_{z \in \bar{G}} |f(z)| = \max_{z \in \partial G} |f(z)|.$$