

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Marius Müller

Wintersemester 2022/2023

Inhaltsverzeichnis

1	Explizite Lösungsverfahren	5
1.1	Separation der Variablen	5
1.1.1	Eulerhomogene Differentialgleichungen	9
1.2	Lineare Differentialgleichungen - Teil 1	10
1.2.1	Lineare Homogene Differentialgleichungen	10
1.2.2	Lineare Inhomogene Differentialgleichungen	11
1.2.3	Lineare Systeme (mit konstanten Koeffizienten)	14
1.2.4	Lineare DGLs zweiter Ordnung (mit konstanten Koeffizienten)	21
1.2.5	Lineare DGLs zweiter Ordnung (mit zeitabhängigen Koeffizienten)	31
1.3	Integrale der Bewegung	35
1.3.1	Exakte Differentialgleichungen	35
1.3.2	Gleichungen mit Energieerhaltung	40
1.3.3	Das Fadenpendel	44
2	Existenz, Eindeutigkeit, Globalität und Wohlgestelltheit	49
2.1	Existenz und Eindeutigkeit	49
2.1.1	Thematischer Überblick	49
2.1.2	Lipschitz-Bedingungen	52
2.1.3	Anfangswertprobleme als Fixpunktgleichung	58
2.1.4	Beweis des (globalen) Satzes von Picard-Lindelöf	64
2.1.5	Einige Worte zum Satz von Peano	68
2.1.6	Der Eindeutigkeitssatz	77
2.1.7	Beweis des (lokalen) Satzes von Picard-Lindelöf	78
2.2	Die Maximale Lösung	81
2.2.1	Thematischer Überblick	81
2.2.2	Beweis des Maximalitätsdetektors	83
2.2.3	Das Lemma von Gronwall	84
2.2.4	Globalitätskriterien	84
2.3	Lineare Differentialgleichungen - Teil 2	84
2.4	Wohlgestelltheit und glatte Abhängigkeit	84

Einführung

Thema der Vorlesung sind Gleichungen der Form

$$(DGL) \quad y'(t) = f(t, y(t)) \quad (t \in I). \quad (1)$$

Das heißt

- *Gegeben.* Eine Funktion $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^n)$ ($G \subset \mathbb{R}^n$ Gebiet, $n \in \mathbb{N}$) und $I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall.
- *Gesucht.* Eine Funktion $y \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$ mit $y'(t) = f(t, y(t))$ für all $t \in I$. Eine solche Funktion nennen wir *Lösung*.

Falls $n = 1$ so spricht man von einer *Differentialgleichung* (kurz: DGL), falls $n > 1$ von einem *Differentialgleichungssystem* (kurz: DGL-System).

Beispiel 1. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'(t) = t^3 \quad (t \in \mathbb{R}). \quad (2)$$

Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung sind alle Lösungen gegeben durch

$$y(t) = \frac{1}{4}t^4 + C \quad (3)$$

für ein $C \in \mathbb{R}$.

In dieser Vorlesung versuchen wir zu verstehen, ob und wieviele Lösungen zu einer gegebenen DGL existieren und wie das Verhalten einer solchen Lösung verstanden werden kann.

Letzteres ist besonders herausfordernd, denn nicht alle DGLs lassen sich explizit lösen.

Beispiel 2. Die DGL

$$y'(t) = e^{-t^2} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (4)$$

hat keine Lösung, die man mit elementaren Funktionen ausdrücken kann. Dies liegt daran, dass sich die Stammfunktion(en) von e^{-t^2} nicht mit elementaren Funktionen ausdrücken lassen.

Beispiel 1 (S. 2) zeigt, dass DGLs im Allgemeinen unendlich viele Lösungen haben. Weniger Lösungen sind zu erwarten, wenn man *Anfangswertprobleme* (AWP) studiert. Diese haben in der Vorlesung stets die Form

$$(AWP) \quad \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & (t \in I) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}, \quad (5)$$

für fest vorgegebene $t_0 \in I, y_0 \in G$.

Beispiel 3. Das AWP

$$\begin{cases} y'(t) = y(t) & (t \in \mathbb{R}) \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (6)$$

hat (wie man durch Ableiten nachrechnet) die Lösung $y(t) = e^t$, $t \in \mathbb{R}$.

Behauptung. Es gibt keine weiteren Lösungen, d.h. die Lösung ist *eindeutig*.

Beweis. Es sei $\bar{y} \in C^1(\mathbb{R})$ eine weitere Lösung. Definiere $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$h(t) := e^{-t}\bar{y}(t) \quad (7)$$

Dann gilt

$$h'(t) = \frac{d}{dt}(e^{-t}\bar{y}(t)) = -e^{-t}\bar{y}(t) + e^{-t}\bar{y}'(t) = -e^{-t}\bar{y}(t) + e^{-t}\bar{y}(t) = 0. \quad (8)$$

Somit ist h konstant, d.h.

$$h(t) = h(0) = e^0\bar{y}(0) = 1. \quad (9)$$

Mit (7) folgt $\bar{y}(t) = e^t = y(t)$.

Nicht für jedes AWP sind Lösungen eindeutig.

Beispiel 4. Das AWP

$$\begin{cases} y'(t) = 2\sqrt{|y(t)|} & (t \in \mathbb{R}) \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad (10)$$

hat keine eindeutige Lösung. Man zeigt durch direktes Nachrechnen, dass für alle $a \geq 0$ die Funktion

$$y_a(t) := \begin{cases} 0 & t \in (-\infty, a] \\ (t-a)^2 & t \in (a, \infty) \end{cases} \quad (11)$$

eine Lösung ist. Vergessen Sie dabei nicht (HA), zu zeigen, dass $y_a \in C^1(\mathbb{R})$.

Wir werden im Laufe der Vorlesung sehen, unter welchen Bedingungen an f und I Anfangswertprobleme eindeutig lösbar sind. Es ist hierbei wichtig, dass auch Bedingungen an das Intervall I vonnöten sind.

Beispiel 5. Das AWP

$$(AWP1) \quad \begin{cases} y'(t) = y(t)^2 & (t \in \mathbb{R}) \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (12)$$

besitzt keine Lösung, das AWP

$$(AWP2) \quad \begin{cases} y'(t) = y(t)^2 & (t \in (-\infty, 1)) \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (13)$$

jedoch schon.

Beweis. Für (AWP2) rechnet man explizit nach (HA), dass $y(t) := \frac{1}{1-t}$ eine Lösung ist. Nun zu (AWP1). Nehmen wir an es gäbe eine Lösung $\bar{y} \in C^1(\mathbb{R})$. Setze

$$t_1 := \sup\{t \in [0, 1] : \bar{y}|_{[0,t]} > 0\}. \quad (14)$$

Da $\bar{y}(0) = 1$ gilt $t_1 > 0$. Man vergewissert sich leicht (HA), dass $\bar{y}|_{[0,t_1]} > 0$. Setze nun $h : [0, t_1) \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$h(t) = \frac{1}{\bar{y}(t)}. \quad (15)$$

Dann gilt

$$h'(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\bar{y}(t)} \right) = -\frac{1}{\bar{y}(t)^2} \bar{y}'(t) = -\frac{1}{\bar{y}(t)^2} y(t)^2 = -1 \quad \forall t \in [0, t_1). \quad (16)$$

Es folgt

$$h(t) = h(0) + \int_0^t h'(s) \, ds = \frac{1}{y(0)} + \int_0^t (-1) \, ds = 1 - t \quad \forall t \in [0, t_1). \quad (17)$$

Mit (15) folgt

$$\bar{y}(t) = \frac{1}{1-t} \quad \forall t \in [0, t_1). \quad (18)$$

Fall 1. $t_1 < 1$. Dann gilt $y(t_1) = 0$ (HA). Somit

$$0 = \lim_{t \rightarrow t_1^-} y(t) = \lim_{t \rightarrow t_1^-} \frac{1}{1-t} = \frac{1}{1-t_1}, \quad (19)$$

ein Widerspruch.

Fall 2. $t_1 = 1$. Da $y \in C^1(\mathbb{R})$ ist y auf $[0, 1]$ beschränkt. Jedoch gilt nach (18) $y(t) = \frac{1}{1-t}$ für alle $t \in [0, 1)$, was der Beschränktheit widerspricht.

Vorläufige Gliederung der Vorlesung.

1. **Explizite Lösungstechniken.** Wir wollen diskutieren, wie wir in den obigen Beispielen auf die Lösungen gekommen sind – und viele weitere.
2. **Wohlgestelltheorie von Picard-Lindelöf.** Wir werden den Satz von Picard-Lindelöf kennenlernen – und damit einen allgemeinen Satz über die eindeutige Lösbarkeit von Anfangswertproblemen.
3. **Anwendung: Das SIR-Pandemiemodell.** Wir diskutieren, wie Differentialgleichungen in der Modellierung auftauchen und wie man anwendungsrelevante Fragestellungen durch Untersuchung der DGL beantworten kann.
4. **Dynamische Systeme.** Wir betrachten den Spezialfall, dass die rechte Seite der DGL nicht explizit zeitabhängig ist, d.h. $f(t, z) = g(z)$ für ein $g \in C^0(G)$. In diesem Fall

lässt sich zu einer DGL ein sogenannter *Fluss* assoziieren. Diese Begrifflichkeit werden wir genauer untersuchen.

1 Explizite Lösungsverfahren

Frage: Wie kommt man auf explizite Formeln für Lösungen (siehe Beispiel 3,4,5)?

- **Gegeben.** (DGL) $y'(t) = f(t, y(t)) \quad (t \in I)$ (mit f, I konkret gegeben).
- **Gesucht.** Darstellung von $\mathbb{L} = \{y \in C^1(I) : y \text{ Lösung von (DGL)}\}$, der sog. *allgemeinen Lösungsmenge*.

1.1 Separation der Variablen

Die erste spezielle Kategorie von DGLs, die wir untersuchen sind DGLs mit getrennten Veränderlichen.

DGL-Typ 6. Eine *DGL mit getrennten Veränderlichen* ist von der Form

$$y'(t) = g(t)h(y(t)) \quad (t \in I), \quad (20)$$

wobei $g \in C^0(I)$, $h \in C^0(J)$, $J \subset \mathbb{R}$ Intervall. (Das bedeutet $y'(t) = f(t, y(t))$ für $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t, z) = g(t)h(z)$.)

Beispiel 7. Betrachte $y'(t) = a(t)y(t)$, ($t \in I$) für $a \in C^0(I; \mathbb{R})$.

Lösungsstrategie. Wir nehmen zusätzlich **(A)** ($y(t) > 0$ für alle $t \in I$) an. Dann

$$y'(t) = a(t)y(t). \quad (21)$$

$$\Rightarrow \frac{y'(t)}{y(t)} = a(t). \quad (22)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \log(y(t)) = a(t). \quad (23)$$

$$\Rightarrow \log(y(t)) = \int^t a(s) ds + \gamma \quad (\text{für ein } \gamma \in \mathbb{R}). \quad (24)$$

$$\Rightarrow y(t) = \exp\left(\int^t a(s) ds + \gamma\right) = \underbrace{e^\gamma}_{:=D} \exp\left(\int^t a(s) ds\right). \quad (25)$$

$$\Rightarrow y(t) = D \exp\left(\int^t a(s) ds\right) \quad \text{für ein } D > 0. \quad (26)$$

Gibt es noch weitere Lösungen, die Annahme **(A)** nicht erfüllen?

Ja, zum Beispiel

$$\tilde{y}(t) = D \exp\left(\int^t a(s) ds\right) \quad \text{für ein } D \leq 0. \quad (27)$$

In der Tat,

$$\tilde{y}'(t) = D \exp\left(\int^t a(s) ds\right) a(t) = \tilde{y}(t)a(t). \quad (28)$$

Haben wir am Ende dieses Beispiels wirklich alle Lösungen gefunden?

Satz 8. Es sei $a \in C^0(I; \mathbb{R})$ und gegeben sei

$$y'(t) = a(t)y(t) \quad (t \in I). \quad (29)$$

Dann gilt

$$\mathbb{L} = \left\{ y \in C^1(I; \mathbb{R}) : y(t) = D \exp\left(\int^t a(s) ds\right) \text{ für ein } D \in \mathbb{R} \right\}. \quad (30)$$

Beweis. ‘ \supset ’ folgt wie in (28) aus der Kettenregel. Nun zu ‘ \subset ’. Sei $\bar{y} \in C^1(I)$ eine Lösung. Definiere $z : I \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$z(t) := \exp\left(-\int^t a(s) ds\right) \bar{y}(t). \quad (31)$$

Dann gilt

$$z'(t) = \frac{d}{dt} \left(\exp\left(-\int^t a(s) ds\right) \bar{y}(t) \right) \quad (32)$$

$$= -a(t) \exp\left(-\int^t a(s) ds\right) \bar{y}(t) + \exp\left(-\int^t a(s) ds\right) \underbrace{\bar{y}'(t)}_{=a(t)\bar{y}(t)} \quad (33)$$

$$= -a(t) \exp\left(-\int^t a(s) ds\right) \bar{y}(t) + \exp\left(-\int^t a(s) ds\right) (a(t)\bar{y}(t)) = 0. \quad (34)$$

Es folgt, dass $z \equiv \text{const.}$, d.h. $\exists D \in \mathbb{R} : z(t) = D$ für alle $t \in I$. Daher

$$\exists D > 0 : \exp\left(-\int^t a(s) ds\right) \bar{y}(t) = D \quad \forall t \in I. \quad (35)$$

$$\Rightarrow \exists D > 0 : \bar{y}(t) = D \exp\left(\int^t a(s) ds\right) \quad \forall t \in I. \quad (36)$$

Beispiel 9. Wir lösen

$$\begin{cases} y'(t) = 3ty(t) & (t \in \mathbb{R}) & \text{(DGL)} \\ y(1) = 2 & & \text{(AW)} \end{cases}. \quad (37)$$

$$(DGL) \quad \underset{\text{Satz 8}}{\Rightarrow} \quad \exists D > 0 : \quad y(t) = D \exp \left(\int^t (3s) \, ds \right) = D e^{\frac{3}{2}t^2}. \quad (38)$$

$$(AW) \quad \Rightarrow \quad 2 = y(1) = D e^{\frac{3}{2}(1)^2} = D e^{\frac{3}{2}} \quad \Rightarrow \quad D = 2e^{-\frac{3}{2}}. \quad (39)$$

Die eindeutige Lösung ist also

$$y(t) = 2e^{-\frac{3}{2}} e^{\frac{3}{2}t^2} \quad (t \in \mathbb{R}). \quad (40)$$

Anwendung 10. Wir diskutieren die Bedeutung der DGL

$$y'(t) = \alpha y(t) \quad (t \in \mathbb{R}). \quad (41)$$

Frage. Was modelliert diese DGL?

Sei y eine Lösung. Für $h > 0$ sehr klein gilt

$$\frac{y(t+h) - y(t)}{h} \approx \alpha y(t), \quad (42)$$

d.h.

$$y(t+h) \approx y(t) + \alpha y(t)h. \quad (43)$$

Stellen wir uns eine Hasenpopulation vor. Wir wollen die zeitliche Entwicklung des Populationsbestands beschreiben. Für kleine $h > 0$ gilt (angenommen keine Hasen sterben)

$$\begin{pmatrix} \text{Hasenbestand} \\ \text{zum Zeitpunkt } t+h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Hasenbestand} \\ \text{zum Zeitpunkt } t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{Neugeborene} \\ \text{Hasen in } (t, t+h) \end{pmatrix}. \quad (44)$$

Wir gehen davon aus, dass die Anzahl der Neugeburten an einem Tag (d.h. zwischen t und $t+1$) proportional zur Populationsstärke am Anfang des Tages ist, d.h.

$$\begin{pmatrix} \text{Neugeborene} \\ \text{Hasen in } (t, t+1) \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} \text{Hasenbestand} \\ \text{zum Zeitpunkt } t \end{pmatrix} \quad (45)$$

Die Proportionalitätskonstante α heißt *Geburtenrate*. Die Geburten dürfen über den Tag gleichverteilt angenommen werden, d.h. für $h \ll 1$ gilt

$$\begin{pmatrix} \text{Neugeborene} \\ \text{Hasen in } (t, t+h) \end{pmatrix} \approx \alpha \cdot \begin{pmatrix} \text{Hasenbestand} \\ \text{zum Zeitpunkt } t \end{pmatrix} \cdot h. \quad (46)$$

Bezeichne nun für $t \in [0, \infty)$ der Wert $y(t)$ den Hasenbestand zum Zeitpunkt t . Mit (44) und (46) gilt

$$y(t+h) \approx y(t) + \alpha y(t)h, \quad (47)$$

also erfüllt $y : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ (43). Somit modelliert (43) (und daher auch (41)) *Populationswachstum mit konstanter Geburtenrate*. Lösungen von (41) sind (siehe Satz 8) gegeben durch $y(t) = D e^{\alpha t}$ für ein $D \in \mathbb{R}$. Man spricht von *exponentiellem Wachstum*.

Wir vertiefen nun noch die sog. *Separationstechnik*, d.h. die in (21)-(26) angewendete Lösungsstrategie.

Beispiel 11. Betrachte

$$(DGL) \quad y'(t) = y(t)^2 \quad (t \in (a, b)). \quad (48)$$

Lösungsstrategie. Wir nehmen zusätzlich **(A)** ($y(t) \neq 0$ für alle $t \in (a, b)$) an.

$$(Separieren) \quad \Rightarrow \quad \frac{y'(t)}{y(t)^2} = 1. \quad (49)$$

$$(Integrieren) \quad \Rightarrow \quad \int^t \frac{y'(s)}{y(s)^2} ds = t + \gamma \quad \text{für ein } \gamma \in \mathbb{R}. \quad (50)$$

$$(Substituieren $u = y(s)$) \quad \Rightarrow \quad \int^{y(t)} \frac{1}{u^2} du = t + \gamma. \quad (51)$$

$$\Rightarrow \quad \left[-\frac{1}{u}\right]^{y(t)} = t + \gamma. \quad (52)$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{y(t)} = t + \gamma. \quad (53)$$

$$(Auflösen) \quad \Rightarrow \quad y(t) = -\frac{1}{t + \gamma}. \quad (54)$$

Der letzte Schritt ist nur zulässig, falls $t + \gamma \neq 0$ für alle $t \in (a, b)$, d.h. $-\gamma \notin (a, b)$. Falls $-\gamma \in (a, b)$ ergibt sich ein Widerspruch zu (53).

Gibt es weitere Lösungen, die **(A)** nicht erfüllen? Laut ÜA2 auf Blatt 1 gilt für jede Lösung der (DGL)

$$y(t_0) = 0 \quad \text{für ein } t_0 \in (a, b) \quad \Rightarrow \quad y \equiv 0. \quad (55)$$

Daher erfüllen alle Lösungen bis auf die Nullfunktion die Annahme **(A)** und

$$\mathbb{L} = \{0\} \cup \left\{ y \in C^1((a, b); \mathbb{R}) : y(t) = -\frac{1}{t + \gamma} \text{ für ein } \gamma \in \mathbb{R} : -\gamma \notin (a, b) \right\}. \quad (56)$$

Das vorige Beispiel liefert auch die Lösungsformel in Beispiel 5. Der folgende Satz formalisiert die vorhin kennengelernte Separationstechnik.

Satz 12. Sei $g \in C^0(I; \mathbb{R})$, $h \in C^0(\mathbb{R})$, $h(z) \neq 0 \forall z \in \mathbb{R}$. Gegeben sei

$$y'(t) = g(t)h(y(t)) \quad (t \in I). \quad (57)$$

Sei G eine Stammfunktion von g und H eine Stammfunktion von $\frac{1}{h}$. Dann ist H invertierbar und

$$\mathbb{L} = \{y \in C^1(I; \mathbb{R}) : y(t) = H^{-1}(G(t) + c), \text{ für ein } c \in \mathbb{R} \text{ sd. } G(I) + c \subset H(\mathbb{R})\}. \quad (58)$$

Beweis. Zu ‘ H invertierbar’: siehe ÜA 3 auf Blatt 1. Zur Lösungsformel:

$$y'(t) = g(t)h(y(t)) \quad \forall t \in I. \quad (59)$$

$$\begin{array}{l} \iff \\ h \neq 0 \end{array} \quad \frac{y'(t)}{h(y(t))} = g(t) \quad \forall t \in I. \quad (60)$$

$$\iff \quad \exists c \in \mathbb{R} : \quad \int^t \frac{y'(s)}{h(y(s))} ds = G(t) + c \quad \forall t \in I. \quad (61)$$

$$\begin{array}{l} \iff \\ u=y(s) \end{array} \quad \exists c \in \mathbb{R} : \quad \int^{y(t)} \frac{1}{h(u)} du = G(t) + c \quad \forall t \in I. \quad (62)$$

$$\iff \quad \exists c \in \mathbb{R} : \quad H(y(t)) = G(t) + c \quad \forall t \in I. \quad (63)$$

$$\iff \quad \exists c \in \mathbb{R} : \quad H(\mathbb{R}) \subset G(I) + c \text{ und } y(t) = H^{-1}(G(t) + c) \quad \forall t \in I. \quad (64)$$

1.1.1 Eulerhomogene Differentialgleichungen

Nicht alle DGLs haben getrennte Veränderliche. Manche lassen sich aber auf eine solche Gestalt bringen.

DGL-Typ 13. Eine *eulerhomogene DGL* ist von der Form

$$z'(t) = k\left(\frac{z(t)}{t}\right) \quad (t \in I), \quad (65)$$

wobei $k \in C^0(I; \mathbb{R})$, $I \subset (0, \infty)$.

Lösungsstrategie 14. Es löse $z \in C^1(I; \mathbb{R})$ die Gleichung $z'(t) = k\left(\frac{z(t)}{t}\right)$, $(t \in I)$.

Substitution. Setze $y(t) := \frac{z(t)}{t}$. Dann gilt

$$y'(t) = \frac{1}{t}z'(t) + \left(-\frac{1}{t^2}\right)z(t) = \frac{1}{t}k\left(\frac{z(t)}{t}\right) - \frac{1}{t}\frac{z(t)}{t} \quad (66)$$

$$= \frac{1}{t}k(y(t)) - \frac{1}{t}y(t) = \frac{1}{t}(k(y(t)) - y(t)) = g(t)h(y(t)), \quad (67)$$

wobei $g(t) = \frac{1}{t}$ und $h(z) = k(z) - z$. Somit lässt sich y durch Lösen einer DGL mit getrennten Veränderlichen bestimmen. Resubstitution liefert eine Formel für z .

Beispiel 15. Betrachte

$$z'(t) = \frac{z(t)^2}{t^2} + \frac{z(t)}{t} + 1 \quad (t \in I), \quad (68)$$

d.h. $k(z) := z^2 + z + 1$.

Substitution. Dann löst $y(t) := \frac{z(t)}{t}$

$$y'(t) = \frac{1}{t}(k(y(t)) - y(t)) = \frac{1}{t}(y(t)^2 + 1). \quad (69)$$

Das heißt

$$\frac{y'(t)}{1+y(t)^2} = \frac{1}{t} \quad \Rightarrow \quad \int^t \frac{y'(s)}{1+y(s)^2} ds = \log(t) + \gamma \quad \text{für ein } \gamma \in \mathbb{R}. \quad (70)$$

$$\Rightarrow \int^{y(t)} \frac{1}{1+u^2} du = \log(t) + \gamma. \quad \Rightarrow \quad \arctan(y(t)) = \log(t) + \gamma. \quad (71)$$

Man erhält $y(t) = \tan(\log(t) + \gamma)$ für ein $\gamma \in \mathbb{R}$ (so gewählt, dass der Ausdruck auf I definiert ist).

Resubstitution. Man hat

$$\frac{z(t)}{t} = \tan(\log(t) + \gamma) \quad (72)$$

und somit

$$z(t) = t \cdot \tan(\log(t) + \gamma). \quad (73)$$

Man beachte: Dies ist nur eine Lösung falls $\gamma \in \mathbb{R}$ so, dass der Ausdruck auf ganz I definiert ist.

1.2 Lineare Differentialgleichungen - Teil 1

1.2.1 Lineare Homogene Differentialgleichungen

DGL-Typ 16. Eine *lineare homogene DGL* ist von der Form

$$y'(t) = a(t)y(t) \quad (t \in I) \quad (74)$$

für ein $a \in C^0(I; \mathbb{C})$, ($I \subset \mathbb{R}$ Intervall).

Man beachte, dass wir hier a komplexwertig zulassen. Unsere Lösungen sind in diesem Fall auch in $C^1(I; \mathbb{C})$ zu suchen. Die DGL heißt wegen folgender Beobachtung “linear”:

Proposition 17. Sei $a \in C^0(I; \mathbb{C})$. Dann ist

$$\mathbb{L} = \{y \in C^1(I; \mathbb{C}) : y'(t) = a(t)y(t) \quad \forall t \in I\} \quad (75)$$

ein linearer Unterraum von $C^1(I; \mathbb{C})$.

Beweis. Seien $y_1, y_2 \in \mathbb{L}$ und $\lambda, \nu \in \mathbb{C}$. $\forall \lambda y_1 + \mu y_2 \in \mathbb{L}$.

$$(\lambda y_1 + \mu y_2)'(t) = \lambda y_1'(t) + \mu y_2'(t) = \lambda a(t)y_1(t) + \mu a(t)y_2(t) \quad (76)$$

$$= a(t)(\lambda y_1(t) + \mu y_2(t)) = a(t)(\lambda y_1 + \mu y_2)(t). \quad (77)$$

Analog zu Satz 8 formulieren wir

Satz 18. Es sei $a \in C^0(I; \mathbb{C})$. Gegeben sei die DGL

$$y'(t) = a(t)y(t) \quad (t \in I). \quad (78)$$

Dann gilt

$$\mathbb{L} = \left\{ y \in C^1(I; \mathbb{C}) : y(t) = D \exp \left(\int^t a(s) \, ds \right) \text{ für ein } D \in \mathbb{C} \right\}. \quad (79)$$

Beweis. Analog zu Satz 8.

Insbesondere sieht man an (79), dass $\dim \mathbb{L} = 1$.

1.2.2 Lineare Inhomogene Differentialgleichungen

DGL-Typ 19. Eine *lineare inhomogene DGL* ist von der Form

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t) \quad (t \in I), \quad (80)$$

wobei $a, b \in C^0(I; \mathbb{C})$.

Satz 20. Es seien $a, b \in C^0(I; \mathbb{C})$ und die DGL $y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$, $(t \in I)$ gegeben. Dann gilt

$$\mathbb{L} = \left\{ y \in C^1(I; \mathbb{C}) : \exists c \in \mathbb{C} : y(t) = e(t) \left(c + \int^t \frac{b(u)}{e(u)} \, du \right) \right\}, \quad (81)$$

wobei

$$e(t) := \exp \left(\int^t a(s) \, ds \right). \quad (82)$$

Beweis. Zu '⊃'. Man rechnet leicht nach, dass $e'(t) = a(t)e(t)$ für alle $t \in I$. Für $z(t) := e(t) \left(c + \int^t \frac{b(u)}{e(u)} \, du \right)$ gilt dann

$$z'(t) = \underbrace{e'(t)}_{=a(t)e(t)} \left(c + \int^t \frac{b(u)}{e(u)} \, du \right) + e(t) \left(\frac{b(t)}{e(t)} \right) \quad (83)$$

$$= a(t)e(t) \left(c + \int^t \frac{b(u)}{e(u)} \, du \right) + b(t) = a(t)z(t) + b(t). \quad (84)$$

Zu 'C'. Sei $y \in C^1(I; \mathbb{C})$ eine Lösung. Definiere

$$v(t) := \frac{y(t)}{e(t)} = \exp\left(-\int^t a(s) ds\right) y(t). \quad (85)$$

Dann gilt

$$v'(t) = -a(t) \exp\left(-\int^t a(s) ds\right) y(t) + \exp\left(-\int^t a(s) ds\right) \underbrace{y'(t)}_{=a(t)y(t)+b(t)} \quad (86)$$

$$= -a(t) \frac{1}{e(t)} y(t) + \frac{1}{e(t)} (a(t)y(t) + b(t)) = \frac{b(t)}{e(t)}. \quad (87)$$

Man integriert und erhält für ein $c \in \mathbb{C}$

$$v(t) = c + \int^t \frac{b(u)}{e(u)} du. \quad \Rightarrow \quad \frac{y(t)}{e(t)} = c + \int^t \frac{b(u)}{e(u)} du. \quad (88)$$

Anmerkung 21. In (82) hat man eine Konstante frei zu wählen, da man eine beliebige Stammfunktion von a bilden muss. Hat man für $y_0 \in \mathbb{R}$ man das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) = a(t)y(t) + b(t) & (t \in I) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (89)$$

gegeben, so ist es günstig, $e(t) = e^*(t) := \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right)$ zu wählen. Die eindeutige Lösung ist dann gegeben durch

$$y(t) = e^*(t) \left(y_0 + \int_{t_0}^t \frac{b(u)}{e^*(u)} du \right). \quad (90)$$

In der Tat,

$$y(t_0) = \underbrace{e^*(t_0)}_{=1} \left(y_0 + \int_{t_0}^{t_0} \frac{b(u)}{e^*(u)} du \right) = y_0. \quad (91)$$

Methode 22. Anstatt sich die Formel aus Satz 20 zu merken, kann man alternativ die Methode der *Variation der Konstanten* verwenden.

Beispiel. Gegeben die DGL

$$\underbrace{y'(t)}_{(LS)} = \underbrace{\frac{1}{t}y(t) + t^3}_{(RS)} \quad (t \in (0, \infty)). \quad (92)$$

Ansatz. $y(t) \stackrel{!}{=} e(t)c(t)$ für ein $c \in C^1((0, \infty); \mathbb{C})$. Hierbei ist wie in (82)

$$e(t) = \exp\left(\int^t \frac{1}{s} ds\right) = \exp(\log t) = t, \quad (93)$$

also $y(t) \stackrel{!}{=} tc(t)$. Man finde nun eine Funktion c , die y zu einer Lösung macht. Es gilt

$$(LS) = y'(t) = \frac{d}{dt}(tc(t)) = c(t) + tc'(t), \quad (94)$$

$$(RS) = \frac{1}{t}y(t) + t^3 = \frac{1}{t}(tc(t)) + t^3 = c(t) + t^3. \quad (95)$$

Die Gleichheit $(LS) = (RS)$ gilt also genau dann wenn

$$c(t) + tc'(t) = c(t) + t^3. \quad \Leftrightarrow \quad tc'(t) = t^3. \quad \Leftrightarrow \quad c'(t) = t^2. \quad (96)$$

Somit folgt $c(t) = c + \frac{1}{3}t^3$ für ein $c \in \mathbb{C}$ und daher

$$y(t) = tc(t) = t\left(c + \frac{1}{3}t^3\right). \quad (97)$$

Dieselbe Lösungsformel hätten wir auch mit Satz 20 erhalten können.

Beispiel 23. Gegeben ist für $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$

$$y'(t) = \alpha y(t) + \gamma e^{\beta t} \quad (t \in \mathbb{R}). \quad (98)$$

Ansatz. $y(t) \stackrel{!}{=} e(t)c(t)$, wobei $c \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ gesucht und

$$e(t) = \exp\left(\int^t \alpha ds\right) = \exp(\alpha t) = e^{\alpha t}, \quad (99)$$

also $y(t) \stackrel{!}{=} e^{\alpha t}c(t)$. Berechnen von linker und rechter Seite der DGL liefert

$$y'(t) = \alpha e^{\alpha t}c(t) + e^{\alpha t}c'(t), \quad (100)$$

$$\alpha y(t) + \gamma e^{\beta t} = \alpha e^{\alpha t}c(t) + \gamma e^{\beta t}. \quad (101)$$

Somit gilt $y'(t) = \alpha y(t) + \gamma e^{\beta t}$ genau dann wenn

$$\alpha e^{\alpha t}c(t) + e^{\alpha t}c'(t) = \alpha e^{\alpha t}c(t) + \gamma e^{\beta t}. \quad (102)$$

$$\Leftrightarrow e^{\alpha t}c'(t) = \gamma e^{\beta t}. \quad (103)$$

$$\Leftrightarrow c'(t) = \gamma e^{(\beta-\alpha)t}. \quad (104)$$

Integrieren liefert eine Formel für $c(t)$. Beachte hier den Sonderfall $\beta = \alpha$.

$$c(t) = \begin{cases} c + \frac{\gamma}{\beta - \alpha} e^{(\beta - \alpha)t} & \alpha \neq \beta \\ c + \gamma t & \alpha = \beta \end{cases} \quad \text{für ein } c \in \mathbb{C}. \quad (105)$$

Man erhält

$$y(t) = e(t)c(t) = \begin{cases} ce^{\alpha t} + \frac{\gamma}{\beta - \alpha} e^{\beta t} & \alpha \neq \beta \\ e^{\alpha t} c + \gamma t e^{\alpha t} & \alpha = \beta \end{cases} \quad \text{für ein } c \in \mathbb{C}. \quad (106)$$

1.2.3 Lineare Systeme (mit konstanten Koeffizienten)

DGL-Typ 24. Eine lineares homogenes DGL-System (mit konstanten Koeffizienten) ist von der Form

$$y'(t) = Ay(t) \quad (t \in \mathbb{R}), \quad (107)$$

wobei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine (konstante) Matrix ist. Gesucht wird eine Lösung $y \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}^n)$.

Beispiel 25. Gegeben ist die DGL $y'(t) = Ay(t)$, ($t \in \mathbb{R}$), wobei

$$A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{für } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}. \quad (108)$$

Mit $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$, $y'(t) = \begin{pmatrix} y'_1(t) \\ \vdots \\ y'_n(t) \end{pmatrix}$ gilt

$$\begin{pmatrix} y'_1(t) \\ \vdots \\ y'_n(t) \end{pmatrix} = y'(t) = Ay(t) = A \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 y_1(t) \\ \vdots \\ \lambda_n y_n(t) \end{pmatrix}. \quad (109)$$

Mit anderen Worten gilt $y'_i(t) = \lambda_i y_i(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und $i = 1, \dots, n$. Wir folgern aus Satz 18: Für alle $i = 1, \dots, n$ existiert $c_i \in \mathbb{C}$ mit

$$y_i(t) = c_i \exp\left(\int^t \lambda_i ds\right) = c_i e^{\lambda_i t}. \quad (110)$$

Somit

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}. \quad (111)$$

(Die letzte Gleichheit ist rückwärts gelesen wesentlich leichter zu verstehen als vorwärts!)
 Man erhält

$$\mathbb{L} = \{y \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}^n) : y(t) = E(t)c \text{ für ein } c \in \mathbb{C}^n\} \quad (112)$$

wobei die Matrix $E(t) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ gegeben ist durch

$$E(t) := \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}. \quad (113)$$

Beispiel 26. Gegeben ist die DGL $y'(t) = Ay(t)$, ($t \in \mathbb{R}$) mit A diagonalisierbar, d.h.

$$\exists S \in \mathbb{C}^{n \times n} \text{ invertierbar, s.d. } S^{-1}AS = D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \text{ für } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}. \quad (114)$$

Wir formen um

$$y'(t) = Ay(t) \Leftrightarrow y'(t) = SDS^{-1}y(t) \Leftrightarrow S^{-1}y'(t) = DS^{-1}y(t). \quad (115)$$

Substitution. $z(t) := S^{-1}y(t)$. Wir erhalten (für $t \in \mathbb{R}$)

$$z'(t) = S^{-1}y'(t) = DS^{-1}y(t) = D(S^{-1}y(t)) = Dz(t). \quad (116)$$

Da $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ folgt mit Beispiel 25

$$z(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \cdot c \quad \text{für ein } c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n. \quad (117)$$

Resubstitution. $S^{-1}y(t) = z(t)$ folgt $y(t) = Sz(t)$ und damit

$$y(t) = S \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \cdot c \quad \text{für ein } c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n. \quad (118)$$

Somit

$$\mathbb{L} = \{y \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}^n) : y(t) = E(t)c \text{ für ein } c \in \mathbb{C}^n\}, \quad (119)$$

wobei hier

$$E(t) = S \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}. \quad (120)$$

Anmerkung 27. Für ein *inhomogenes System*, d.h. ein System der Form

$$\underbrace{y'(t)}_{(LS)} = \underbrace{Ay(t) + b(t)}_{(RS)}. \quad (121)$$

für $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ diagonalisierbar führt der Ansatz der *Variation der Konstanten*

$$y(t) \stackrel{!}{=} E(t)c(t) \quad (122)$$

mit $E(t)$ wie in (120) und $c \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}^n)$ gesucht stets zum Ziel. Warum? Es sei $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit $S^{-1}AS = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Dann gilt nach (120)

$$E(t) = S \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}. \quad (123)$$

Somit gilt

$$E'(t) = S \begin{pmatrix} \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \stackrel{\text{lies rückwärts}}{=} S \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \quad (124)$$

$$= S \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \stackrel{(123)}{=} S \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) S^{-1} E(t) = AE(t). \quad (125)$$

Daher

$$(LS) = y'(t) = E'(t)c(t) + E(t)c'(t) = AE(t)c(t) + E(t)c'(t), \quad (126)$$

$$(RS) = Ay(t) + b(t) = A(E(t)c(t)) + b(t). \quad (127)$$

Setzen wir $(LS) \stackrel{!}{=} (RS)$ und lösen auf, so erhalten wir $E(t)c'(t) = b(t)$. Dies lässt sich (weil $E(t)$ invertierbar ist) stets nach $c'(t)$ auflösen. Somit lässt sich das gesuchte c bestimmen.

Im Allgemeinen sind Matrizen nicht zwingend diagonalisierbar. Jedoch besitzen alle (über \mathbb{C}) eine *Jordan-Normalform*. Diese werden wir nutzen, um alle linearen Systeme zu lösen.

Wiederholung 28. JORDAN-NORMALFORM. Es sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ beliebig. Dann gibt es $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$ invertierbar mit

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} J_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & J_r \end{pmatrix}, \quad (128)$$

wobei $J_m \in \mathbb{C}^{d_m \times d_m}$, $d_m \geq 1$, $d_1 + \dots + d_r = n$ sog. *Jordanblöcke*, d.h.

$$J_m = \begin{pmatrix} \lambda_m & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_m \end{pmatrix} = \lambda_m I + N, \quad (129)$$

mit $N = (n_{ij})_{i,j=1,\dots,d_m} \in \mathbb{C}^{d_m \times d_m}$ mit

$$n_{ij} := \begin{cases} 1 & j = i + 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (130)$$

(Man beachte, dass aus $d_m = 1$ $N = 0$ folgt.)

Methode 29. Gegeben eine DGL der Gestalt $y'(t) = Ay(t)$, ($t \in \mathbb{R}$) mit $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ beliebig.

Lösungsstrategie. Finde die Jordan-Normalform von A , d.h. $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$ invertierbar und Jordanblöcke $J_m = \lambda_m I + N \in \mathbb{C}^{d_m \times d_m}$ (wobei N wie in (130)) derart, dass

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} J_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & J_r \end{pmatrix}. \quad (131)$$

Setze nun $z(t) := S^{-1}y(t)$ und berechne

$$z'(t) = S^{-1}y'(t) = S^{-1}Ay(t) = S^{-1}AS(S^{-1}y(t)) = \begin{pmatrix} J_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & J_r \end{pmatrix} z(t) \quad (132)$$

Sei nun $z_{(1)}$ die ersten d_1 Komponenten von z , $z_{(2)}$ die darauffolgenden d_2 Komponenten

usw... Das bedeutet $z(t) = \begin{pmatrix} z_{(1)}(t) \\ \vdots \\ z_{(r)}(t) \end{pmatrix}$. Dann gilt

$$\begin{pmatrix} z'_{(1)}(t) \\ \vdots \\ z'_{(r)}(t) \end{pmatrix} = z'(t) = \begin{pmatrix} J_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & J_r \end{pmatrix} z(t) \quad (133)$$

$$= \begin{pmatrix} J_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & J_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{(1)}(t) \\ \vdots \\ z_{(r)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1 z_{(1)}(t) \\ \vdots \\ J_r z_{(r)}(t) \end{pmatrix}, \quad (134)$$

also $z'_{(m)}(t) = J_m z_{(m)}(t) = (\lambda_m I + N) z_{(m)}(t)$ für alle $m = 1, \dots, r$. Wir merken: Es genügt völlig, wenn wir für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ und $d \in \mathbb{N}$ lineare Systeme der Form

$$z'(t) = (\lambda I + N)z(t) \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (135)$$

(für $N \in \mathbb{C}^{d \times d}$ wie in (130)) lösen können. Wie man solche Systeme lösen kann werden wir im folgenden Beispiel besprechen.

Beispiel 30. Wir betrachten für $\lambda \in \mathbb{C}$ und $d = 2$ den $d \times d$ -Jordanblock $J = \lambda I + N$, wobei $N \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ wie in (130). Also studieren wir

$$z'(t) = (\lambda I + N)z(t) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} z(t). \quad (136)$$

Wir haben also

$$\begin{pmatrix} z'_1(t) \\ z'_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} z'_1(t) = \lambda z_1(t) + z_2(t) \\ z'_2(t) = \lambda z_2(t) \end{cases}. \quad (137)$$

Aus der zweiten Gleichung folgt (mit Satz 8) $z_2(t) = c_2 e^{\lambda t}$ für ein $c_2 \in \mathbb{C}$. Die erste Gleichung wird dann nach Einsetzen zu einer linearen inhomogenen DGL

$$z'_1(t) = \lambda z_1(t) + c_2 e^{\lambda t}. \quad (138)$$

Mit Beispiel 23 folgt

$$z_1(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t} \quad \text{für ein } c_1 \in \mathbb{C}. \quad (139)$$

Daher gilt

$$z(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} c_1 + t e^{\lambda t} c_2 \\ e^{\lambda t} c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & t e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad (140)$$

und somit

$$\mathbb{L} = \{z \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2) : z(t) = E(t)c \text{ für ein } c \in \mathbb{C}^2\}, \quad (141)$$

wobei

$$E(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & t e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}. \quad (142)$$

Für Jordanblöcke mit höherer Dimension $d > 2$ kann man analog zum obigen Beispiel iterativ eine Formel herleiten.

Zusammenfassung 31. Wir fassen hier den Spezialfall von linearen 2×2 -Systemen zusammen. Weil es für 2×2 Matrizen nicht so viele Möglichkeiten für Jordan-Normalformen gibt, finden wir explizite Lösungsformeln. Gegeben sei

$$y'(t) = Ay(t) \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (143)$$

für eine beliebige Matrix $A \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$.

FALL 1. A diagonalisierbar, d.h. $\exists S \in \mathbb{C}^{n \times n}: S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$. Dann

$$\mathbb{L} = \{z \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2) : z(t) = E(t)c \text{ für ein } c \in \mathbb{C}^2\}, \quad E(t) = S \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}. \quad (144)$$

FALL 2. A nicht diagonalisierbar, d.h. $\exists S \in \mathbb{C}^{n \times n}: S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann

$$\mathbb{L} = \{z \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2) : z(t) = E(t)c \text{ für ein } c \in \mathbb{C}^2\}, \quad E(t) = S \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}. \quad (145)$$

Wir sehen hier nochmal, dass es eine gute Idee war, in diesem Abschnitt über \mathbb{C} zu arbeiten – im Körper \mathbb{R} hat nämlich nicht jede Matrix eine Jordan-Normalform!

Ein Problem gibt es aber: Hat man eine DGL der Form $y'(t) = Ay(t)$ mit einer reellwertigen(!) Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gegeben, so hätte man auch gerne reellwertige Lösungen. Mit unseren Formeln bekommen wir das aber erstmal nicht: Hat A komplexe Eigenwerte, so ist zum Beispiel auch die Matrix $E(t)$ in den Beispielen 25, 26 und 30 komplexwertig.

Definition 32. Es sei $y'(t) = Ay(t)$, ($t \in \mathbb{R}$) mit einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gegeben. Es sei $\mathbb{L} \subset C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}^n)$ die allgemeine Lösung dieses Systems. Dann nennen wir $\mathbb{L} \cap C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$ die *reelle allgemeine Lösung*.

Wir wollen eine Formel für die allgemeine reelle Lösung finden. Dazu benötigen wir:

Lemma 33. Gegeben sei $y'(t) = Ay(t)$, ($t \in \mathbb{R}$) für ein $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Sei $\mathbb{L} \subset C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}^n)$ die allgemeine Lösung. Dann ist \mathbb{L} ein linearer Unterraum von $C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}^n)$. Ferner ist für alle $y \in \mathbb{L}$ auch $\operatorname{Re}(y)$ und $\operatorname{Im}(y)$ (komponentenweise gebildet) ein Element von \mathbb{L} .

Beweis. Die Unterraumeigenschaft zeigt man analog zu Proposition 17. Nun sei $y \in \mathbb{L}$. $\mathbb{Z} \operatorname{Re}(y) \in \mathbb{L}$. Dies rechnet man mit den Eigenschaften aus Aufgabe 1 auf Blatt 3 nach:

$$\frac{d}{dt} \operatorname{Re}(y(t)) = \operatorname{Re}(y'(t)) = \operatorname{Re}(Ay(t)) \stackrel{A \in \mathbb{R}^{n \times n}}{=} A(\operatorname{Re}(y(t))). \quad (146)$$

Analog zeigt man $\operatorname{Im}(y) \in \mathbb{L}$.

Die folgende Proposition gibt eine Formel für die allgemeine reelle Lösung.

Proposition 34. Es sei für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ das lineare System $y'(t) = Ay(t)$, ($t \in \mathbb{R}$) gegeben. Die allgemeine Lösung habe die Gestalt

$$\mathbb{L} = \{y \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}^n) : y(t) = E(t)c \text{ für ein } c \in \mathbb{C}^n\} \quad (147)$$

mit $E \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}^{n \times n})$ und (komponentenweise gelesen)

$$E(t) = \operatorname{Re}(E(t)) + i\operatorname{Im}(E(t)) \in \mathbb{C}^{n \times n} \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (148)$$

Dann gilt

$$\mathbb{L} \cap C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n) = \{y \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n) : y(t) = \operatorname{Re}(E(t))c_1 + \operatorname{Im}(E(t))c_2 \text{ für } c_1, c_2 \in \mathbb{R}^n\}. \quad (149)$$

Beweis. Zu ‘ \subset ’. Sei $y(t) \in \mathbb{L} \cap C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$, d.h. zum Einen $y(t) = E(t)c$ für ein $c \in \mathbb{C}^n$ und zum Anderen $y(t) = \operatorname{Re}(y(t))$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Nun

$$E(t)c = [\operatorname{Re}(E(t)) + i\operatorname{Im}(E(t))] [\operatorname{Re}(c) + i\operatorname{Im}(c)] \quad (150)$$

$$= \operatorname{Re}(E(t))\operatorname{Re}(c) - \operatorname{Im}(E(t))\operatorname{Im}(c) + i(\operatorname{Re}(E(t))\operatorname{Im}(c) + \operatorname{Im}(E(t))\operatorname{Re}(c)). \quad (151)$$

Mit $c_1 := \operatorname{Re}(c)$ und $c_2 := -\operatorname{Im}(c)$ folgt

$$y(t) = \operatorname{Re}(y(t)) = \operatorname{Re}(E(t))\operatorname{Re}(c) - \operatorname{Im}(E(t))\operatorname{Im}(c) = \operatorname{Re}(E(t))c_1 + \operatorname{Im}(E(t))c_2. \quad (152)$$

Zu ‘ \supset ’. Es sei $y(t) = \operatorname{Re}(E(t))c_1 + \operatorname{Im}(E(t))c_2$ für $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^n$. ~~Z~~ $y \in \mathbb{L}$. Wegen (147) definieren $z_1(t) := E(t)c_1$ und $z_2(t) := E(t)c_2$ Elemente aus \mathbb{L} . Nach Lemma 33 sind auch $\operatorname{Re}(z_1), \operatorname{Im}(z_2) \in \mathbb{L}$. Wiederum nach Lemma 33 gilt auch $\operatorname{Re}(z_1) + \operatorname{Im}(z_2) \in \mathbb{L}$. Nun

$$(\operatorname{Re}(z_1) + \operatorname{Im}(z_2))(t) = \operatorname{Re}(z_1(t)) + \operatorname{Im}(z_2(t)) = \operatorname{Re}(E(t)c_1) + \operatorname{Im}(E(t)c_2) \quad (153)$$

$$\stackrel{c_1, c_2 \in \mathbb{R}^n}{=} \operatorname{Re}(E(t))c_1 + \operatorname{Im}(E(t))c_2. \quad (154)$$

Die Behauptung folgt.

Ein wenig unbefriedigend ist, dass wir gar nicht so genau wissen, ob für jedes lineare System die allgemeine Lösung die Gestalt aus (147) hat. Später werden wir dies aber beweisen. Daher ist es in der Praxis auch immer der Fall, siehe z.B. Zusammenfassung 31.

Am Ende noch ein Wort zu Anfangswertproblemen.

Proposition 35. Es sei die DGL $y'(t) = Ay(t)$, ($t \in \mathbb{R}$) für ein $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ gegeben. Die allgemeine Lösung habe die Gestalt

$$\mathbb{L} = \{y \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}^n) : y(t) = E(t)c \text{ für ein } c \in \mathbb{C}^n\} \quad (155)$$

wobei $E(t) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ invertierbar für alle t . Dann hat für $t_0 \in \mathbb{R}$ und $y_0 \in \mathbb{C}^n$ das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \tilde{y}'(t) = A\tilde{y}(t) & (t \in \mathbb{R}) \\ \tilde{y}(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (156)$$

die eindeutige Lösung $\tilde{y}(t) := E(t)(E(t_0)^{-1}y_0)$. Ist ferner $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $y_0 \in \mathbb{R}^n$ so gilt $\tilde{y} \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$.

Beweis. Sei \tilde{y} eine Lösung von (156). Da \tilde{y} die DGL löst gibt es ein $c \in \mathbb{C}^n$ mit $\tilde{y}(t) = E(t)c$. Damit gilt

$$\tilde{y}(t_0) = y_0 \Leftrightarrow E(t_0)c = y_0 \Leftrightarrow c = E(t_0)^{-1}y_0. \quad (157)$$

Das Anfangswertproblem (156) ist also genau dann erfüllt wenn $\tilde{y}(t) = E(t)(E(t_0)^{-1}y_0)$ — die Lösung ist also eindeutig festgelegt. Nun zum zweiten Teil der Behauptung. Sei nun $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Sei $\tilde{y} \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}^n)$ eine Lösung des AWP (156), d.h. $\tilde{y} \in \mathbb{L}$ und $\tilde{y}(t_0) = y_0$. **Z:** $\tilde{y} \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$. Aus Lemma 33 schließen wir, dass auch $\operatorname{Re}(\tilde{y}) \in \mathbb{L}$. Ferner gilt

$$\operatorname{Re}(\tilde{y})(t_0) = \operatorname{Re}(y(t_0)) = \operatorname{Re}(y_0) = y_0. \quad (158)$$

Somit löst also $\operatorname{Re}(\tilde{y})$ dasselbe Anfangswertproblem wie \tilde{y} , nämlich (156). Da dieses AWP aber eine eindeutige Lösung hat, schließen wir $\tilde{y} = \operatorname{Re}(\tilde{y}) \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$.

Etwas unglücklich ist bei der obigen Proposition wieder, dass die Invertierbarkeit von $E(t)$ vorausgesetzt werden muss. Wir werden später sehen, dass diese Invertierbarkeit immer gegeben ist, daher ist die Voraussetzung in der Praxis immer erfüllt.

1.2.4 Lineare DGLs zweiter Ordnung (mit konstanten Koeffizienten)

DGL-Typ 36. Eine *lineare (homogene) DGL zweiter Ordnung (mit konstanten Koeffizienten)* ist von der Form

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0 \quad (t \in \mathbb{R}), \quad (159)$$

wobei $a, b \in \mathbb{C}$. Die allgemeine Lösung ist in diesem Fall gegeben durch

$$\mathbb{L} := \{y \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}) : y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0 \forall t \in \mathbb{R}\}. \quad (160)$$

Methode 37. Gegeben sei die DGL $y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0$ für $a, b \in \mathbb{C}$. Sei y eine Lösung. Setze

$$\begin{cases} z_0(t) := y(t) \\ z_1(t) := y'(t) \end{cases}. \quad (161)$$

Behauptung: $z(t) := \begin{pmatrix} z_0(t) \\ z_1(t) \end{pmatrix}$ löst ein lineares System. Dazu berechnen wir

$$z'_0(t) = y'(t) = z_1(t), \quad (162)$$

$$z'_1(t) = y''(t) \stackrel{(DGL)}{=} -ay'(t) - by(t) = -az_1(t) - bz_0(t). \quad (163)$$

Somit

$$z'(t) = \begin{pmatrix} z'_0(t) \\ z'_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ -az_1(t) - bz_0(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0(t) \\ z_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} z(t). \quad (164)$$

Das obige lineare System können wir nun mittels Zusammenfassung 31 explizit lösen, nennen wir dessen allgemeine Lösung $\tilde{\mathbb{L}}$. Schauen wir nun zurück auf Gleichung (161) so lernen wir: Jede Lösung y ist die *erste Komponente* eines Elementes von $\tilde{\mathbb{L}}$. Mit anderen Worten

$$\mathbb{L} \subset \left\{ y \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}) : y(t) = \langle z(t), e_1 \rangle \text{ für ein } z \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}^2) \text{ mit } z'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} z(t) \right\}. \quad (165)$$

Hierbei ist $\langle v, w \rangle := v^T \bar{w}$ das Skalarprodukt in \mathbb{C}^n und $e_1 = (1, 0)^T$. (Deswegen $\langle v, e_1 \rangle \hat{=}$ erste Komponente von v). Auf Übungsblatt 4 zeigen Sie, dass oben auch Gleichheit gilt.

Da wir alle zweidimensionalen Systeme explizit lösen können wären wir an der Stelle fertig. Wir wollen aber (für $a, b \in \mathbb{R}$) eine explizitere Formel.

Satz 38. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0, (t \in \mathbb{R})$ gegeben. Dann gilt

(1) Falls $\frac{a^2}{4} - b > 0$ so definiere $\lambda_{1,2} := -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$. Es gilt

$$\mathbb{L} = \{y \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}) : y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \text{ für } c_1, c_2 \in \mathbb{C}\}. \quad (166)$$

(2) Falls $\frac{a^2}{4} - b < 0$ so definiere $\lambda_{1,2} := -\frac{a}{2} \pm i\sqrt{b - \frac{a^2}{4}}$. Es gilt

$$\mathbb{L} = \{y \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}) : y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \text{ für } c_1, c_2 \in \mathbb{C}\}. \quad (167)$$

(3) Falls $\frac{a^2}{4} - b = 0$ so definiere $\lambda := -\frac{a}{2}$. Es gilt

$$\mathbb{L} = \{y \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}) : y(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t} \text{ für } c_1, c_2 \in \mathbb{C}\}. \quad (168)$$

Beweis. Zuerst zu Fall (1) und (2), d.h. $\frac{a^2}{4} - b \neq 0$. Sei y eine Lösung. Wir wissen aus Methode 37, dass

$$y(t) = \langle z(t), e_1 \rangle \text{ für ein } z \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}^2) \text{ mit } z'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} z(t). \quad (169)$$

Wir setzen nun $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$ und bestimmen die allgemeine Lösung von $z'(t) = Az(t)$.

Zwischenbehauptung. A ist diagonalisierbar. Dazu berechnen wir das charakteristische

Polynom.

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -b & -a - \lambda \end{pmatrix} = (-\lambda)(-a - \lambda) + b = \lambda^2 + a\lambda + b. \quad (170)$$

Man sieht, dass (sowohl in Fall (1) als auch in Fall (2)) die Nullstellen des char. Polynom gerade durch λ_1, λ_2 gegeben sind. Da $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ist A diagonalisierbar. Daher gibt es $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$ invertierbar so, dass $S^{-1}AS = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$. Mit Zusammenfassung 31 folgt

$$z(t) = S \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \quad \text{für } d_1, d_2 \in \mathbb{C}. \quad (171)$$

Daher

$$y(t) = \langle z(t), e_1 \rangle = \left\langle S \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}, e_1 \right\rangle \stackrel{\langle Mv, w \rangle = \langle v, \overline{M}^T w \rangle}{=} \left\langle \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}, \overline{S}^T e_1 \right\rangle \quad (172)$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} d_1 \\ e^{\lambda_2 t} d_2 \end{pmatrix}, \overline{S}^T e_1 \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} d_1 \\ e^{\lambda_2 t} d_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \text{wobei } \overline{S}^T e_1 =: \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}. \quad (173)$$

Wir erhalten $y(t) = d_1 \overline{v}_1 e^{\lambda_1 t} + d_2 \overline{v}_2 e^{\lambda_2 t}$. Setzt man $c_1 := d_1 \overline{v}_1$ und $c_2 := d_2 \overline{v}_2$ so erhält man $y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$. Final folgt

$$\mathbb{L} \subset \{y \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}) : y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \text{ für } c_1, c_2 \in \mathbb{C}\}. \quad (174)$$

Durch direktes Nachrechnen zeigt man auch ‘ \supset ’.

Nun zu Fall (3). Sei y eine Lösung. Wir definieren A wie oben, betrachten das Hilfssystem $z'(t) = Az(t)$ und berechnen das char. Polynom von A exakt wie in (170). Dieses hat wegen der Annahme, dass $\frac{a^2}{4} - b = 0$ nur eine Nullstelle $\lambda = -\frac{a}{2}$ mit (algebraischer) Vielfachheit 2.

Zwischenbehauptung. A ist nicht diagonalisierbar. Hierzu zeigen wir, dass die geometrische Vielfachheit von λ strikt kleiner 2 ist. Betrachte dazu

$$A - \lambda I = A + \frac{a}{2}I = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} & 1 \\ -b & -\frac{a}{2} \end{pmatrix}. \quad (175)$$

Dies ist nicht die Nullmatrix, hat also $\text{Rang} \geq 1$. Für die geom. Vielfachheit gilt dann

$$\Rightarrow \dim[\text{Ker}(A - \lambda I)] = 2 - \text{Rang}(A - \lambda I) = 2 - \text{Rang} \begin{pmatrix} \frac{a}{2} & 1 \\ -b & -\frac{a}{2} \end{pmatrix} \leq 1 < 2. \quad (176)$$

Die Matrix ist also nicht diagonalisierbar. Nach Zusammenfassung 31 gibt es $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$ invertierbar mit $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Es folgt mit Zusammenfassung 31

$$z(t) = S \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \quad \text{für gewisse } d_1, d_2 \in \mathbb{C}. \quad (177)$$

Man kann ab hier vorgehen wie in (178) ff.

$$y(t) = \langle z(t), e_1 \rangle = \left\langle S \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}, e_1 \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}, \bar{S}^T e_1 \right\rangle \quad (178)$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} e^{\lambda t} d_1 + te^{\lambda t} d_2 \\ e^{\lambda t} d_2 \end{pmatrix}, \bar{S}^T e_1 \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} e^{\lambda t} d_1 + te^{\lambda t} d_2 \\ e^{\lambda t} d_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \text{wobei } \bar{S}^T e_1 =: \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}. \quad (179)$$

Man erhält

$$y(t) = (e^{\lambda t} d_1 + te^{\lambda t} d_2) \bar{v}_1 + e^{\lambda t} d_2 \bar{v}_2 = \underbrace{(\bar{v}_1 d_1 + \bar{v}_2 d_2)}_{:=c_1} e^{\lambda t} + \underbrace{d_2 \bar{v}_1}_{:=c_2} te^{\lambda t}. \quad (180)$$

Man folgert $y(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}$ und somit

$$\mathbb{L} \subset \{y \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}) : y(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t} \text{ für } c_1, c_2 \in \mathbb{C}\}. \quad (181)$$

Von ‘ \supset ’ überzeugt man sich auch durch direktes Nachrechnen: Dass $t \mapsto e^{\lambda t}$ eine Lösung ist überlassen wir Ihnen. Dass $t \mapsto te^{\lambda t}$ eine Lösung ist sehen wir so: Mit $\frac{d}{dt}(te^{\lambda t}) = e^{\lambda t} + \lambda te^{\lambda t}$ und $\frac{d^2}{dt^2}(te^{\lambda t}) = 2\lambda e^{\lambda t} + \lambda^2 te^{\lambda t}$ erhalten wir

$$\frac{d^2}{dt^2}(te^{\lambda t}) + a \frac{d}{dt}(te^{\lambda t}) + b te^{\lambda t} = \underbrace{(\lambda^2 + a\lambda + b)}_{=0 \text{ mit (170)}} te^{\lambda t} + \underbrace{(2\lambda + a)}_{=0 \text{ weil } \lambda = -\frac{a}{2}} e^{\lambda t} = 0. \quad (182)$$

Da \mathbb{L} ein Vektorraum ist, sind nun also auch Linearkombinationen von $e^{\lambda t}$ und $te^{\lambda t}$ Lösungen. Daraus folgt ‘ \supset ’.

Anmerkung 39. Die in der Lösungsformel auftauchenden Werte $\lambda_{1,2}$ sind gerade die Nullstellen von $p(\lambda) := \lambda^2 + a\lambda + b$. Dies geht aus der Rechnung in (170) hervor. Das Polynom $p(\lambda)$ heißt fortan *charakteristisches Polynom* von $y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0$. Es bestimmt auch in welchem Fall wir in Satz 38 sind.

- Fall (1): $p(\lambda)$ hat zwei verschiedene reellwertige Nullstellen.
- Fall (2): $p(\lambda)$ hat zwei verschiedene nicht-reellwertige Nullstellen.
- Fall (3): $p(\lambda)$ hat eine doppelte Nullstelle.

Als nächstes besprechen wir eine wichtige Anwendung, das *Federpendel*.

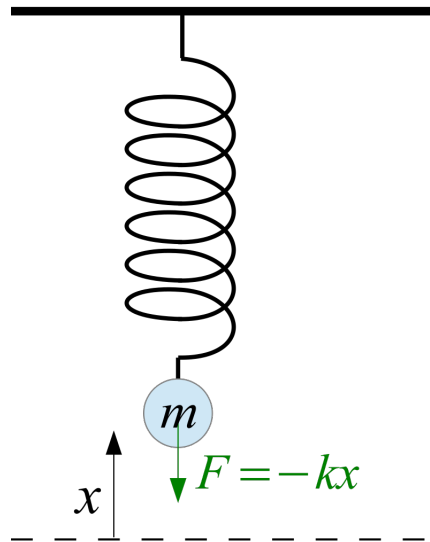


Abbildung 1: Das Federpendel

Anwendung 40. DAS FEDERPENDEL (TEIL 1). Ein Massestück (der Masse $m > 0$) ist an einer Feder aufgehängt und schwingt dort. Die (zeitabhängige) Auslenkung aus der Ruhelage heißt $x(t)$, siehe Abbildung 1. Der Grund, dass das Teilchen schwingt ist, dass die Feder eine *Rückstellkraft* $F(t)$ verursacht. Diese Rückstellkraft ist stets proportional zur Auslenkung, d.h.

$$F(t) = -kx(t) \quad \text{für eine Konstante } k > 0, \text{ Federkonstante genannt.} \quad (183)$$

In der Realität würden auch noch andere Kräfte (z.B. Reibung, Gravitation) wirken, diese vernachlässigen wir aber. Mit dem *Newton'schen Bewegungsgesetz* ($F = ma$) gilt

$$F(t) = ma(t) = mx''(t). \quad (184)$$

Setzen wir (183) und (184) gleich so ergibt sich eine DGL für $x(t)$.

$$mx''(t) = -kx(t) \quad \Leftrightarrow \quad x''(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0. \quad (185)$$

Wir nennen $\omega := \sqrt{\frac{k}{m}} > 0$ und erhalten die DGL

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0. \quad (186)$$

Diese DGL lässt sich mit Satz 38 lösen. Das charakteristische Polynom ist $p(\lambda) = \lambda^2 + \omega^2$ und dessen Nullstellen sind $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$. Wir folgern aus Fall (2) von Satz 38

$$x(t) = c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t} \quad \text{für } c_1, c_2 \in \mathbb{C}. \quad (187)$$

Wir betrachten nun ein Federpendel mit *Anfangsort* $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$ und *Anfangsgeschwindigkeit* $x'(0) = v_0 \in \mathbb{R}$, d.h. wir haben das *Anfangswertproblem*

$$\begin{cases} x''(t) + \omega^2 x(t) = 0 \\ x(0) = x_0 \\ x'(0) = v_0 \end{cases} \quad . \quad (188)$$

Mit (187) berechnen wir

$$x_0 = x(0) \stackrel{!}{=} c_1 e^{i\omega \cdot 0} + c_2 e^{i\omega \cdot 0} = c_1 + c_2, \quad (189)$$

$$v_0 = x'(0) \stackrel{!}{=} c_1 i\omega e^{i\omega \cdot 0} + c_2 (-i\omega) e^{i\omega \cdot 0} = i\omega(c_1 - c_2). \quad (190)$$

Dies führt auf das folgende lineare Gleichungssystem

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = x_0 \\ c_1 - c_2 = \frac{v_0}{i\omega} \end{cases} \quad . \quad \begin{matrix} \longleftarrow \\ \text{(LGS) nach } c_1, c_2 \text{ lösen} \\ \longrightarrow \end{matrix} \quad \begin{cases} c_1 = \frac{1}{2}(x_0 + \frac{v_0}{i\omega}) \\ c_2 = \frac{1}{2}(x_0 - \frac{v_0}{i\omega}) \end{cases} \quad . \quad (191)$$

Wir erhalten, dass die zeitliche Auslenkung $x(t)$ des Pendels gegeben ist durch

$$x(t) = \frac{1}{2}(x_0 + \frac{v_0}{i\omega}) e^{i\omega t} + \frac{1}{2}(x_0 - \frac{v_0}{i\omega}) e^{-i\omega t} = x_0 \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} + \frac{v_0}{\omega} \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \quad (192)$$

$$= x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t). \quad (193)$$

Diese Formel beschreibt eine *Schwingung mit Frequenz* $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Diese Frequenz nennt man auch *Eigenfrequenz* des Pendels.

Anmerkung 41. Um eine eindeutige Lösung zu erhalten mussten wir in (188) *zwei* Anfangswerte vorschreiben, nämlich Anfangsort und Anfangsgeschwindigkeit. Warum reicht nicht nur ein Anfangswert? Wir erinnern uns (mit Methode 37), dass wir zu jeder linearen DGL zweiter Ordnung ein 2-dimensionales(!) System erster Ordnung assoziieren können. Nach Proposition 35 benötigt man bei einem zweidimensionalen System aber stets einen (2-dimensionalen) *Anfangswertevektor*, um eine eindeutige Lösung zu erhalten. Das erklärt warum hier 2 Anfangswerte vonnöten sind.

Der Rest dieser Sektion handelt von *inhomogenen* linearen DGLs zweiter Ordnung.

DGL-Typ 42. Eine *lineare inhomogene DGL zweiter Ordnung (mit konstanten Koeffizi-*

enten) ist von der Form

$$y''(t) + ay(t) + by(t) = g(t) \quad (t \in I) \quad (194)$$

für $a, b \in \mathbb{C}$ und $g \in C^0(I; \mathbb{C})$.

Für bestimmte Werte von a, b lässt sich eine schöne geschlossene Formel finden.

Satz 43. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $\frac{a^2}{4} - b \neq 0$ und $g \in C^0(I; \mathbb{C})$. Sei $y''(t) + ay'(t) + by(t) = g(t)$, ($t \in I$) gegeben. Seien λ_1, λ_2 die beiden (verschiedenen) Nullstellen von $p(\lambda) := \lambda^2 + a\lambda + b$. Dann hat jede Lösung die Gestalt

$$y(t) = d_1 e^{\lambda_1 t} + d_2 e^{\lambda_2 t} + \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(e^{\lambda_2 t} \int^t e^{-\lambda_2 s} g(s) \, ds - e^{\lambda_1 t} \int^t e^{-\lambda_1 s} g(s) \, ds \right) \quad (195)$$

für gewisse $d_1, d_2 \in \mathbb{C}$.

Beweis. Wir wandeln die DGL zunächst in ein (inhomogenes) System erster Ordnung um. Für eine Lösung y setzen wir also $z_0(t) := y(t)$ und $z_1(t) = y'(t)$ und berechnen

$$\begin{cases} z_0'(t) = y'(t) = z_1(t) \\ z_1'(t) = y''(t) = -ay'(t) - by(t) + g(t) = -az_1(t) - bz_0(t) + g(t) \end{cases} \quad (196)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} z_0'(t) \\ z_1'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0(t) \\ z_1(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ g(t) \end{pmatrix}. \quad (197)$$

Dieses lineare inhomogene System können wir lösen wie in Anmerkung 27. Wie in (170) zeigen wir zunächst, dass $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$ diagonalisierbar ist und Eigenwerte λ_1, λ_2 hat. Laut Anmerkung 27 ist dann jede Lösung von (197) gegeben durch

$$\begin{pmatrix} z_0(t) \\ z_1(t) \end{pmatrix} = E(t)d(t) \quad \text{für ein } d \in C^1(I; \mathbb{C}^2) \text{ mit } E(t)d'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ g(t) \end{pmatrix}. \quad (198)$$

Hierbei muss $E(t)$ wie in (120) bestimmt werden, d.h. $E(t) = S \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$, wobei S eine Matrix ist, die A diagonalisiert.

Zwischenbehauptung. Die Matrix $S := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ diagonalisiert A . Wir zeigen dazu, dass jede Spalte von S ein Eigenvektor von A ist. In der Tat gilt für $i = 1, 2$ (mit $p(\lambda)$ definiert wie in der Aussage)

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_i \\ -b - a\lambda_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_i \\ \lambda_i^2 - p(\lambda_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_i \\ \lambda_i^2 \end{pmatrix} = \lambda_i \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_i \end{pmatrix}. \quad (199)$$

Nun haben wir also

$$E(t) = S \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}. \quad (200)$$

Mit (198) können wir dann $d(t)$ berechnen:

$$d'(t) = E(t)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ g(t) \end{pmatrix} \stackrel{(200)}{\underset{(MN)^{-1}=N^{-1}M^{-1}}{=}} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ g(t) \end{pmatrix} \quad (201)$$

$$\stackrel{\substack{\text{Invertierformel} \\ \text{für } 2 \times 2\text{-Matrizen}}}{=} \begin{pmatrix} e^{-\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{-\lambda_2 t} \end{pmatrix} \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ g(t) \end{pmatrix} \quad (202)$$

$$= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} e^{-\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{-\lambda_2 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -g(t) \\ g(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} -e^{-\lambda_1 t} g(t) \\ e^{-\lambda_2 t} g(t) \end{pmatrix}. \quad (203)$$

Das heißt

$$d(t) = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \int^t \begin{pmatrix} -e^{-\lambda_1 s} g(s) \\ e^{-\lambda_2 s} g(s) \end{pmatrix} ds \quad \text{für } d_1, d_2 \in \mathbb{C}. \quad (204)$$

Mit (198) folgt

$$\begin{pmatrix} z_0(t) \\ z_1(t) \end{pmatrix} = E(t)d(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \int^t \begin{pmatrix} -e^{-\lambda_1 s} g(s) \\ e^{-\lambda_2 s} g(s) \end{pmatrix} ds \right] \quad (205)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} d_1 e^{\lambda_1 t} \\ d_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} + \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} -e^{\lambda_1 t} \int^t e^{-\lambda_1 s} g(s) ds \\ e^{\lambda_2 t} \int^t e^{-\lambda_2 s} g(s) ds \end{pmatrix} \right]. \quad (206)$$

Wir betrachten nun nur die erste Komponente dieser Matrix-Vektor-Multiplikation und erhalten

$$y(t) = z_0(t) = (1 \ 1)^T \left[\begin{pmatrix} d_1 e^{\lambda_1 t} \\ d_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} + \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} -e^{\lambda_1 t} \int^t e^{-\lambda_1 s} g(s) ds \\ e^{\lambda_2 t} \int^t e^{-\lambda_2 s} g(s) ds \end{pmatrix} \right] \quad (207)$$

$$= d_1 e^{\lambda_1 t} + d_2 e^{\lambda_2 t} + \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(e^{\lambda_2 t} \int^t e^{-\lambda_2 s} g(s) ds - e^{\lambda_1 t} \int^t e^{-\lambda_1 s} g(s) ds \right). \quad (208)$$

Anwendung 44. DAS FEDERPENDEL – TEIL II. Betrachten wir nochmal das Federpendel mit derselben Notation wie in Anwendung 40. Diesmal wirkt aber neben der Rückstellkraft noch *externe Kraft* $\tilde{h}(t)$, z.B. gegeben durch Wind. Anstatt (183) haben wir also

$$F(t) = -kx(t) + \tilde{h}(t) \quad k > 0 \text{ Federkonstante, } \tilde{h}(t) \text{ zeitabhängige externe Kraft.} \quad (209)$$

Die Newton'sche Bewegungsgleichung $F = ma$ liefert dann

$$mx''(t) = -kx(t) + \tilde{h}(t) \quad \Rightarrow \quad x''(t) + \frac{k}{m}x(t) = \frac{1}{m}\tilde{h}(t). \quad (210)$$

Wiederum mit $\omega := \sqrt{\frac{k}{m}} > 0$ und $h(t) := \frac{\tilde{h}(t)}{m}$ hat man

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = h(t). \quad (211)$$

Wir betrachten hier den Fall $h(t) = de^{i\alpha t}$ für ein $\alpha > 0$ und $d \in \mathbb{C}$. Mit Formel (195) können wir nun die Lösungen bestimmen. Beachte dazu dass $p(\lambda) = \lambda^2 + \omega^2$ und daher $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$. Formel (195) liefert dann (für $d_1, d_2 \in \mathbb{C}$)

$$x(t) = d_1 e^{i\omega t} + d_2 e^{-i\omega t} - \frac{d}{2i\omega} \left(e^{-i\omega t} \int^t e^{i(\alpha+\omega)s} ds - e^{i\omega t} \int^t e^{i(\alpha-\omega)s} ds \right). \quad (212)$$

Falls $\alpha \neq \omega$ so gilt

$$x(t) = d_1 e^{i\omega t} + d_2 e^{-i\omega t} - \frac{d}{2i\omega} \left(e^{-i\omega t} \frac{1}{i(\alpha+\omega)} e^{i(\alpha+\omega)t} - e^{i\omega t} \frac{1}{i(\alpha-\omega)} e^{i(\alpha-\omega)t} \right) \quad (213)$$

$$= d_1 e^{i\omega t} + d_2 e^{-i\omega t} + \frac{d}{2\omega} \left(\frac{1}{\alpha+\omega} - \frac{1}{\alpha-\omega} \right) e^{i\alpha t}. \quad (214)$$

Falls $\alpha = \omega$ so folgt

$$x(t) = d_1 e^{i\omega t} + d_2 e^{-i\omega t} + \frac{d}{2i\omega} \left(e^{-i\omega t} \int^t e^{2i\omega s} ds - e^{i\omega t} \int^t 1 ds \right) \quad (215)$$

$$= d_1 e^{i\omega t} + d_2 e^{-i\omega t} - \frac{d}{2i\omega} \left(\frac{1}{2i\omega} e^{i\omega t} - t e^{i\omega t} \right) = d_1 e^{i\omega t} + d_2 e^{-i\omega t} + \frac{d}{4\omega^2} e^{i\omega t} - \frac{d}{2i\omega} t e^{i\omega t} \quad (216)$$

$$= \tilde{d}_1 e^{i\omega t} + d_2 e^{-i\omega t} - \frac{d}{2i\omega} t e^{i\omega t} \quad \text{mit } \tilde{d}_1 := d_1 + \frac{d}{4\omega^2}. \quad (217)$$

Obwohl die externe Kraft $\tilde{h}(t) = mh(t) = mde^{i\alpha t}$ beschränkt ist, ist im Fall $\alpha = \omega$ jede Lösung für $t \rightarrow \infty$ unbeschränkt! Selbst kleine externe Kräfte können also unbeschränkt große Effekte auf das System haben. Man spricht von *Resonanzphänomenen*.

Die Lösungsformel aus (195) ist länglich. Manchmal kann man die Anwendung dieser Formel umgehen indem man eine Lösung $rät$.

Proposition 45. Es sei $y''(t) + ay'(t) + by(t) = g(t)$, $(t \in I)$ für $a, b \in \mathbb{C}$, $g \in C^0(I; \mathbb{C})$ gegeben. Wir bezeichnen die allgemeine Lösung dieser DGL mit \mathbb{L} . Sei nun $y_p \in C^2(I; \mathbb{C})$ eine Lösung, d.h. $y_p''(t) + ay_p'(t) + by_p(t) = g(t)$ für alle $t \in I$ und

$$\mathbb{L}_{\text{hom}} := \{z \in C^2(I; \mathbb{C}) : z''(t) + az'(t) + bz(t) = 0 \text{ für alle } t \in I\}. \quad (218)$$

Dann gilt

$$\mathbb{L} = \{y \in C^2(I; \mathbb{C}) : y(t) = z(t) + y_p(t) \text{ für ein } z \in \mathbb{L}_{\text{hom}}\}. \quad (219)$$

Man schreibt $\mathbb{L} = \mathbb{L}_{\text{hom}} + y_p$.

Eine solche geratene Lösung y_p nennt man dann *partikuläre Lösung*.

Beweis. Zu ‘ \subset ’. Sei $y \in \mathbb{L}$. Definiere $\tilde{z} := y - y_p$. Wir zeigen, dass $\tilde{z} \in \mathbb{L}_{\text{hom}}$.

$$\tilde{z}''(t) + a\tilde{z}'(t) + b\tilde{z}(t) = (y''(t) - y_p''(t)) + a(y'(t) - y_p'(t)) + b(y(t) - y_p(t)) \quad (220)$$

$$= y''(t) + ay'(t) + by(t) - (y_p''(t) - ay_p'(t) - by_p(t)) \quad (221)$$

$$= g(t) - g(t) = 0. \quad (222)$$

Somit $\tilde{z} \in \mathbb{L}_{\text{hom}}$ und da $y = y_p + \tilde{z}$ folgt ‘ \subset ’. Zu ‘ \supset ’. Sei $y = y_p + z$ für ein $z \in \mathbb{L}_{\text{hom}}$. Dann gilt

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = (y_p''(t) + z''(t)) + a(y_p'(t) + z'(t)) + b(y_p(t) + z(t)) \quad (223)$$

$$= y_p''(t) + ay_p'(t) + by_p(t) + z''(t) + az'(t) + bz(t) = g(t) + 0 = g(t). \quad (224)$$

Somit ist y eine Lösung, d.h. $y \in \mathbb{L}$.

Beispiel 46. Wir lösen

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 17 \quad (t \in \mathbb{R}). \quad (225)$$

Wir raten eine partikuläre Lösung $y_p(t) = \frac{17}{2}$. In der Tat:

$$y_p''(t) + 3y_p'(t) + 2y_p(t) = 0 + 0 + 2 \frac{17}{2} = 17. \quad (226)$$

Nach Satz 38 (oder Übungsaufgabe 4 Blatt 3) wissen wir: Die allgemeine Lösung des homogenen Problems $z''(t) + 3z'(t) + 2z(t) = 0$ ist

$$\mathbb{L}_{\text{hom}} = \{z \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}) : z(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} \text{ für } c_1, c_2 \in \mathbb{C}\}. \quad (227)$$

Wir folgern

$$\mathbb{L} = \{y \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}) : y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} + \frac{17}{2} \text{ für } c_1, c_2 \in \mathbb{C}\}. \quad (228)$$

Beispiel 47. Wir lösen

$$\underbrace{y''(t) + 3y'(t) + 2y(t)}_{(LS)} = \underbrace{4 + 5t}_{(RS)} \quad (t \in \mathbb{R}). \quad (229)$$

Wir raten eine partikuläre Lösung mithilfe eines Ansatzes.

$$\textbf{Ansatz:} \quad y_p(t) \stackrel{!}{=} \theta_0 + \theta_1 t \quad \text{für } \theta_0, \theta_1 \in \mathbb{C}. \quad (230)$$

Wir suchen passende θ_0, θ_1 . Einsetzen in (LS) liefert

$$(LS) : \quad y_p''(t) + 3y_p'(t) + 2y_p(t) = 0 + 3\theta_1 + 2(\theta_0 + \theta_1 t) = (3\theta_1 + 2\theta_0) + 2\theta_1 t. \quad (231)$$

Damit ist $(LS) = (RS)$ äquivalent zu

$$(3\theta_1 + 2\theta_0) + 2\theta_1 t = 4 + 5t \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3\theta_1 + 2\theta_0 = 4 \\ 2\theta_1 = 5 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3\theta_1 + 2\theta_0 = 4 \\ 2\theta_1 = 5 \end{cases}. \quad (232)$$

Man erhält $\theta_1 = \frac{5}{2}$ und $\theta_0 = \frac{7}{6}$. Somit ist $y_p(t) = \frac{7}{6} + \frac{5}{2}t$ eine partikuläre Lösung. Wie im vorigen Beispiel gilt

$$\mathbb{L}_{\text{hom}} = \{z \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}) : z(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} \text{ für } c_1, c_2 \in \mathbb{C}\}. \quad (233)$$

Wir folgern

$$\mathbb{L} = \{y \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}) : y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} + \frac{7}{6} + \frac{5}{2}t \text{ für } c_1, c_2 \in \mathbb{C}\}. \quad (234)$$

Dies hätte man auch mit Satz 43 herausfinden können, wäre aber mehr Arbeit gewesen.

1.2.5 Lineare DGLs zweiter Ordnung (mit zeitabhängigen Koeffizienten)

DGL-Typ 48. Eine *lineare homogene DGL zweiter Ordnung* ist von der Form

$$y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0 \quad (t \in I), \quad (235)$$

für $a, b \in C^0(I; \mathbb{C})$.

Unsere Methode hier beruht auf der folgenden Beobachtung, die wir später beweisen.

Proposition 49. Es sei für $a, b \in C^0(I; \mathbb{C})$ die DGL $y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0, (t \in I)$, gegeben. Dann ist die allgemeine Lösung $\mathbb{L} \subset C^2(I; \mathbb{C})$ stets ein \mathbb{C} -linearer Unterraum der Dimension 2.

Beweis. Später.

Um die allgemeine Lösung zu beschreiben benötigen wir also zwei linear unabhängige Lösungen.

Definition 50. Es sei für $a, b \in C^0(I; \mathbb{C})$ die DGL $y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0$, ($t \in I$), gegeben. Seien $y_1, y_2 \in C^2(I; \mathbb{C})$ zwei Lösungen. Dann definieren wir die *Wronski-Funktion* von $w[y_1, y_2] : I \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$w[y_1, y_2](t) := y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t) \quad (t \in I). \quad (236)$$

Proposition 51. Es sei für $a, b \in C^0(I; \mathbb{C})$ die DGL $y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0$, ($t \in I$), gegeben. Seien $y_1, y_2 \in C^2(I; \mathbb{C})$ zwei Lösungen. Dann gibt es $c \in \mathbb{C}$ mit

$$w[y_1, y_2](t) = c \exp\left(-\int^t a(s) ds\right). \quad (237)$$

Falls $c \neq 0$ so sind y_1, y_2 linear unabhängig.

Beweis. Beachte

$$y_i''(t) + a(t)y_i'(t) + b(t)y_i(t) = 0 \quad \forall t \in I \quad \forall i = 1, 2. \quad (238)$$

Setze $w := w[y_1, y_2]$. Wir leiten zunächst eine DGL für w her.

$$w'(t) = \frac{d}{dt}(y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t)) \quad (239)$$

$$= y_1'(t)y_2'(t) + y_1(t)y_2''(t) - y_2'(t)y_1'(t) - y_2(t)y_1''(t) \quad (240)$$

$$= y_1(t)y_2''(t) - y_2(t)y_1''(t) \quad (241)$$

$$\stackrel{(238)}{=} y_1(t)(-a(t)y_2'(t) - b(t)y_2(t)) - y_2(t)(-a(t)y_1'(t) - b(t)y_1(t)) \quad (242)$$

$$= -a(t)y_1(t)y_2'(t) - b(t)y_1(t)y_2(t) + a(t)y_2(t)y_1'(t) + b(t)y_2(t)y_1(t) \quad (243)$$

$$= -a(t)(y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t)) = -a(t)w(t). \quad (244)$$

Also gilt $w'(t) = -a(t)w(t)$. Aus Satz 8 folgt dann

$$w(t) = c \exp\left(-\int^t a(s) ds\right) \quad \text{für ein } c \in \mathbb{C}. \quad (245)$$

Wir zeigen jetzt noch, dass lineare Abhängigkeit von y_1, y_2 zu $c = 0$ führt. Seien also y_1, y_2 linear abhängig. Ist $y_1 = 0$ oder $y_2 = 0$ so gilt klarerweise $w = w[y_1, y_2] = 0$, was zu $c = 0$ führt. Sind $y_1, y_2 \neq 0$ so gilt (wegen linearer Abhängigkeit) $y_1 = \lambda y_2$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$. Daher

$$w(t) = w[y_1, y_2](t) = y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t) = \lambda y_2(t)y_2'(t) - y_2(t)(\lambda y_2)'(t) \quad (246)$$

$$= \lambda y_2(t)y_2'(t) - \lambda y_2(t)y_2'(t) = 0. \quad (247)$$

Es folgt also $c = 0$.

Methode 52. Es sei für $a, b \in C^0(I; \mathbb{C})$ die DGL $y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0$, ($t \in I$), gegeben. Nehmen wir auch an, wir haben eine Lösung y_1 der Gleichung (z.B. geraten) mit $y_1(t) \neq 0$ für $t \in I$ (OBdA $y_1 > 0$, sonst betrachte $-y_1$). Wir beschaffen uns nun eine zweite linear unabhängige Lösung y_2 . Nach Proposition 51 erfüllt jede weitere linear unabhängige Lösung y_2

$$y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t) = c \exp\left(-\int^t a(s) ds\right) \quad (248)$$

für ein $c \neq 0$. Sagen wir mal $c = 1$ (ansonsten betrachte ein geeignetes Vielfaches von y_2). Teilen wir nun durch y_1 so erhalten wir eine lineare inhomogene DGL:

$$y_2'(t) - \left(\frac{y_1'(t)}{y_1(t)}\right) y_2(t) = \frac{1}{y_1(t)} \exp\left(-\int^t a(s) ds\right), \quad (249)$$

$$\Leftrightarrow y_2'(t) = \left(\frac{y_1'(t)}{y_1(t)}\right) y_2(t) + \frac{1}{y_1(t)} \exp\left(-\int^t a(s) ds\right) = \tilde{a}(t)y_2(t) + \tilde{b}(t), \quad (250)$$

mit $\tilde{a}(t) = \frac{y_1'(t)}{y_1(t)}$, $\tilde{b}(t) = \frac{1}{y_1(t)} \exp\left(-\int^t a(s) ds\right)$. Die DGL $y_2'(t) = \tilde{a}(t)y_2(t) + \tilde{b}(t)$ lässt sich dann mit Satz 20 lösen. Es gilt für ein $\tilde{c} \in \mathbb{C}$

$$y_2(t) = \tilde{e}(t) \left(\tilde{c} + \int^t \frac{\tilde{b}(u)}{\tilde{e}(u)} du \right), \quad (251)$$

wobei

$$\tilde{e}(t) = \exp\left(\int^t \tilde{a}(s) ds\right) = \exp\left(\int^t \frac{y_1'(s)}{y_1(s)} ds\right) \quad (252)$$

$$= \exp\left(\int^t \frac{d}{ds} \log y_1(s) ds\right) = \exp(\log y_1(s)) = y_1(s). \quad (253)$$

Das bedeutet

$$y_2(t) = y_1(t) \left(\tilde{c} + \int^t \frac{1}{y_1(u)^2} \exp\left(-\int^u a(s) ds\right) \right) \quad (254)$$

$$= \tilde{c}y_1(t) + y_1(t) \int^t \frac{1}{y_1(u)^2} \exp\left(-\int^u a(s) ds\right) du. \quad (255)$$

Wir können getrost $\tilde{c} = 0$ wählen, denn $-\tilde{c}y_1$ ist bereits eine Lösung darf daher hinzuaddiert werden ohne \mathbb{L} zu verlassen (weil \mathbb{L} ja ein Vektorraum ist, siehe Proposition 49). Damit

$$y_2(t) = y_1(t) \int^t \frac{1}{y_1(u)^2} \exp\left(-\int^u a(s) ds\right) du. \quad (256)$$

Wegen Proposition 49 muss dann (aus Dimensionsgründen) jede weitere Lösung eine Linearkombination aus y_1 und y_2 sein, d.h.

$$\mathbb{L} = \{y \in C^2(I; \mathbb{C}) : y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) \text{ für } c_1, c_2 \in \mathbb{C}\}. \quad (257)$$

Beispiel 53. Wir betrachten die *Legendre-Gleichung*

$$(1 - t^2)y''(t) - 2ty'(t) + 2y(t) = 0 \quad (t \in (0, 1)), \quad (258)$$

oder äquivalent

$$y''(t) - \frac{2t}{1-t^2}y'(t) + \frac{2}{1-t^2}y(t) = 0 \quad (t \in (0, 1)). \quad (259)$$

Man rät leicht, dass $y_1(t) = t$ eine Lösung ist. Um eine linear unabhängige Lösung zu finden benutzen wir (256) mit $a(s) = \frac{-2s}{1-s^2}$. Beachte

$$\exp\left(-\int^u a(s) ds\right) = \exp\left(\int^u \frac{2s}{1-s^2} ds\right) = \exp(-\log(1-u^2)) = \frac{1}{1-u^2}. \quad (260)$$

Somit liefert (256)

$$y_2(t) = t \int^t \frac{1}{u^2} \cdot \frac{1}{1-u^2} du \quad \text{Partialbruchzerlegung} \quad t \int^t \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{1-u^2}\right) du \quad (261)$$

$$= t \left(\left[-\frac{1}{t}\right] + \int^t \frac{1}{1-u^2} du \right) = t \left(\left[-\frac{1}{t}\right] + \int^t \frac{1}{(1-u)(1+u)} du \right) \quad (262)$$

$$\text{Partialbruchzerlegung} \quad t \left(\left[-\frac{1}{t}\right] + \int^t \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u} \right) du \right) \quad (263)$$

$$= t \left(\left[-\frac{1}{t}\right] + \left[-\frac{1}{2} \log(1-t) + \frac{1}{2} \log(1+t)\right] \right) \quad (264)$$

$$= -1 + \frac{t}{2} \log(1+t) - \frac{t}{2} \log(1-t). \quad (265)$$

Damit gilt

$$\mathbb{L} = \left\{ y \in C^2(I; \mathbb{C}) : y(t) = c_1 t + c_2 \left(-1 + \frac{t}{2} \log(1+t) - \frac{t}{2} \log(1-t) \right) \text{ für } c_1, c_2 \in \mathbb{C} \right\}. \quad (266)$$

Natürlich bleibt in solchen Situationen immer das Problem, dass y_1 geraten werden muss. Dafür können zum Beispiel alle Polynome bis zu einem gewissen Grad durchprobiert werden. Weiter denkbar ist der sogenannte *Potenzreihenansatz*, d.h. man sucht $(c_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{C}$ so dass

$$p(t) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k \quad \text{eine Lösung ist.} \quad (267)$$

Einsetzen in die DGL liefert stets eine Rekursionsgleichung für $(c_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$.

1.3 Integrale der Bewegung

Eine Möglichkeit, Differentialgleichungen zu lösen ist durch das Finden von *Integralen der Bewegung*.

Definition 54. Es sei für $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^n)$, $G \subset \mathbb{R}^n$, die Differentialgleichung

$$(DGL) \quad y'(t) = f(t, y(t)) \quad (t \in I) \quad (268)$$

gegeben. Eine Funktion $g \in C^1(I \times G; \mathbb{R})$, $g \not\equiv \text{const.}$, heißt *Integral der Bewegung* (IDB) oder *Erhaltungsgröße* falls für jede Lösung y von (DGL) gilt

$$g(t, y(t)) \equiv \text{const.} \quad \text{auf } I. \quad (269)$$

Anmerkung 55. Gegeben sei die DGL $y'(t) = f(t, y(t))$, $(t \in I)$. Ist $g \in C^1(I \times G; \mathbb{R})$. Dann ist $g = g(\tau, z)$ ein Integral der Bewegung genau dann wenn

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}g(t, y(t)) \stackrel{\text{mehrdim. Kettenregel}}{=} Dg(t, y(t)) \begin{pmatrix} 1 \\ y'(t) \end{pmatrix} = (\partial_\tau g \quad D_z g)(t, y(t)) \begin{pmatrix} 1 \\ y'(t) \end{pmatrix} \\ &= \partial_\tau g(t, y(t)) + D_z g(t, y(t)) \cdot y'(t) = \partial_\tau g(t, y(t)) + D_z g(t, y(t)) \cdot f(t, y(t)). \end{aligned} \quad (270)$$

Zusammengefasst: $g = g(\tau, z)$ ist IDB für $y'(t) = f(t, y(t))$, $(t \in I)$ falls

$$\partial_\tau g(\tau, z) + D_z g(\tau, z) \cdot f(\tau, z) = 0. \quad (271)$$

Beispiel 56. Für die DGL $y'(t) = ay(t)$ definiert $g(\tau, z) := e^{-a\tau}z$ ein Integral der Bewegung. In der Tat: Mit $f(\tau, z) = az$ berechnen wir

$$\partial_\tau g(\tau, z) + D_z g(\tau, z) \cdot f(\tau, z) = -ae^{-a\tau}z + e^{-a\tau}(az) = 0. \quad (272)$$

Oft lässt sich die Gleichung $g(t, y(t)) = c$ nach $y(t)$ umstellen. Daher können Integrale der Bewegung helfen, Lösungen explizit zu bestimmen. Wie konstruiert man IDBs?

1.3.1 Exakte Differentialgleichungen

Den nachfolgenden DGL-Typ werden wir durch Finden eines Integrals der Bewegung lösen. Um dieses zu konstruieren benötigen wir einen kleinen Exkurs zu *Gradientenfeldern*.

Einschub: Gradientenfelder.

Definition 57. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ ein Gebiet. Ein Vektorfeld $F \in C^0(\Omega; \mathbb{R}^n)$ heißt *Gradientenfeld*, wenn es eine Funktion $\phi \in C^1(\Omega; \mathbb{R})$ gibt mit $F = \nabla\phi$. Eine solche Funktion ϕ heißt *Stammfunktion* oder auch *Potential*.

Ist $n = 1$, so haben alle $F \in C^0(\Omega; \mathbb{R})$ eine Stammfunktion, gegeben durch

$$\phi(z) = \int^z F(s) \, ds. \quad (273)$$

Für $n > 1$ gibt es nicht zwingend eine Stammfunktion, wie wir später sehen werden.

Beispiel 58. Gegeben sei $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$F(\tau, z) = \begin{pmatrix} 4\tau^3 z \\ z^2 + 1 + \tau^4 \end{pmatrix}. \quad (274)$$

Wir fragen uns, ob F ein Gradientenfeld ist. Gäbe es nun $\phi = \phi(\tau, z) \in C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ mit $\nabla\phi = F$ so wäre

$$\partial_\tau\phi(\tau, z) = F_1(\tau, z) = 4\tau^3 z, \quad (275)$$

$$\partial_z\phi(\tau, z) = F_2(\tau, z) = z^2 + 1 + \tau^4. \quad (276)$$

Wir integrieren die erste Gleichung (für festgehaltenes z) nach τ und erhalten

$$\phi(\tau, z) = \tau^4 z + c(z), \quad (277)$$

wobei $c(z)$ eine Integrationskonstante ist (die für jedes z eine andere sein darf!). Wir leiten den Ausdruck in (277) nun nach z ab und vergleichen mit (276). Einerseits

$$(277) \Rightarrow \partial_z\phi(\tau, z) = \tau^4 + c'(z) \quad \text{und andererseits} \quad (276) \Rightarrow \partial_z\phi(\tau, z) = \tau^4 + z^2 + 1. \quad (278)$$

Wir können beide Folgerungen wahr machen wenn $\tau^4 + c'(z) = \tau^4 + z^2 + 1$. Das bedeutet $c'(z) = z^2 + 1$, also $c(z) = \frac{1}{3}z^3 + z + c_0$ für ein $c_0 \in \mathbb{R}$. Wir erhalten mit (277)

$$\phi(\tau, z) = \tau^4 z + \frac{1}{3}z^3 + z + c_0 = \frac{1}{3}z^3 + (\tau^4 + 1)z + c_0. \quad (279)$$

Die obige Rechnung muss nicht immer aufgehen: Wäre F kein Gradientenfeld, so wäre es unmöglich, beide Bedingungen in (278) zu erfüllen. Das *Lemma von Poincare* gibt ein Kriterium, ob ein Gradientenfeld vorliegt.

Satz 59. LEMMA VON POINCARÉ. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ ein Gebiet und $F = (F_1, \dots, F_n)^T \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ ein Vektorfeld.

1. Ist F ein Gradientenfeld, so gilt $\partial_i F_j = \partial_j F_i$ für alle $i, j = 1, \dots, n$
2. Ist Ω sternförmig und $\partial_i F_j = \partial_j F_i$ für alle $i, j = 1, \dots, n$, so ist F ein Gradientenfeld.

Teilbeweis. Wir beweisen nur Teil 1. Sei F Gradientenfeld, etwa $F = \nabla\phi$ für ein $\phi \in C^1(\Omega; \mathbb{R})$. Das heißt $F_k = \partial_k\phi$ für alle $k = 1, \dots, n$. Da $F \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ gilt $\phi \in C^2(\Omega; \mathbb{R})$. Mit dem Satz von Schwarz sieht man dann

$$\partial_i F_j = \partial_i(\partial_j\phi) = \partial_j(\partial_i\phi) = \partial_j F_i. \quad (280)$$

In der Praxis genügt es übrigens, das Kriterium $\partial_i F_j = \partial_j F_i$ nur für $i \neq j$ zu überprüfen: Für $i = j$ ist es automatisch erfüllt.

DGL-Typ 60. Eine *exakte DGL* ist eine DGL der Form

$$p(t, y(t)) + q(t, y(t))y'(t) = 0 \quad (t \in I) \quad (281)$$

wobei $p, q \in C^0(I \times J; \mathbb{R})$, ($J \subset \mathbb{R}$ Intervall) so, dass $F = (p, q)^T \in C^0(I \times J; \mathbb{R}^2)$ ein Gradientenfeld ist.

Proposition 61. Es sei die exakte DGL $p(t, y(t)) + q(t, y(t))y'(t) = 0$, ($t \in I$) gegeben und $F = (p, q)^T$. Dann ist jede Stammfunktion von F ein Integral der Bewegung.

Beweis. Es sei $\phi \in C^1(I \times J; \mathbb{R})$ mit $\nabla\phi = F = (p, q)^T$. Schreibe $\phi = \phi(\tau, z)$, d.h. $\partial_\tau\phi = p$ und $\partial_z\phi = q$. Sei nun $y \in C^1(I; \mathbb{R})$ eine Lösung. Dann gilt

$$\frac{d}{dt}\phi(t, y(t)) \stackrel{\text{mehrdim. Kettenregel}}{=} D\phi(t, y(t)) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ y'(t) \end{pmatrix} = (\partial_\tau\phi \quad \partial_z\phi)(t, y(t)) \begin{pmatrix} 1 \\ y'(t) \end{pmatrix} \quad (282)$$

$$= \partial_\tau\phi(t, y(t)) + \partial_z\phi(t, y(t))y'(t) = p(t, y(t)) + q(t, y(t))y'(t) = 0. \quad (283)$$

Beispiel 62, Teil 1. Gegeben ist die DGL

$$4t^3y(t) + (y(t)^2 + 1 + t^4)y'(t) = 0 \quad (t \in I). \quad (284)$$

Das bedeutet $p(\tau, z) = 4\tau^3z$ und $q(\tau, z) = z^2 + 1 + \tau^4$. Also gilt

$$F(\tau, z) := \begin{pmatrix} p(\tau, z) \\ q(\tau, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\tau^3z \\ z^2 + 1 + \tau^4 \end{pmatrix}. \quad (285)$$

Nach Beispiel 58 ist F ein Gradientenfeld, mit Stammfunktion $\phi(\tau, z) = \frac{1}{3}z^3 + (\tau^4 + 1)z$. Die DGL ist also exakt und ϕ ist nach Proposition 61 ein IDB. Daher gilt für jede Lösung $y \in C^1(I; \mathbb{R})$

$$\phi(t, y(t)) = \frac{1}{3}y(t)^3 + (t^4 + 1)y(t) = c \quad \text{für ein } c \in \mathbb{R}. \quad (286)$$

Diese *kubische Gleichung* würden wir gerne nach $y(t)$ auflösen, um eine Formel für y zu erhalten.

Lemma 63. CARDANO-FORMEL. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Dann hat die Gleichung $x^3 + ax + b = 0$ genau eine reellwertige Lösung, gegeben durch

$$x = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}. \quad (287)$$

Beweis. Für beliebige $u, v \in \mathbb{R}$ berechne zunächst

$$(u + v)^3 = u^3 + v^3 + 3u^2v + 3uv^2 = 3uv(u + v) + (u^3 + v^3). \quad (288)$$

Setzt man nun $x := u + v$ so gilt stets

$$x^3 - 3uvx - (u^3 + v^3) = 0 \quad (289)$$

Wir suchen nun $u, v \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{cases} -3uv = a \\ -(u^3 + v^3) = b \end{cases} \quad (290)$$

Haben wir diese gefunden, so gilt nach (289) $x^3 + ax + b = 0$ (für $x = u + v$). Für Zahlen u, v wie in (290) würde gelten

$$-u^3v^3 = (-1)^3u^3v^3 = (-uv)^3 \stackrel{(290)}{=} \left(\frac{a}{3}\right)^3 = \frac{a^3}{27}, \quad (291)$$

$$u^3 + v^3 \stackrel{(290)}{=} -b. \quad (292)$$

Beachte, dass dann für alle $z \in \mathbb{R}$ gilt

$$(z - u^3)(z - v^3) = z^2 - (u^3 + v^3)z + u^3v^3 \stackrel{(291),(292)}{=} z^2 + bz - \frac{a^3}{27}. \quad (293)$$

Somit sind u^3 und v^3 die (beiden reellen(!)) Nullstellen von $z^2 + bz - \frac{a^3}{27}$, d.h.

$$\{u^3, v^3\} = \left\{ -\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}, -\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}} \right\}. \quad (294)$$

Ziehen der dritten Wurzel (in \mathbb{R}) liefert

$$\{u, v\} = \left\{ \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}, \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} \right\} \quad (295)$$

und somit

$$x = u + v = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}. \quad (296)$$

Beispiel 62, Teil 2. Gegeben ist wieder die DGL

$$4t^3y(t) + (y(t)^2 + 1 + t^4)y'(t) = 0 \quad (t \in I). \quad (297)$$

Wir wissen bereits aus Beispiel 62 (Teil 1), dass für jede Lösung $y \in C^1(I; \mathbb{R})$ gilt

$$\frac{1}{3}y(t)^3 + (t^4 + 1)y(t) = c \quad \text{für ein } c \in \mathbb{R}, \quad (298)$$

d.h.

$$y(t)^3 + 3(t^4 + 1)y(t) - 3c = 0. \quad (299)$$

Mit der Cardiani-Formel (Lemma 63) (mit $a = 3(t^4 + 1) > 0, b = -3c$) gilt

$$y(t) = \sqrt[3]{\frac{3c}{2} + \sqrt{\frac{9c^2}{4} + (t^4 + 1)^3}} + \sqrt[3]{\frac{3c}{2} - \sqrt{\frac{9c^2}{4} + (t^4 + 1)^3}} \quad \text{für ein } c \in \mathbb{R}. \quad (300)$$

Das Auflösen war länglich. Lohnt sich der Aufwand? Nicht immer, denn aus dem IDB (298) lassen sich schon sehr viele Eigenschaften von Lösungen rauslesen. Ein Beispiel:

Frage. Ist für $I = \mathbb{R}$ jede Lösung $y \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ beschränkt? Mit der expliziten Formel (300) wäre die Beantwortung dieser Frage nicht leicht! Mit dem IDB (298) sieht man es sofort: Es gilt für ein $c \in \mathbb{R}$

$$y(t) \left(\frac{1}{3}y(t)^2 + 1 + t^4 \right) = c \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (301)$$

und somit gilt für alle $t \in \mathbb{R}$

$$|c| = \left| y(t) \left(\frac{1}{3}y(t)^2 + 1 + t^4 \right) \right| = |y(t)| \left(\underbrace{\frac{1}{3}y(t)^2}_{\geq 0} + 1 + \underbrace{t^4}_{\geq 0} \right) \geq |y(t)| \cdot 1. \Rightarrow |y(t)| \leq |c|. \quad (302)$$

Methode 64. Gegeben ist für $p, q \in C^1(I \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$ eine DGL der Form

$$p(t, y(t)) + q(t, y(t))y'(t) = 0 \quad (t \in I) \quad (303)$$

Ist $F = (p, q)^T$ kein Gradientenfeld, so ist die DGL nicht exakt. Was können wir in einem

solchen Fall tun?

Versuch. Finde $m \in C^1(I; \mathbb{R})$ so, dass $m(t)p(t, y(t)) + m(t)q(t, y(t))y'(t) = 0$ exakt ist. (304)

Jede Lösung von (303) ist auch eine Lösung von (304), denn es wurde ja nur mit $m(t)$ multipliziert. Damit (304) exakt ist muss $\tilde{F}(\tau, z) := (m(\tau)p(\tau, z), m(\tau)q(\tau, z))^T$ ein Gradientenfeld sein. Nach Satz 59 ist dies äquivalent zu $\partial_z \tilde{F}_1 = \partial_\tau \tilde{F}_2$, d.h.

$$\partial_z(m(\tau)p(\tau, z)) = \partial_\tau(m(\tau)q(\tau, z)). \quad (305)$$

$$\Leftrightarrow m(\tau)\partial_z p(\tau, z) = m'(\tau)q(\tau, z) + m(\tau)\partial_\tau q(\tau, z). \quad (306)$$

$$\Leftrightarrow m'(\tau)q(\tau, z) = m(\tau)(\partial_z p(\tau, z) - \partial_\tau q(\tau, z)). \quad (307)$$

Ist nun $q(\tau, z) \neq 0$ so kann man durch q teilen. Ist ferner $\frac{\partial_z p - \partial_\tau q}{q}(\tau, z)$ nur von τ und nicht von z abhängig, etwa $r(\tau) := \frac{\partial_z p - \partial_\tau q}{q}(\tau, z)$, so erhalten wir

$$m'(\tau) = r(\tau)m(\tau). \quad (308)$$

Mit Satz 8 folgt, dass für alle $c \in \mathbb{R}$

$$m(\tau) := c \exp\left(\int^\tau r(s) ds\right) \quad \text{die DGL in (304) exakt macht.} \quad (309)$$

Aber eben nur unter der Bedingung, dass $r(\tau) := \frac{\partial_z p(\tau, z) - \partial_\tau q(\tau, z)}{q(\tau, z)}$ nicht von z abhängt. Man nennt m einen *integrierenden Faktor*.

1.3.2 Gleichungen mit Energieerhaltung

DGL-Typ 65. Ein *autonomes newton'sches System mit ortsabhängiger Kraft* ist eine DGL von der Form

$$y''(t) = F(y(t)) \quad (t \in I) \quad (310)$$

für ein $F \in C^0(G; \mathbb{R}^n)$, genannt *Kraftfeld*. Gesucht wird eine Lösung $y \in C^2(I; \mathbb{R}^n)$.

Der Name der Gleichung stammt vom *newton'schen Gesetz* $F = ma [= my'']$.

Wir suchen Integrale der Bewegung. Für DGLs zweiter Ordnung haben diese stets die Form

$$g(t, y(t), y'(t)) \equiv \text{const} \quad (t \in I) \quad (311)$$

Proposition 66. Es sei die DGL $y''(t) = F(y(t))$, $(t \in I)$ für ein $F \in C^0(G; \mathbb{R}^n)$ gegeben. Es sei zusätzlich F ein Gradientenfeld mit Stammfunktion $-U$, d.h. $F = -\nabla U$. Dann ist für jede Lösung $y \in C^2(I; \mathbb{R}^n)$

$$\mathcal{E}(y(t), y'(t)) = \frac{1}{2}|y'(t)|^2 + U(y(t)) \equiv \text{const.} \quad (312)$$

Das IDB \mathcal{E} heißt *Gesamtenergie*. Der erste Summand heißt *kinetische Energie* und der zweite heißt *potentielle Energie*.

Beweis. Die DGL besagt

$$y''(t) = F(y(t)) = -\nabla U(y(t)). \quad (313)$$

Wir nehmen das Skalarprodukt mit $y'(t)$ und erhalten

$$\underbrace{\langle y''(t), y'(t) \rangle}_{(LS)} = -\underbrace{\langle \nabla U(y(t)), y'(t) \rangle}_{(RS)}. \quad (314)$$

Nun beachte

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} |y'(t)|^2 \right) = \frac{1}{2} \cdot 2 \langle y'(t), y''(t) \rangle = (LS). \quad (315)$$

$$-\frac{d}{dt} U(y(t)) = -DU(y(t)) \cdot y'(t) = \langle -\nabla U(y(t)), y'(t) \rangle = (RS). \quad (316)$$

Damit

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} |y'(t)|^2 \right) = -\frac{d}{dt} U(y(t)). \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} |y'(t)|^2 + U(y(t)) \right) = 0. \quad (317)$$

Methode 67. Wir betrachten hier die DGL $y''(t) = F(y(t))$, $(t \in I)$ im Spezialfall $n = 1$. Dann hat also jedes $F \in C^0(J; \mathbb{R})$ eine Stammfunktion $-U$ und es gilt $-U(z) = \int^z F(s) ds$. Gleichung (312) wird dann (für festes $c \in \mathbb{R}$) zu

$$\frac{1}{2} y'(t)^2 + U(y(t)) = c. \quad \Rightarrow \quad y'(t)^2 = 2c - 2U(y(t)). \quad (318)$$

Umgestellt bedeutet dies

$$y'(t) = \pm \sqrt{2c - 2U(y(t))} \quad (t \in I). \quad (319)$$

Falls $\pm = +$, so können wir diese Gleichung als DGL mit getrennten Veränderlichen lösen. Genauso falls $\pm = -$. Es könnte aber passieren, dass sich das Vorzeichen auf I mehrmals wechselt. Dann kann man nur abschnittsweise lösen. Leider weiß man aber a priori nicht wie viele Vorzeichenwechsel stattfinden.

Etwas einfacher ist es wenn $F > 0$: Dann ist $y'' > 0$ und somit y' streng monoton. Das bedeutet: y' kann maximal einmal das Vorzeichen wechseln.

Beispiel 68. Ein Teufel hält den Mond an und bringt ihn damit aus seiner Umlaufbahn. Danach lässt er ihn einfach los und verschwindet. Sei $z(t)$ der Abstand von Mond und

Erde. Auf den Mond wirkt dann nur noch die *Erdanziehungskraft*

$$F(z(t)) = -G \frac{mM}{z(t)^2}, \quad G \text{ Graviationskonstante, } m \text{ Mondmasse, } M \text{ Erdmasse.} \quad (320)$$

Der Mond fliegt radial auf die Erde zu. Nach dem Newton'schen Gesetz erfüllt der Mond die Bewegungsgleichung $F = ma = mz''(t)$, d.h.

$$mz''(t) = F(z(t)) = -G \frac{mM}{z(t)^2} \Rightarrow z''(t) = -\frac{GM}{z(t)^2}. \quad (321)$$

Wir haben auch noch Anfangsbedingungen, nämlich $z(0) = R > 0$ (die Anfangshöhe) und $z'(0) = 0$ (weil der Mond nach dem Eingriff des Teufels keine Geschwindigkeit hat). Also gilt

$$\begin{cases} z''(t) = -\frac{GM}{z(t)^2} & t \in (0, t_a) \\ z(0) = R \\ z'(0) = 0 \end{cases} \quad (322)$$

Hierbei ist $t_a > 0$ die Zeit, bei der der Mond auf die Erde kracht. Wir berechnen zunächst

$$-U(z) = \int_R^z F(s) \, ds = - \int_R^z \frac{GM}{s^2} \, ds = GM \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{R} \right). \quad (323)$$

Daher gilt für ein $c \in \mathbb{R}$ nach Proposition 66

$$c = \mathcal{E}(z(t), z'(t)) = \frac{1}{2}|z'(t)|^2 + U(z(t)) = \frac{1}{2}z'(t)^2 - GM \left(\frac{1}{z(t)} - \frac{1}{R} \right). \quad (324)$$

Setzen wir nun $t = 0$ ein, so erhalten wir

$$c = \frac{1}{2}z'(0)^2 - GM \left(\frac{1}{z(0)} - \frac{1}{R} \right) = 0 - GM \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R} \right) = 0. \quad (325)$$

Dadurch erhalten wir mit (324)

$$\frac{1}{2}z'(t)^2 = GM \left(\frac{1}{z(t)} - \frac{1}{R} \right). \Rightarrow z'(t)^2 = 2GM \left(\frac{1}{z(t)} - \frac{1}{R} \right). \quad (326)$$

Jetzt müssen wir Wurzelziehen. Welches Vorzeichen entsteht dabei? Laut der DGL (322) ist $z''(t) < 0$ für alle t . Somit ist z' monoton fallend. Da $z'(0) = 0$ gilt $z'(t) < 0$ für alle $t \in (0, t_a)$. Damit haben wir das Vorzeichen:

$$z'(t) = -\sqrt{2GM \left(\frac{1}{z(t)} - \frac{1}{R} \right)} \quad \forall t \in (0, t_a). \quad (327)$$

Wir lösen durch Separation.

$$\int_0^t \frac{z'(s)}{\sqrt{\frac{1}{z(s)} - \frac{1}{R}}} ds = -\sqrt{2GMt}. \quad \Rightarrow \quad \int_R^{z(t)} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{u} - \frac{1}{R}}} du = -\sqrt{2GMt} \quad (328)$$

Substituiert man $v = \frac{u}{R}$ so erhält man

$$R^{\frac{3}{2}} \int_1^{\frac{z(t)}{R}} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{v} - 1}} dv = -\sqrt{2GMt}. \quad \Rightarrow \quad R^{\frac{3}{2}} \int_1^{\frac{z(t)}{R}} \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{1-v}} dv = -\sqrt{2GMt}. \quad (329)$$

Wir formen um und verwenden eine weitere Substitution:

$$\begin{aligned} R^{\frac{3}{2}} \int_1^{\frac{z(t)}{R}} \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{1-v}} dv &= 2R^{\frac{3}{2}} \int_1^{\frac{z(t)}{R}} \frac{1}{2\sqrt{v}} \frac{v}{\sqrt{1-v}} dv \stackrel{w=\sqrt{v}}{=} 2R^{\frac{3}{2}} \int_1^{\sqrt{\frac{z(t)}{R}}} \frac{w^2}{\sqrt{1-w^2}} dw \quad (330) \\ &= 2R^{\frac{3}{2}} \int_1^{\sqrt{\frac{z(t)}{R}}} \frac{w^2 - 1 + 1}{\sqrt{1-w^2}} dw = 2R^{\frac{3}{2}} \left(-\int_1^{\sqrt{\frac{z(t)}{R}}} \sqrt{1-w^2} dw + \int_1^{\sqrt{\frac{z(t)}{R}}} \frac{1}{\sqrt{1-w^2}} dw \right). \quad (331) \end{aligned}$$

Beachte nun, dass $\int^{\bar{w}} \frac{1}{\sqrt{1-w^2}} dw = \arcsin(\bar{w}) + C$ und

$$\int^{\bar{w}} \sqrt{1-w^2} dw \stackrel{w=\sin \varphi}{=} \int^{\arcsin(\bar{w})} \sqrt{1-\sin^2(\varphi)} \cos(\varphi) d\varphi = \int^{\arcsin \bar{w}} \cos^2 \varphi d\varphi \quad (332)$$

$$= \int^{\arcsin \bar{w}} \frac{1}{2}(1 + \cos(2\varphi)) d\varphi = \frac{1}{2} \arcsin \bar{w} + \frac{1}{4} \sin(2 \arcsin \bar{w}) + C. \quad (333)$$

Nun liefert (331) und die vorigen Nebenrechnungen

$$R^{\frac{3}{2}} \int_1^{\frac{z(t)}{R}} \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{1-v}} dv = 2R^{\frac{3}{2}} \left[-\frac{1}{2} \arcsin \bar{w} - \frac{1}{4} \sin(2 \arcsin \bar{w}) + \arcsin \bar{w} \right]_{\bar{w}=1}^{\bar{w}=\sqrt{\frac{z(t)}{R}}} \quad (334)$$

$$= 2R^{\frac{3}{2}} \left[\frac{1}{2} \arcsin \bar{w} - \frac{1}{4} \sin(2 \arcsin \bar{w}) \right]_{\bar{w}=1}^{\bar{w}=\sqrt{\frac{z(t)}{R}}} \quad (335)$$

$$\stackrel{\arcsin(1)=\frac{\pi}{2}}{=} 2R^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{2} \arcsin \sqrt{\frac{z(t)}{R}} - \frac{1}{4} \sin \left(2 \arcsin \sqrt{\frac{z(t)}{R}} \right) - \frac{\pi}{4} \right). \quad (336)$$

Mit (329) sehen wir

$$2R^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{2} \arcsin \sqrt{\frac{z(t)}{R}} - \frac{1}{4} \sin \left(2 \arcsin \sqrt{\frac{z(t)}{R}} \right) - \frac{\pi}{4} \right) = -\sqrt{2GMt}. \quad (337)$$

Dies ist schwer nach $z(t)$ aufzulösen, daher lassen wir es an der Stelle. Man kann aber einiges schon an (337) ablesen. Zum Beispiel den Zeitpunkt t_a an dem Mond und Erde zusammenkrachen. Dieser erfüllt $z(t_a) = 0$. Eingesetzt in (337):

$$2R^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{2} \arcsin 0 - \frac{1}{4} \sin \arcsin 0 - \frac{\pi}{4} \right) = -\sqrt{2GM}t_a. \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi}{2}R^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2GM}t_a. \quad (338)$$

Also gilt

$$t_a = \frac{\pi R^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{2}\sqrt{GM}}. \quad (339)$$

1.3.3 Das Fadenpendel

Wir kommen nun zu einer speziellen Anwendung, nämlich der Beschreibung des *Fadenpendels*.

Herleitung 69. An einem pendelnden Stab der Länge $l > 0$ hängt ein Massepunkt der Masse $m > 0$, siehe Abbildung 2. Die zeitliche Bewegung des Pendels wird durch den Ortsvektor

$$\vec{x}(t) = l \begin{pmatrix} \sin \varphi(t) \\ -\cos \varphi(t) \end{pmatrix} \quad (340)$$

beschrieben. Hierbei ist der Ursprung $(0, 0)^T$ am Aufhängepunkt des Pendels, d.h. $\varphi(t) = 0$ würde heißen, dass das Pendel in der Ruhelage $(0, -l)^T$ ist. Die Kraft, die die Pendelbewegung verursacht ist die *Gewichtskraft*

$$\vec{F} = mg \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (341)$$

Die Newton'schen Bewegungsgleichungen lesen sich dann $\vec{F} = m\vec{a} = m\vec{x}''(t)$. Wir berechnen nun \vec{x}'' :

$$\vec{x}'(t) = l\varphi'(t) \begin{pmatrix} \cos \varphi(t) \\ \sin \varphi(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{x}''(t) = l\varphi''(t) \begin{pmatrix} \cos \varphi(t) \\ \sin \varphi(t) \end{pmatrix} + l\varphi'(t)^2 \begin{pmatrix} -\sin \varphi(t) \\ \cos \varphi(t) \end{pmatrix}. \quad (342)$$

Schreiben wir also $m\vec{x}'' = \vec{F}$ aus, so ergibt sich

$$ml\varphi''(t) \begin{pmatrix} \cos \varphi(t) \\ \sin \varphi(t) \end{pmatrix} + ml\varphi'(t)^2 \begin{pmatrix} -\sin \varphi(t) \\ \cos \varphi(t) \end{pmatrix} = mg \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (343)$$

Wir vereinfachen: Nimm beide Seiten im Skalarprodukt mit $v(t) := \begin{pmatrix} \cos \varphi(t) \\ \sin \varphi(t) \end{pmatrix}$. Mit

$$\left\langle \begin{pmatrix} \cos \varphi(t) \\ \sin \varphi(t) \end{pmatrix}, v(t) \right\rangle = 1, \quad \left\langle \begin{pmatrix} -\sin \varphi(t) \\ \cos \varphi(t) \end{pmatrix}, v(t) \right\rangle = 0, \quad \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, v(t) \right\rangle = -\sin \varphi(t) \quad (344)$$

ergibt sich eine DGL:

$$ml\varphi''(t) = -mg \sin \varphi(t). \quad (345)$$

Teilen wir durch ml und definieren wir $\omega := \sqrt{\frac{g}{l}} > 0$ so erhalten wir

$$\varphi''(t) = -\omega^2 \sin \varphi(t). \quad (346)$$

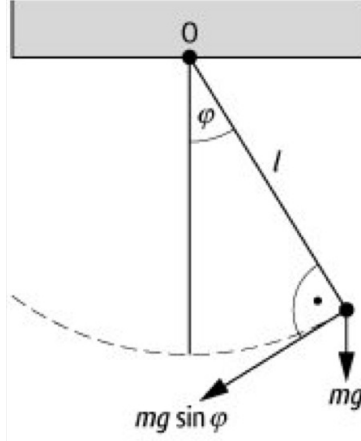


Abbildung 2: Das Fadenpendel

Für kleine Auslenkungswinkel $\varphi(t)$ kann man “ $\sin \varphi(t) \approx \varphi(t)$ ” annähern. Dann wird (346) zu der aus Anwendung 40 bekannten Gleichung $\varphi''(t) + \omega^2 \varphi(t) = 0$. Wir wollen diese *Kleinwinkelnäherung* aber im Folgenden nicht verwenden.

Lemma 70. Betrachte für $\omega, \alpha_0 > 0$ das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \varphi''(t) = -\omega^2 \sin \varphi(t) & (t \in \mathbb{R}) \\ \varphi(0) = 0 \\ \varphi'(0) = \alpha_0 \end{cases}. \quad (347)$$

Dann gilt

$$\varphi'(t)^2 = 2\omega^2 \cos(\varphi(t)) + \alpha_0^2 - 2\omega^2 \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (348)$$

Beweis. Wir verwenden Proposition 66 mit $F(z) = -\omega^2 \sin(z)$. Wir berechnen eine Stammfunktion

$$-U(z) = \int^z F(s) ds = -\omega^2 \int^z \sin(s) ds = \omega^2 \cos(s). \quad (349)$$

Proposition 66 besagt dann

$$\frac{1}{2}\varphi'(t)^2 - \omega^2 \cos \varphi(t) = \text{const.} = \frac{1}{2}\varphi'(0)^2 - \omega^2 \cos \varphi(0) = \frac{1}{2}\alpha_0^2 - \omega^2. \quad (350)$$

Multiplizieren mit 2 und Umstellen liefert die Behauptung.

Anhand von (348) wollen wir verstehen, ob das Pendel nur schwingt, oder ob es einen *Überschlag* macht. Wir benötigen als Vorbereitung dafür ein Hilfsresultat über konvexe Funktionen.

Proposition 71. Es sei $f \in C^1((a, b); \mathbb{R})$ konvex (bzw. konkav).

1. Dann gilt für alle $x, x_0 \in (a, b)$, dass $f(x) \underset{\text{(bzw. } \leq \text{)}}{\geq} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.
2. Gilt für ein $x_0 \in (a, b)$, dass $f'(x_0) = 0$, so ist x_0 eine globale Minimumsstelle (bzw. Maximumsstelle) von f auf (a, b) .

Beweis. Blatt 5 Aufgabe 3.

Satz 72. Es seien $\omega, \alpha_0 > 0$ und $\varphi \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ Lösung von

$$\begin{cases} \varphi''(t) = -\omega^2 \sin \varphi(t) & (t \in \mathbb{R}) \\ \varphi(0) = 0 \\ \varphi'(0) = \alpha_0 \end{cases} . \quad (351)$$

Dann tritt genau einer der folgenden drei Fälle auf

1. (*Überschlag*) $\alpha_0^2 > 4\omega^2$. Dann ist φ unbeschränkt, genauer $\varphi(t) \geq t\sqrt{\alpha_0^2 - 4\omega^2}$ für alle $t \in [0, \infty)$.
2. (*Schwingung*) $\alpha_0^2 < 4\omega^2$. Dann gibt es $\varphi_{max} \in (0, \pi)$ mit $\varphi(t) \in [-\varphi_{max}, \varphi_{max}]$ für alle $t \in [0, \infty)$. Genauer gilt $\varphi_{max} = \arccos(1 - \frac{\alpha_0^2}{2\omega^2})$.
3. (*Aufstellen*) $\alpha_0^2 = 4\omega^2$. Dann ist φ monoton wachsend, beschränkt und $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \pi$. Genauer $\varphi(t) = 2 \arctan(\sinh(\frac{\alpha_0}{2}t))$ für alle $t \in [0, \infty)$.

Beweis. FALL 1. $\alpha_0^2 > 4\omega^2$. Mit Lemma 70 gilt

$$\varphi'(t)^2 = 2\omega^2 \cos \varphi(t) + \alpha_0^2 - 2\omega^2 \geq 2\omega^2(-1) + \alpha_0^2 - 2\omega^2 = \alpha_0^2 - 4\omega^2. \quad (352)$$

Wir erhalten $|\varphi'(t)| \geq \sqrt{\alpha_0^2 - 4\omega^2} > 0$. Somit kann $\varphi'(t)$ niemals Null werden. Also kann φ' auch nicht das Vorzeichen wechseln (nach dem Zwischenwertsatz). Mit $\varphi'(0) = \alpha_0 > 0$ folgt $\varphi'(t) > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und damit

$$\varphi'(t) = |\varphi'(t)| \geq \sqrt{\alpha_0^2 - 4\omega^2}. \quad (353)$$

Integrieren liefert

$$\varphi(t) = \varphi(t) - \varphi(0) = \int_0^t \varphi'(s) \, ds \geq \int_0^t \sqrt{\alpha_0^2 - 4\omega^2} \, ds = t\sqrt{\alpha_0^2 - 4\omega^2}. \quad (354)$$

FALL 2. $\alpha_0^2 < 4\omega^2$. Sei wie in der Aussage $\varphi_{max} := \arccos(1 - \frac{\alpha_0^2}{2\omega^2}) \in (0, \pi)$ und sei $\varepsilon \in (0, \pi - \varphi_{max})$ beliebig vorgegeben. Setze

$$\bar{t}_\varepsilon := \sup\{t \in [0, \infty) : |\varphi(s)| \leq \varphi_{max} + \varepsilon \, \forall s \in [0, t]\}. \quad (355)$$

Wir zeigen $\bar{t}_\varepsilon = \infty$. Angenommen $\bar{t}_\varepsilon < \infty$, dann wäre (aus Stetigkeitsgründen) $|\varphi(\bar{t}_\varepsilon)| = (\varphi_{max} + \varepsilon)$, d.h. $\varphi(\bar{t}_\varepsilon) = \pm(\varphi_{max} + \varepsilon)$. Im Fall ‘ $\pm = +$ ’ gibt es (wieder aus Stetigkeitsgründen) $s_\varepsilon, \underline{t}_\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq s_\varepsilon < \underline{t}_\varepsilon < \bar{t}_\varepsilon$ so, dass $\varphi(\underline{t}_\varepsilon) = \varphi_{max}$ und $\varphi|_{(s_\varepsilon, \bar{t}_\varepsilon)} > 0$. Nun gilt mit Lemma 70 und der Definition von φ_{max}

$$\varphi'(\underline{t}_\varepsilon)^2 = 2\omega^2 \cos \varphi(\underline{t}_\varepsilon) + \alpha_0^2 - 2\omega^2 = 2\omega^2 \cos(\varphi_{max}) + \alpha_0^2 - 2\omega^2 \quad (356)$$

$$= 2\omega^2(1 - \frac{\alpha_0^2}{2\omega^2}) + \alpha_0^2 - 2\omega^2 = 0. \quad \Rightarrow \varphi'(\underline{t}_\varepsilon) = 0. \quad (357)$$

Außerdem gilt für $t \in (s_\varepsilon, \bar{t}_\varepsilon)$

$$\varphi''(t) = -\omega^2 \sin \varphi(t) < 0, \quad \text{da} \quad 0 < \varphi(t) \leq \varphi_{max} + \varepsilon < \pi \text{ für alle } t \in (s_\varepsilon, \bar{t}_\varepsilon). \quad (358)$$

Deshalb ist φ konkav auf $(s_\varepsilon, \bar{t}_\varepsilon)$ und laut (357) gilt $\varphi'(\underline{t}_\varepsilon) = 0$. Nach Proposition 71 ist dann $\underline{t}_\varepsilon$ eine globale Maximumsstelle von φ auf $(s_\varepsilon, \bar{t}_\varepsilon)$, d.h. $\varphi(t) \leq \varphi(\underline{t}_\varepsilon) = \varphi_{max}$ für alle $t \in (s_\varepsilon, \bar{t}_\varepsilon)$. Lässt man nun $t \uparrow \bar{t}_\varepsilon$ streben so erhält man den Widerspruch $\varphi_{max} + \varepsilon \leq \varphi_{max}$. Den Fall ‘ $\pm = -$ ’ behandelt man analog. Man schließt also $\bar{t}_\varepsilon = \infty$ und daher (nach Definition von \bar{t}_ε)

$$|\varphi(t)| \leq \varphi_{max} + \varepsilon \quad \forall t \in (0, \infty). \quad (359)$$

Lässt man ε gegen null gehen so folgert man $|\varphi(t)| \leq \varphi_{max}$ for $t \in (0, \infty)$.

FALL 3. $\alpha_0^2 = 4\omega^2$. Mit Lemma 70 folgt wieder

$$\varphi'(t)^2 = 2\omega^2 \cos \varphi(t) + \alpha_0^2 - 2\omega^2 = 2\omega^2 \cos \varphi(t) + 2\omega^2 = 2\omega^2(1 + \cos \varphi(t)). \quad (360)$$

Beachte nun

$$1 + \cos z = (\cos^2 \frac{z}{2} + \sin^2 \frac{z}{2}) + (\cos^2 \frac{z}{2} - \sin^2 \frac{z}{2}) = 2 \cos^2 \frac{z}{2}. \quad (361)$$

Daher gilt mit (360)

$$\varphi'(t)^2 = 4\omega^2 \cos^2 \frac{\varphi(t)}{2} = \alpha_0^2 \cos^2 \frac{\varphi(t)}{2}. \quad (362)$$

Definiere

$$M := \sup\{m \in [0, \infty) : \varphi'(t) > 0, \varphi(t) < \pi \, \forall t \in [0, m]\}. \quad (363)$$

Beachte, dass $M > 0$ da $\varphi(0) = 0 < \pi$ und $\varphi'(0) = \alpha_0 > 0$. Für alle $t \in [0, M]$ können wir in (362) Wurzelziehen (mit Vorzeichen '+'). Daher gilt für $t \in (0, M)$

$$\varphi'(t) = \alpha_0 \cos \frac{\varphi(t)}{2} = \alpha_0 \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \frac{\varphi(t)}{2}}}, \quad (364)$$

wobei wir für alle $z \in [0, \frac{\pi}{2})$ $\cos(z) = \frac{\cos z}{\sqrt{\cos^2 z + \sin^2 z}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 z}}$ umgeformt haben. Man hat

$$\varphi'(t) \sqrt{1 + \tan^2 \frac{\varphi(t)}{2}} = \alpha_0, \quad (365)$$

$$\Rightarrow \int_0^t \varphi'(s) \sqrt{1 + \tan^2 \frac{\varphi(s)}{2}} ds = \alpha_0 t, \quad (366)$$

$$\Rightarrow \int_0^{\varphi(t)} \sqrt{1 + \tan^2 \frac{u}{2}} du = \alpha_0 t \quad \forall t \in (0, M). \quad (367)$$

Nun berechnen wir

$$\int^z \sqrt{1 + \tan^2 \frac{u}{2}} du = \int^z \frac{1 + \tan^2 \frac{u}{2}}{\sqrt{1 + \tan^2 \frac{u}{2}}} du = 2 \int^z \frac{\frac{1}{2}(1 + \tan^2 \frac{u}{2})}{\sqrt{1 + \tan^2 \frac{u}{2}}} du \quad (368)$$

$$\stackrel{\substack{v = \tan \frac{u}{2} \\ \frac{dv}{du} = \frac{1}{2}(1 + \tan^2 \frac{u}{2})}}{=} 2 \int^{\tan \frac{z}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 + v^2}} dv = 2 \operatorname{Arsinh} \left(\tan \frac{z}{2} \right) + C. \quad (369)$$

Man erhält mit (367)

$$2 \operatorname{Arsinh} \left(\tan \frac{\varphi(t)}{2} \right) = \alpha_0 t \quad \forall t \in (0, M). \quad (370)$$

Umgeformt ergibt sich

$$\varphi(t) = 2 \arctan \left(\sinh \frac{\alpha_0 t}{2} \right) \quad \forall t \in (0, M). \quad (371)$$

Noch \mathbb{Z} : $M = \infty$. Nehmen wir nun an $M < \infty$. Dann gilt nach (363) entweder $\varphi(M) = \pi$ oder $\varphi'(M) = 0$. Im ersten Fall hat man dann mit (371)

$$\pi = \varphi(M) = \lim_{t \uparrow M, t < M} \varphi(t) = \lim_{t \uparrow M, t < M} 2 \arctan \left(\sinh \frac{\alpha_0 t}{2} \right) = 2 \arctan \left(\sinh \frac{\alpha_0 M}{2} \right). \quad (372)$$

Da $\arctan(w) < \frac{\pi}{2}$ für alle $w \in \mathbb{R}$, also auch $2 \arctan(w) < \pi$ für alle $w \in \mathbb{R}$ ergibt sich ein Widerspruch. Im zweiten Fall (d.h. falls $\varphi'(M) = 0$) hätte man auch mit (371)

$$0 = \varphi'(M) = \lim_{t \uparrow M, t < M} \varphi'(t) = \lim_{t \uparrow M, t < M} \frac{d}{dt} 2 \arctan \left(\sinh \frac{\alpha_0 t}{2} \right) \quad (373)$$

$$= \lim_{t \uparrow M, t < M} 2 \frac{1}{1 + \sinh^2 \frac{\alpha_0 t}{2}} \frac{\alpha_0}{2} \cosh \frac{\alpha_0 t}{2} = \alpha_0 \frac{1}{1 + \sinh^2 \frac{\alpha_0 M}{2}} \cosh \frac{\alpha_0 M}{2} > 0. \quad (374)$$

Ein Widerspruch. Es folgt $M = \infty$ und dann impliziert (371) die Behauptung.

2 Existenz, Eindeutigkeit, Globalität und Wohlgestelltheit

Sei in diesem Kapitel wieder stets $I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall und $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Im Folgenden untersuchen wir für $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^n)$, $t_0 \in I$ und $y_0 \in G$ Anfangswertprobleme der Form

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & (t \in I) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}. \quad (375)$$

Wir nennen nach wie vor eine Funktion $y \in C^1(I; G)$, die beide Eigenschaften in (375) erfüllt eine *Lösung* von (375).

2.1 Existenz und Eindeutigkeit

2.1.1 Thematischer Überblick

In dieser Sektion geben wir zunächst einen Überblick über die Resultate die wir beweisen wollen. Die Beweise folgen dann im Laufe der Sektion.

Fragestellungen 73. Gegeben sei für $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^n)$, $t_0 \in I$ und $y_0 \in G$ das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & (t \in I) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (376)$$

1. Existiert stets eine Lösung $y \in C^1(I; G)$?
2. Falls nein: Gibt es ein (größtmögliches) Teilintervall $\tilde{I} \subset I$, $t_0 \in \tilde{I}$ so, dass

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & (t \in \tilde{I}) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (377)$$

eine Lösung besitzt?

3. Falls ja: Sind Lösungen eindeutig?

Zu Frage 1. Im Allgemeinen ist die Antwort ‘nein’: In Beispiel 5 haben wir gezeigt, dass

$$\begin{cases} y'(t) = y(t)^2 & (t \in \mathbb{R}) \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (378)$$

keine Lösung besitzt. Unter manchen Bedingungen an f existiert jedoch schon eine Lösung auf ganz I :

Definition 74. GLOBALE LIPSCHITZ-BEDINGUNG. Eine Funktion $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^n)$ erfüllt eine globale Lipschitzbedingung auf I , falls es ein $L > 0$ gibt mit

$$|f(\tau, z_2) - f(\tau, z_1)| \leq L|z_2 - z_1| \quad \forall \tau \in I \quad \forall z_1, z_2 \in G. \quad (379)$$

In diesem Fall heißt L eine *Lipschitzkonstante* für f .

Eine solche globale Lipschitz-Bedingung ist hinreichend für (eindeutige) Existenz von Lösungen:

Satz 75. SATZ VON PICARD-LINDELÖF I – GLOBALE VERSION. Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f \in C^0(I \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ erfülle eine globale Lipschitzbedingung (auf $G = \mathbb{R}^n$ (!)). Dann hat für alle $t_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{R}^n$ das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & (t \in I) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (380)$$

eine eindeutige Lösung $y \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$.

Es geht sogar mit noch schwächeren Bedingungen an f , dazu später mehr im Kapitel 2.2.

Zu Frage 2. Die Antwort ist ‘ja’. ‘Größtmöglich’ ist hierbei in folgendem Sinne zu verstehen.

Definition 76. NICHTFORTSETZBARE LÖSUNG. Es seien $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^n)$, $t_0 \in I$ und $y_0 \in G$. Für ein offenes Teilintervall $\tilde{I} \subset I$, $t_0 \in \tilde{I}$ heißt eine Lösung $y \in C^1(\tilde{I}; G)$ von

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & (t \in \tilde{I}) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (381)$$

nichtfortsetzbare Lösung, falls es keine Funktion $z \in C^1(J; G)$ gibt mit $J \supsetneq \tilde{I}$ offenes Intervall, $z|_{\tilde{I}} = y$ und

$$\begin{cases} z'(t) = f(t, z(t)) & (t \in J) \\ z(t_0) = y_0 \end{cases}. \quad (382)$$

Wie bereits angekündigt, finden wir immer nichtfortsetzbare Lösungen.

Satz 77. SATZ VON PEANO. Es sei $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^n)$, $t_0 \in I$, $y_0 \in G$. Dann existiert $\tilde{I} \subset I$ mit $t_0 \in \tilde{I}$ und mit einer nichtfortsetzbaren Lösung $y \in C^1(\tilde{I}; G)$ des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & (t \in \tilde{I}) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (383)$$

Dies werden wir nicht komplett beweisen. Lückenlos werden wir aber eine leicht schwächere Existenzaussage zeigen. Hierzu müssen wir die *lokale Lipschitzbedingung* einführen.

Definition 77. LOKALE LIPSCHITZBEDINGUNG. Eine Funktion $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^n)$ erfüllt eine lokale Lipschitzbedingung auf I falls es zu jedem $(\tau_0, z_0) \in I \times G$ ein $\varepsilon > 0$, $r > 0$ und $L > 0$ gibt mit $(\tau_0 - \varepsilon, \tau_0 + \varepsilon) \subset I$, $B_r(z_0) \subset G$ und

$$|f(\tau, z_1) - f(\tau, z_2)| \leq L|z_1 - z_2| \quad \forall t \in (\tau_0 - \varepsilon, \tau_0 + \varepsilon), z_1, z_2 \in B_r(z_0). \quad (384)$$

Damit können das Existenzresultat formulieren, welches für diese Vorlesung ausreichen wird.

Satz 78. ABGESCHWÄCHTER SATZ VON PEANO. Es erfülle $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^n)$ eine lokale Lipschitzbedingung. Sei dazu $t_0 \in I$ und $y_0 \in G$. Dann existiert ein Teilintervall $\tilde{I} \subset I$ mit $t_0 \in \tilde{I}$ und mit einer nichtfortsetzbaren Lösung $y \in C^1(\tilde{I}; G)$ des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & (t \in \tilde{I}) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (385)$$

Wir werden später sehen, dass diese nichtfortsetzbare Lösung sogar eindeutig ist.

Zu Frage 3. Im Allgemeinen ist die Antwort wieder ‘nein’: In Beispiel 4 haben wir gezeigt, dass das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) = 2\sqrt{|y(t)|} & (t \in \mathbb{R}) \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad (386)$$

sogar unendlich viele Lösungen besitzt. Lösungen sind also nicht eindeutig. Wie wir aber in Satz 75 schon gesehen haben, können wir unter einer globalen Lipschitzbedingung Eindeutigkeit erreichen. Es geht sogar noch besser:

Satz 79. EINDEUTIGKEITSSATZ. Es erfülle $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^n)$ eine lokale Lipschitzbedingung, sei $t_0 \in I$ und $y_0 \in G$. Seien $I_1, I_2 \subset I$ Teilintervalle mit $t_0 \in I_1 \cap I_2$ und $y_j \in C^1(I_j; G)$ ($j = 1, 2$) Lösungen von

$$\begin{cases} y'_j(t) = f(t, y_j(t)) & (t \in I_j) \\ y_j(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (j = 1, 2). \quad (387)$$

Dann gilt $y_1|_{I_1 \cap I_2} = y_2|_{I_1 \cap I_2}$.

Ein Supersatz zu Frage 2 und 3. Die lokale Lipschitzbedingung ist relevant sowohl bei unserem Existenzsatz als auch bei unserem Eindeutigkeitsatz. Wir können beide Sätze kombinieren und erhalten mit etwas Arbeit die Existenz einer eindeutigen sogenannten *maximalen Lösung*.

Definition 80. MAXIMALE LÖSUNG. Es seien $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^n)$, $t_0 \in I$ und $y_0 \in G$. Eine Funktion $y \in C^1(\hat{I}; G)$ ($\hat{I} \subset I, t_0 \in \hat{I}$) heißt *maximale Lösung* von

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (388)$$

falls y auf \hat{I} eine Lösung ist und für alle weiteren Lösungen $z \in C^1(J; G)$ von

$$\begin{cases} z'(t) = f(t, z(t)) & (t \in J) \\ z(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (389)$$

gilt, dass $J \subset \hat{I}$ und $y|_J = z$.

In Worten: Falls eine maximale Lösung existiert, so ist jede weitere Lösung eine Einschränkung der maximalen Lösung.

Mit diesem Konzept formulieren wir nun den wohl zentralsten Satz der Vorlesung.

Satz 81. SATZ VON PICARD-LINDELÖF II - LOKALE VERSION. Es erfülle $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^n)$ eine lokale Lipschitzbedingung, sei $t_0 \in I$ und $y_0 \in G$. Dann gibt es eine eindeutige maximale Lösung $y \in C^1(\hat{I}; G)$, ($\hat{I} \subset I, t_0 \in \hat{I}$) von

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (390)$$

In Abschnitt 2.2 soll es darum gehen, zu verstehen, wie groß diese maximale Lösung sein muss, d.h. was bei einem Randpunkt von \hat{I} *schiefgehen* muss, damit die Lösung aufhört zu existieren.

2.1.2 Lipschitz-Bedingungen

Der folgende Abschnitt soll die oben aufgetauchten *Lipschitz-Bedingungen* ein wenig plastischer machen.

Zur lokalen Lipschitzbedingung. Zuerst zeigen wir ein Kriterium, mit dem sich die lokale Lipschitzbedingung überprüfen lässt.

Funktion	Lok. Lip-bed.?	Glob. Lip-bed.?	Beschränkt?
$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(\tau, z) = z^2$	✓	×	×
$f : \mathbb{R} \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(\tau, z) = \sin \frac{1}{z}$	✓	×	✓
$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(\tau, z) = 2\sqrt{ z }$	×	×	×
$f : \mathbb{R} \times (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(\tau, z) = 2\sqrt{ z }$	✓	✓	×

Tabelle 1: Eine Zusammenfassung von Übungsaufgabe 2 Blatt 6.

Proposition 82. Es sei $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^n)$ so, dass für alle $\tau \in I$ die Abbildung $f^{(\tau)} : G \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f^{(\tau)}(z) := f(\tau, z)$ differenzierbar ist. Ferner sei die Abbildung $(\tau, z) \mapsto D_z f^{(\tau)}(z) [= D_z f(\tau, z)]$ stetig auf $I \times G$. Dann erfüllt f eine lokale Lipschitzbedingung auf I .

Beweis. Sei $(\tau_0, z_0) \in I \times G$. Wähle $\varepsilon > 0$, $r > 0$ mit $[\tau_0 - \varepsilon, \tau_0 + \varepsilon] \subset I$ und $\overline{B_r(z_0)} \subset G$ (solche r, ε existieren wegen der Offenheit von I und G). Da $[\tau_0 - \varepsilon, \tau_0 + \varepsilon] \times \overline{B_r(z_0)}$ kompakt ist und für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$ die Abbildung $(\tau, z) \mapsto |\partial_{z_j} f_i(\tau, z)|$ stetig ist, gilt nach dem Satz von Weierstraß

$$\tilde{L} := \max_{i,j=1,\dots,n} \max_{(\tau,z) \in [\tau_0-\varepsilon, \tau_0+\varepsilon] \times \overline{B_r(z_0)}} |\partial_{z_j} f_i(\tau, z)| < \infty. \quad (391)$$

Nun sei $\tau \in [\tau_0 - \varepsilon, \tau_0 + \varepsilon]$ und $z_1, z_2 \in \overline{B_r(z_0)}$ fix. Definiere für $i \in \{1, \dots, n\}$ die Hilfsfunktion $h_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $h_i(\lambda) := f_i(\tau, z_1 + \lambda(z_2 - z_1))$. Nun gilt

$$|f_i(\tau, z_2) - f_i(\tau, z_1)| = |h_i(1) - h_i(0)| = \left| \int_0^1 h_i'(\lambda) \, d\lambda \right| \quad (392)$$

$$= \left| \int_0^1 \frac{d}{d\lambda} [f_i(\tau, z_1 + \lambda(z_2 - z_1))] \, d\lambda \right| \quad (393)$$

$$\stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \left| \int_0^1 D_z f_i(\tau, z_1 + \lambda(z_2 - z_1)) \cdot (z_2 - z_1) \, d\lambda \right| \quad (394)$$

$$\stackrel{\Delta\text{-Üngl.}}{\leq} \int_0^1 |D_z f_i(\tau, z_1 + \lambda(z_2 - z_1)) \cdot (z_2 - z_1)| \, d\lambda \quad (395)$$

$$\stackrel{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \int_0^1 |D_z f_i(\tau, z_1 + \lambda(z_2 - z_1))| |z_2 - z_1| \, d\lambda. \quad (396)$$

Beachte nun, dass $z_1, z_2 \in \overline{B_r(z_0)}$ impliziert, dass für alle $\lambda \in [0, 1]$ gilt $z_1 + \lambda(z_2 - z_1) = \lambda z_2 + (1 - \lambda)z_1 \in \overline{B_r(z_0)}$. Wir folgern für alle $\lambda \in [0, 1]$

$$|D_z f_i(\tau, z_1 + \lambda(z_2 - z_1))| = \sqrt{\sum_{j=1}^n |\partial_{z_j} f_i(\tau, z_1 + \lambda(z_2 - z_1))|^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^n \tilde{L}^2} = \tilde{L}\sqrt{n}. \quad (397)$$

Mit (396) gilt

$$|f_i(\tau, z_2) - f_i(\tau, z_1)| \leq \int_0^1 \tilde{L}\sqrt{n}|z_2 - z_1| d\lambda = \tilde{L}\sqrt{n}|z_2 - z_1| \quad (398)$$

und somit

$$|f(\tau, z_2) - f(\tau, z_1)| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |f_i(\tau, z_2) - f_i(\tau, z_1)|^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \tilde{L}^2 n |z_2 - z_1|^2} = n\tilde{L}|z_2 - z_1|. \quad (399)$$

Die Behauptung folgt mit $L := n\tilde{L}$.

Wir zeigen nun, dass die lokale Lipschitzbedingung nicht nur eine Lipschitzabschätzung auf kleinen Bällen, sondern auch auf beliebigen Kompakta liefert.

Proposition 83. Es erfülle $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^n)$ eine lokale Lipschitzbedingung. Es sei nun $A \subset I$ kompakt und $K \subset G$ kompakt. Dann gibt es $L^* > 0$ (abhängig von A und K) mit

$$|f(\tau, z_2) - f(\tau, z_1)| \leq L^*|z_2 - z_1| \quad \forall \tau \in A, \forall z_1, z_2 \in K. \quad (400)$$

Beweis. Seien A und K wie in der Aussage. Angenommen es gibt kein $L^* > 0$ für welches (400) erfüllt ist. Dann gibt es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $\tau^{(k)} \in A$, $z_1^{(k)}, z_2^{(k)} \in K$ so, dass

$$|f(\tau^{(k)}, z_2^{(k)}) - f(\tau^{(k)}, z_1^{(k)})| > k|z_2^{(k)} - z_1^{(k)}|. \quad (401)$$

Daraus folgt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$|z_2^{(k)} - z_1^{(k)}| \leq \frac{1}{k} |f(\tau^{(k)}, z_2^{(k)}) - f(\tau^{(k)}, z_1^{(k)})| \stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \frac{1}{k} (|f(\tau^{(k)}, z_2^{(k)})| + |f(\tau^{(k)}, z_1^{(k)})|) \quad (402)$$

Beachte, dass (wegen der Kompaktheit von $A \times K$) gilt, dass $M := \max_{(\tau, z) \in A \times K} |f(\tau, z)| < \infty$ (Satz von Weierstraß). Man folgert

$$|z_2^{(k)} - z_1^{(k)}| \stackrel{(402)}{\leq} \frac{2M}{k} \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (403)$$

Wegen der Kompaktheit von K hat $(z_1^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ nun eine konvergente Teilfolge $(z_1^{(l_k)})_{k \in \mathbb{N}}$. (Beachte insbesondere $l_k \rightarrow \infty$ für $k \rightarrow \infty$). Sei etwa $z_0 \in K$ der Grenzwert dieser Teilfolge. Beachte

$$|z_2^{(l_k)} - z_0| \leq |z_2^{(l_k)} - z_1^{(l_k)}| + |z_1^{(l_k)} - z_0| \stackrel{(403)}{\leq} \frac{2M}{l_k} + \underbrace{|z_1^{(l_k)} - z_0|}_{\rightarrow 0, \text{ da } z_1^{(l_k)} \rightarrow z_0} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 + 0 = 0. \quad (404)$$

Somit gilt auch $z_2^{(l_k)} \rightarrow z_0$. Nun konvergiert wegen der Kompaktheit von A auch eine Teilfolge von $(\tau^{(l_k)})_{k \in \mathbb{N}}$, etwa konvergiere $(\tau^{(\tilde{l}_k)})_{k \in \mathbb{N}}$ gegen ein $\tau_0 \in A$. Nun gilt $(\tau_0, z_0) \in A \times K \subset I \times G$ und daher gibt es $\varepsilon > 0$ und $r > 0$ und $L > 0$ so, dass

$$|f(\tau, z_2) - f(\tau, z_1)| \leq L|z_2 - z_1| \quad \forall \tau \in (\tau_0 - \varepsilon, \tau_0 + \varepsilon), \quad z_1, z_2 \in B_r(z_0). \quad (405)$$

Wegen den oben genannten Konvergenzen gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$ so, dass

$$|\tau^{(\tilde{l}_k)} - \tau_0| < \varepsilon, \quad |z_1^{(\tilde{l}_k)} - z_0| < r, \quad |z_2^{(\tilde{l}_k)} - z_0| < r \quad \forall k \geq k_0. \quad (406)$$

Daher gilt für $k \geq k_0$, dass $\tau^{(\tilde{l}_k)} \in (\tau_0 - \varepsilon, \tau_0 + \varepsilon)$, $z_1^{(\tilde{l}_k)}, z_2^{(\tilde{l}_k)} \in B_r(z_0)$. Somit impliziert (405)

$$|f(\tau^{(\tilde{l}_k)}, z_2^{(\tilde{l}_k)}) - f(\tau^{(\tilde{l}_k)}, z_1^{(\tilde{l}_k)})| \leq L|z_2^{(\tilde{l}_k)} - z_1^{(\tilde{l}_k)}|. \quad (407)$$

Damit und mit (401) folgern wir

$$\tilde{l}_k |z_2^{(\tilde{l}_k)} - z_1^{(\tilde{l}_k)}| < |f(\tau^{(\tilde{l}_k)}, z_2^{(\tilde{l}_k)}) - f(\tau^{(\tilde{l}_k)}, z_1^{(\tilde{l}_k)})| \leq L|z_2^{(\tilde{l}_k)} - z_1^{(\tilde{l}_k)}| \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (408)$$

Subtrahieren wir die rechte Seite von der linken Seite erhalten wir

$$(\tilde{l}_k - L)|z_2^{(\tilde{l}_k)} - z_1^{(\tilde{l}_k)}| < 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (409)$$

Dies gilt nur wenn $\tilde{l}_k - L < 0$ d.h. $\tilde{l}_k < L$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Da aber \tilde{l}_k eine Teilfolge ist muss $\tilde{l}_k \rightarrow \infty$ gelten. Ein Widerspruch.

Zur globalen Lipschitzbedingung. Wir haben die globale Lipschitzbedingung in Definition 74 für Funktionen $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^n)$, definiert auf einem beliebigen Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$ betrachtet. Für den Satz von Picard-Lindelöf musste aber $f \in C^0(I \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, d.h. $G = \mathbb{R}^n$ gelten. Spannenderweise kann man $G = \mathbb{R}^n$ immer durch Wahl einer *Fortsetzung* erreichen, (jedenfalls wenn G beschränkt ist).

Satz 84. SATZ VON KIRSZBRAUN-VALENTINE. Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt sowie $I \subset \mathbb{R}$ offen. Es sei $m \in \mathbb{N}$ und $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^m)$ erfülle

$$|f(\tau, z_2) - f(\tau, z_1)| \leq L|z_2 - z_1| \quad \forall \tau \in I, \quad \forall z_1, z_2 \in G. \quad (410)$$

Dann gibt es $F \in C^0(I \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ mit $F|_{I \times G} = f$ und

$$|F(\tau, z_2) - F(\tau, z_1)| \leq \sqrt{m}L|z_2 - z_1| \quad \forall \tau \in I, \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{R}^n. \quad (411)$$

Beweis. Wir zeigen nur den Fall $m = 1$. Der Fall $m > 1$ ist eine Folgerung und Gegenstand von Übung 3 auf Blatt 7. Es sei $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^1)$ wie in der Aussage. Für $(\tau, z) \in I \times \mathbb{R}^n$ setze

$$F(\tau, z) := \inf_{w \in G} \{f(\tau, w) + L|w - z|\} \quad (412)$$

Wir zeigen, dass F eine Funktion in $C^0(I \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ definiert, die das Gewünschte leistet.

Schritt 1. F ist reellwertig, d.h. das Infimum in (412) ist nie $-\infty$. Dies werden Sie in Übung 3 auf Blatt 7 zeigen.

Schritt 2. $F|_{I \times G} = f$. Sei etwa $(\tau, z) \in I \times G$. $\mathbb{Z} : F(\tau, z) = f(\tau, z)$. Nun gilt zunächst

$$F(\tau, z) = \inf_{w \in G} \{f(\tau, w) + L|w - z|\} \stackrel{\leq}{=}_{w=z \in G} f(\tau, z) + L|z - z| = f(\tau, z). \quad (413)$$

Für die umgekehrte Ungleichung rechnen für ein beliebiges $w \in G$

$$f(\tau, w) + L|w - z| = f(\tau, w) - f(\tau, z) + L|w - z| + f(\tau, z) \quad (414)$$

$$\geq -|f(\tau, w) - f(\tau, z)| + L|w - z| + f(\tau, z) \quad (415)$$

$$\stackrel{(570)}{\geq} -L|w - z| + L|w - z| + f(\tau, z) = f(\tau, z). \quad (416)$$

Nehmen wir nun in dieser Ungleichung das Infimum über alle $w \in G$ so folgt

$$F(\tau, z) = \inf_{w \in G} \{f(\tau, w) + L|w - z|\} = f(\tau, z). \quad (417)$$

Zusammen mit (413) folgt die Behauptung.

Schritt 3. Wir zeigen die Lipschitzabschätzung (571) (im Spezialfall $m = 1$). Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^n$ und sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Nun gibt es ein $w_\varepsilon \in G$ mit

$$f(t, w_\varepsilon) + L|w_\varepsilon - z_2| \leq \inf_{w \in G} \{f(\tau, w) + L|w - z|\} + \varepsilon = F(t, z_2) + \varepsilon. \quad (418)$$

Damit gilt

$$F(\tau, z_1) - F(\tau, z_2) \stackrel{(418)}{\leq} F(\tau, z_1) - (f(\tau, w_\varepsilon) + L|w_\varepsilon - z_2|) + \varepsilon \quad (419)$$

$$\stackrel{(412)}{\leq} [f(\tau, w_\varepsilon) + L|w_\varepsilon - z_1|] - f(\tau, w_\varepsilon) - L|w_\varepsilon - z_2| + \varepsilon \quad (420)$$

$$= (L|w_\varepsilon - z_1| - L|w_\varepsilon - z_2|) + \varepsilon \leq L(|w_\varepsilon - z_1| - |w_\varepsilon - z_2|) + \varepsilon \quad (421)$$

$$= L(|w_\varepsilon - z_2 + z_2 - z_1| - |w_\varepsilon - z_2|) + \varepsilon \quad (422)$$

$$\stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} L(|w_\varepsilon - z_2| + |z_2 - z_1| - |w_\varepsilon - z_2|) + \varepsilon = L|z_2 - z_1| + \varepsilon. \quad (423)$$

Lässt man auf der linken und rechten Seite $\varepsilon \rightarrow 0+$ gehen, so folgt

$$F(\tau, z_1) - F(\tau, z_2) \leq L|z_2 - z_1|. \quad (424)$$

Vertauscht man die Rollen von z_1, z_2 so zeigt man analog

$$F(\tau, z_2) - F(\tau, z_1) \leq L|z_2 - z_1| \quad (425)$$

und folgert dann zusammen mit (423)

$$|F(\tau, z_2) - F(\tau, z_1)| \leq L|z_2 - z_1|. \quad (426)$$

Schritt 4. Wir zeigen $F \in C^0(I \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$. **Schritt 4a.** Wir zeigen zuerst Stetigkeit nur in der ersten Variablen. Sei dazu $(\tau_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset I$ eine Folge mit $\tau_j \rightarrow \tau$ und sei $z \in \mathbb{R}^n$ fix. Für fest vorgegebenes $\varepsilon > 0$ gibt es (nach (412)) ein $w \in G$ mit

$$f(\tau, w) + L|w - z| \leq F(\tau, z) + \varepsilon. \quad (427)$$

Dann gilt

$$F(\tau_j, z) - F(\tau, z) \stackrel{(427)}{\leq} F(\tau_j, z) - (f(\tau, w) + L|w - z|) + \varepsilon \quad (428)$$

$$\stackrel{(412)}{\leq} [f(\tau_j, w) + L|w - z|] - (f(\tau, w) + L|w - z|) + \varepsilon \quad (429)$$

$$= f(\tau_j, w) - f(\tau, w) + \varepsilon. \quad (430)$$

Aus der Stetigkeit von f folgt $f(\tau_j, w) \rightarrow f(\tau, w)$ mit $j \rightarrow \infty$. Daher

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} (F(\tau_j, z) - F(\tau, z)) \leq \varepsilon. \quad \Rightarrow_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \limsup_{j \rightarrow \infty} (F(\tau_j, z) - F(\tau, z)) \leq 0. \quad (431)$$

Wir zeigen nun auch $\limsup_{j \rightarrow \infty} (F(\tau, z) - F(\tau_j, z)) \leq 0$. Man kann zunächst eine Teilfolge $(\tilde{\tau}_j)_{j \in \mathbb{N}}$ von $(\tau_j)_{j \in \mathbb{N}}$ wählen, so, dass

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} (F(\tau, z) - F(\tau_j, z)) = \lim_{j \rightarrow \infty} (F(\tau, z) - F(\tilde{\tau}_j, z)). \quad (432)$$

Wähle nun zuerst für festes $\varepsilon > 0$ und für alle $j \in \mathbb{N}$ ein $w_j \in G$ mit

$$f(\tilde{\tau}_j, w_j) + L|w_j - z| \leq F(\tilde{\tau}_j, z) + \varepsilon. \quad (433)$$

Nun ist die Folge $(w_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset G$ beschränkt (weil G beschränkt ist) und daher besitzt sie (nach Bolzano-Weierstraß) eine konvergente Teilfolge. Etwa gelte $w_{j_k} \rightarrow w_0$ für ein $w_0 \in \mathbb{R}^n$ (welches nicht zwingend in G liegen muss). Wir berechnen

$$F(\tau, z) - F(\tilde{\tau}_{j_k}, z) \stackrel{(433)}{\leq} F(\tau, z) - (f(\tilde{\tau}_{j_k}, w_{j_k}) + L|w_{j_k} - z|) + \varepsilon \quad (434)$$

$$\stackrel{(412)}{\leq} [f(\tau, w_{j_k}) + L|w_{j_k} - z|] - (f(\tilde{\tau}_{j_k}, w_{j_k}) + L|w_{j_k} - z|) + \varepsilon \quad (435)$$

$$= f(\tau, w_{j_k}) - f(\tilde{\tau}_{j_k}, w_{j_k}) + \varepsilon. \quad (436)$$

Würde w_{j_k} gegen ein Element von G konvergieren, könnten wir zum Grenzwert übergehen und wären fertig. Wie aber oben schon gesagt liegt w_0 nicht zwingend in G . Fixiere nun ein $l \in \mathbb{N}$ beliebig und schreibe

$$F(\tau, z) - F(\tilde{\tau}_{j_k}, z) \leq f(\tau, w_{j_k}) - f(\tilde{\tau}_{j_k}, w_{j_k}) + \varepsilon \quad (437)$$

$$\leq [f(\tau, w_{j_k}) - f(\tau, w_{j_l})] + [f(\tau, w_{j_l}) - f(\tilde{\tau}_{j_k}, w_{j_l})] + [f(\tilde{\tau}_{j_k}, w_{j_l}) - f(\tilde{\tau}_{j_k}, w_{j_k})] + \varepsilon. \quad (438)$$

Wegen (570) gilt $f(\tau, w_{j_k}) - f(\tau, w_{j_l}) \leq L|w_{j_k} - w_{j_l}|$ und $f(\tilde{\tau}_{j_k}, w_{j_l}) - f(\tilde{\tau}_{j_k}, w_{j_k}) \leq L|w_{j_k} - w_{j_l}|$. Wir erhalten

$$F(\tau, z) - F(\tilde{\tau}_{j_k}, z) \leq 2L|w_{j_k} - w_{j_l}| + [f(\tau, w_{j_l}) - f(\tilde{\tau}_{j_k}, w_{j_l})] + \varepsilon. \quad (439)$$

Wir lassen nun $k \rightarrow \infty$ gehen. Da $l \in \mathbb{N}$ fixiert ist gilt $f(\tau, w_{j_l}) - f(\tilde{\tau}_{j_k}, w_{j_l}) \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$ (denn f ist stetig und $(\tilde{\tau}_{j_k})_{k \in \mathbb{N}}$ strebt als Teilfolge von $(\tau_j)_{j \in \mathbb{N}}$ gegen τ). Wir folgern

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} (F(\tau, z) - F(\tau_j, z)) \stackrel{(433)}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} (F(\tau, z) - F(\tilde{\tau}_{j_k}, z)) \stackrel{(439)}{\leq} 2L|w_0 - w_{j_l}| + \varepsilon. \quad (440)$$

Jetzt lassen wir $l \rightarrow \infty$ gehen und schließen (da $w_{j_l} \rightarrow w_0$)

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} (F(\tau, z) - F(\tau_j, z)) \leq \varepsilon. \quad \Rightarrow_{\varepsilon \rightarrow 0+} \limsup_{j \rightarrow \infty} (F(\tau, z) - F(\tau_j, z)) \leq 0. \quad (441)$$

Nun haben wir

$$0 \geq \limsup_{j \rightarrow \infty} (F(\tau, z) - F(\tau_j, z)) \geq \liminf_{j \rightarrow \infty} (F(\tau, z) - F(\tau_j, z)) \quad (442)$$

$$\geq \liminf_{j \rightarrow \infty} -(F(\tau_j, z) - F(\tau, z)) \geq -\limsup_{j \rightarrow \infty} (F(\tau_j, z) - F(\tau, z)) \stackrel{(431)}{\geq} 0. \quad (443)$$

Es folgt $\limsup_{j \rightarrow \infty} (F(\tau, z) - F(\tau_j, z)) = \liminf_{j \rightarrow \infty} (F(\tau, z) - F(\tau_j, z)) = 0$ und daher gilt $\lim_{j \rightarrow \infty} (F(\tau, z) - F(\tau_j, z)) = 0$. Somit folgt die Stetigkeit in der ersten Variablen.

Schritt 4b. Nun zur Stetigkeit in beiden Variablen. Sei $((\tau_j, z_j))_{j \in \mathbb{N}} \subset I \times G$ mit $(\tau_j, z_j) \rightarrow (\tau, z)$ in $I \times G$ (d.h. $\tau_j \rightarrow \tau, z_j \rightarrow z$). Dann gilt

$$F(\tau_j, z_j) - F(\tau, z) = [F(\tau_j, z_j) - F(\tau_j, z)] + [F(\tau_j, z) - F(\tau, z)]. \quad (444)$$

Wir wissen bereits nach Schritt 4a, dass $F(\tau_j, z) - F(\tau, z) \rightarrow 0$ mit $j \rightarrow \infty$. Nach Schritt 3 gilt auch

$$|F(\tau_j, z_j) - F(\tau_j, z)| \leq L|z_j - z| \rightarrow 0 \quad (j \rightarrow \infty). \quad (445)$$

Nun gilt also

$$F(\tau_j, z_j) - F(\tau, z) = \underbrace{[F(\tau_j, z_j) - F(\tau_j, z)]}_{\rightarrow 0} + \underbrace{[F(\tau_j, z) - F(\tau, z)]}_{\rightarrow 0} \rightarrow 0 \quad (j \rightarrow \infty). \quad (446)$$

Dies zeigt nun auch die Stetigkeit in beiden Variablen.

2.1.3 Anfangswertprobleme als Fixpunktgleichung

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns damit, wie wir Anfangswertprobleme als Fixpunktgleichungen auffassen können. Fixpunktgleichungen haben wir schon in der Analysis mit dem *Banach'schen Fixpunktsatz* studieren können, den wir hier auch wiederholen werden.

Proposition 85. Es sei $I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall und $f \in C^0(I \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ sowie $t_0 \in I$ und

$y_0 \in \mathbb{R}^n$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent

(1) $y \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$ ist Lösung von

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & (t \in I) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (447)$$

(2) $y \in C^0(I; \mathbb{R}^n)$ erfüllt

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) \, ds \quad \forall t \in I. \quad (448)$$

Beweis. Zu '(1) \Rightarrow (2)'. Es sei $y \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$ wie in (1). Dann gilt für $t \in I$

$$y(t) = y(t) - y(t_0) + y(t_0) = \int_{t_0}^t y'(s) \, ds + y(t_0) \stackrel{(447)}{=} \int_{t_0}^t f(s, y(s)) \, ds + y_0. \quad (449)$$

Zu '(2) \Rightarrow (1)'. Es gelte (448) für ein $y \in C^0(I; \mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$y(t_0) = y_0 + \int_{t_0}^{t_0} f(s, y(s)) \, ds = y_0. \quad (450)$$

Wir zeigen jetzt, dass $y \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$. Beachte: $s \mapsto f(s, y(s))$ ist stetig auf I , da f und y stetig sind. Mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist dann die Abbildung

$$h : I \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad h : t \mapsto \int_{t_0}^t f(s, y(s)) \, ds \quad (451)$$

stetig differenzierbar auf I und ihre Ableitung ist gegeben durch $h'(t) = f(t, y(t))$, ($t \in I$). Nun gilt mit (448) $y(t) = y_0 + h(t)$. Es folgt, dass $y \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$ und

$$y'(t) = h'(t) = f(t, y(t)) \quad \forall t \in I. \quad (452)$$

Somit ist gezeigt, dass $y \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$ (447) erfüllt.

Definition 86. PICARD'SCHE ITERIERTE. Es sei $f \in C^0(I \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ und $t_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Wir definieren für $u \in C^0(I; \mathbb{R}^n)$ die *Picard'sche Iterierte* $T[u] \in C^0(I; \mathbb{R}^n)$ durch

$$(T[u])(t) := y_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) \, ds \quad \forall t \in I. \quad (453)$$

Dies definiert dann eine Abbildung $T : C^0(I; \mathbb{R}^n) \rightarrow C^0(I; \mathbb{R}^n)$, $T : u \mapsto T[u]$.

Methode 87. Es sei $T : C^0(I; \mathbb{R}^n) \rightarrow C^0(I; \mathbb{R}^n)$ wie in Definition 86. Aus Proposition 85 folgt, dass

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & (t \in I) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \Leftrightarrow T[y] = y \quad \text{in } C^0(I; \mathbb{R}^n). \quad (454)$$

Wir haben also ein Anfangswertproblem auf ein *Fixpunktproblem* reduziert.

Wir wiederholen nun einen Satz aus der Analysis-Vorlesung, mit dem wir bereits Existenz und sogar Eindeutigkeit von Fixpunkten gezeigt haben.

Wiederholung 88. BANACH'SCHER FIXPUNKTSATZ. Es sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $T : X \rightarrow X$ eine *strikte Kontraktionsabbildung*, d.h. $\exists q \in [0, 1)$ mit $d(T[u], T[v]) \leq qd(u, v)$ für alle $u, v \in X$. Dann gibt es ein eindeutiges $u_0 \in X$ mit $T[u_0] = u_0$.

Algorithmus zum Finden des Fixpunktes. Wähle $u \in X$ beliebig und definiere für alle $k \in \mathbb{N}$ die *Iteration* $v_k := T^k[u] := \underbrace{(T \circ \dots \circ T)}_{k\text{-mal}}[u]$. Dann gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} v_k = u_0$.

Wir benötigen hier sogar eine leichte Verschärfung.

Korollar 89. BANACH'SCHER FIXPUNKTSATZ – VERSCHÄRFUNG. Es sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $T : X \rightarrow X$ eine Abbildung so, dass für ein $n_0 \in \mathbb{N}$ die Abbildung T^{n_0} eine strikte Kontraktionsabbildung ist (d.h. $\exists q \in [0, 1)$ so, dass $d(T^{n_0}[u], T^{n_0}[v]) \leq qd(u, v)$ für alle $u, v \in X$). Dann gibt es ein eindeutiges $u_0 \in X$ mit $T[u_0] = u_0$.

Beweis.

Existenz eines Fixpunktes. Nach dem Banach'schen Fixpunktsatz gibt es ein eindeutiges $\tilde{u}_0 \in X$ mit $T^{n_0}[\tilde{u}_0] = \tilde{u}_0$. Es sei $u_1 := T[\tilde{u}_0]$. Wir zeigen $u_1 = \tilde{u}_0$. Dazu berechnen wir

$$T^{n_0}[u_1] = T^{n_0}[T[\tilde{u}_0]] = T^{n_0+1}[\tilde{u}_0] = T(T^{n_0}[\tilde{u}_0]) = T[\tilde{u}_0] = u_1 \quad (455)$$

Somit ist auch u_1 ein Fixpunkt von T^{n_0} . Aus der Eindeutigkeit des Fixpunktes von T^{n_0} folgt $u_1 = \tilde{u}_0$, d.h. $T[\tilde{u}_0] = \tilde{u}_0$.

Eindeutigkeit des Fixpunktes. Wir haben nun bereits einen Fixpunkt $\tilde{u}_0 \in X$. Gäbe es einen weiteren Fixpunkt $u_0 \in X$ von T (d.h. $T[u_0] = u_0$) so wäre

$$T^{n_0}[u_0] = T^{n_0-1}[T u_0] = T^{n_0-1}[u_0] = \dots = T^1[u_0] = u_0. \quad (456)$$

Also ist u_0 auch Fixpunkt von T^{n_0} . Da es aber nur einen Fixpunkt von T^{n_0} geben kann, folgt $u_0 = \tilde{u}_0$.

Um diesen Satz anwenden zu können brauchen wir vor allem einen vollständigen metrischen Raum X und eine strikte Kontraktionsabbildung darauf. Mit Methode 87 ist hier nicht alles getan: Man würde vielleicht am liebsten $X = C^0(I; \mathbb{R}^n)$ und $T : X \rightarrow X$ wie in Definition 86 wählen. Dabei gäbe es aber Probleme mit der Vollständigkeit von X (bzgl. welcher Metrik überhaupt!?) und Kontraktivität. Daher wählen wir ein leicht anderes Setup.

Definition 90. DER RAUM $C_b^0(I; \mathbb{R}^n)$. Es sei $I \subset \mathbb{R}^n$ ein (hier ausnahmsweise nicht zwingend offenes) Intervall. Definiere

$$C_b^0(I; \mathbb{R}^n) := \{u \in C^0(I; \mathbb{R}^n) : u \text{ beschränkt auf } I\}. \quad (457)$$

Für $u, v \in C_b^0(I; \mathbb{R}^n)$ definieren wir auch den *Supremumsabstand*

$$d_\infty(u, v) := d_\infty^{(I)}(u, v) := \sup_{t \in I} |u(t) - v(t)|. \quad (458)$$

Man beachte: Da $\sup_{t \in I} |u(t)| < \infty$ für alle $u \in C_b^0(I; \mathbb{R}^n)$ gilt $d_\infty(u, v) \in \mathbb{R}$ für alle $u, v \in C_b^0(I; \mathbb{R}^n)$. Insbesondere ist der Ausdruck in (458) wohldefiniert.

Anmerkung 91. Die Konvergenz in $(C_b^0(I; \mathbb{R}^n); d_\infty)$ bezüglich d_∞ ist gerade die gleichmäßige Konvergenz auf I . Dazu:

$$u_j \longrightarrow u \quad \text{in } (C_b^0(I; \mathbb{R}^n), d_\infty) \quad (j \rightarrow \infty). \quad (459)$$

$$\Leftrightarrow d_\infty(u_j, u) \rightarrow 0 \quad (j \rightarrow \infty). \quad (460)$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \quad d_\infty(u_j, u) \leq \varepsilon \quad \forall j \geq n_0(\varepsilon). \quad (461)$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \quad \sup_{x \in I} |u_j(x) - u(x)| \leq \varepsilon \quad \forall j \geq n_0(\varepsilon). \quad (462)$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \quad |u_j(x) - u(x)| \leq \varepsilon \quad \forall j \geq n_0(\varepsilon) \quad \forall x \in I. \quad (463)$$

$$\Leftrightarrow u_j \longrightarrow u \quad \text{gleichmäßig auf } I \quad (j \rightarrow \infty). \quad (464)$$

Proposition 92. Das Paar $(C_b^0(I; \mathbb{R}^n), d_\infty)$ definiert einen vollständigen metrischen Raum.

Beweis. Schritt 1. $(C_b^0(I; \mathbb{R}^n), d_\infty)$ ist ein metrischer Raum. Symmetrie und Definitheit überlasse ich Ihnen. Zur Dreiecksungleichung. Seien $u, v, w \in C_b^0(I; \mathbb{R}^n)$. Dann gilt für $t \in I$

$$|u(t) - v(t)| = |u(t) - w(t) + w(t) - v(t)| \leq \underbrace{|u(t) - w(t)|}_{\leq \sup_{x \in I} |u(x) - w(x)|} + \underbrace{|w(t) - v(t)|}_{\leq \sup_{x \in I} |w(x) - v(x)|} \quad (465)$$

$$\leq \sup_{x \in I} |u(x) - w(x)| + \sup_{x \in I} |w(x) - v(x)| = d_\infty(u, w) + d_\infty(w, v). \quad (466)$$

Nehmen wir auf der linken Seite das Supremum über alle $t \in I$ so erhalten wir

$$d_\infty(u, v) \leq d_\infty(u, w) + d_\infty(w, v). \quad (467)$$

Schritt 2. Zur Vollständigkeit. Es sei $(u_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset C_b^0(I; \mathbb{R}^n)$ eine Cauchy-Folge bezüglich d_∞ . \underline{Z} : $\exists u \in C_b^0(I; \mathbb{R}^n) : d_\infty(u_j, u) \rightarrow 0$. Wegen der Cauchy-Eigenschaft folgt

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \quad d_\infty(u_j, u_m) < \varepsilon \quad \forall j, m \geq n_0(\varepsilon). \quad (468)$$

Sei nun $x \in I$ beliebig. Dann gilt für $j, m \in \mathbb{N}$, dass $|u_j(x) - u_m(x)| \leq d_\infty(u_j, u_m)$. Mit (468) folgt

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \quad |u_j(x) - u_m(x)| < \varepsilon \quad \forall j, m \geq n_0(\varepsilon). \quad (469)$$

Das bedeutet, dass für jedes $x \in I$ die Folge $(u_j(x))_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine Cauchy-Folge in $(\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$ ist. Da $(\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$ vollständig ist, existiert $\lim_{j \rightarrow \infty} u_j(x)$ für alle $x \in I$. Definiere $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ durch $u(x) := \lim_{j \rightarrow \infty} u_j(x)$. Noch \underline{Z} : $u \in C_b^0(I; \mathbb{R}^n)$ und $d_\infty(u_j, u) \rightarrow 0$. Berechne nun

$$\sup_{x \in I} |u_j(x) - u(x)| = \sup_{x \in I} \lim_{m \rightarrow \infty} \underbrace{|u_j(x) - u_m(x)|}_{\leq \sup_{t \in I} |u_j(t) - u_m(t)|} \quad (470)$$

$$\leq \sup_{x \in I} \limsup_{m \rightarrow \infty} d_\infty(u_j, u_m) = \limsup_{m \rightarrow \infty} d_\infty(u_j, u_m) = \limsup_{m \rightarrow \infty, m > j} d_\infty(u_j, u_m). \quad (471)$$

Beachte: Wählt man für $\varepsilon > 0$ nun $n_0(\varepsilon)$ wie in (468), so folgt für alle $j \geq n_0(\varepsilon)$

$$\sup_{x \in I} |u_j(x) - u(x)| \leq \limsup_{m \rightarrow \infty, m > j} d_\infty(u_j, u_m) \leq \varepsilon. \quad (472)$$

Man folgert, dass $u_j \rightarrow u$ gleichmäßig konvergent ist für $j \rightarrow \infty$. Aus der Analysis 2 folgt dann $u \in C^0(I; \mathbb{R}^n)$, da gleichmäßige Konvergenz die Stetigkeit vererbt. Zur Beschränktheit von u berechnen wir

$$\sup_{x \in I} |u(x)| \stackrel{\Delta\text{-Üngl.}}{\leq} \underbrace{\sup_{x \in I} |u(x) - u_{n_0(1)}(x)|}_{\leq 1, \text{ siehe (472)}} + \underbrace{|u_{n_0(1)}(x)|}_{\leq \sup_{t \in I} |u_{n_0(1)}(t)|} \leq 1 + \sup_{t \in I} |u_{n_0(1)}(t)| < \infty, \quad (473)$$

da $u_{n_0(1)} \in C_b^0(I; \mathbb{R}^n)$. Wir folgern $u \in C_b^0(I; \mathbb{R}^n)$. Nun folgt aus (472), dass

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \quad d_\infty(u_j, u) = \sup_{x \in I} |u_j(x) - u(x)| \leq \varepsilon \quad \forall j \geq n_0(\varepsilon). \quad (474)$$

Mit anderen Worten $d_\infty(u_j, u) \rightarrow 0$ mit $j \rightarrow \infty$.

Zusammengefasst: Wir haben in 87 ein Fixpunktproblem aufgestellt. Statt in $C^0(I; \mathbb{R}^n)$ müssen wir dieses Fixpunktproblem aber aus Vollständigkeitsgründen in $(C_b^0(I; \mathbb{R}^n), d_\infty)$ betrachten. Wichtig für den Fixpunktsatz ist, dass T dann noch eine *Selbstabbildung* ist, d.h. $C_b^0(I; \mathbb{R}^n)$ nach $C_b^0(I; \mathbb{R}^n)$ abbildet.

Proposition 93. ZUR SELBSTABBILDUNGSEIGENSCHAFT. Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f \in C^0(I \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ und $J \subset I$ beschränkt so, dass $\bar{J} \subset I$. Für $u \in C^0(J; \mathbb{R}^n)$

definiere $T[u] \in C^0(J; \mathbb{R}^n)$ durch

$$(T[u])(t) := y_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) \, ds \quad \text{für alle } t \in J. \quad (475)$$

Ist $u \in C_b^0(J; \mathbb{R}^n)$ so gilt auch $T[u] \in C_b^0(J; \mathbb{R}^n)$. Insbesondere ist $T : C_b^0(J; \mathbb{R}^n) \rightarrow C_b^0(J; \mathbb{R}^n)$ eine Selbstabbildung.

Beweis. Sei etwa $J \subset I$ wie in der Aussage und $u \in C_b^0(J; \mathbb{R}^n)$. Von der Stetigkeit von $T[u]$ überzeugt man sich leicht. Nun zur Beschränktheit. Da $u \in C_b^0(J; \mathbb{R}^n)$ gibt es ein $R > 0$ so, dass $u(t) \in \overline{B_R(0)}$ für alle $t \in J$. Nun gilt (wegen der Kompaktheit von $\overline{J} \times \overline{B_R(0)}$)

$$L := \sup_{(\tau, z) \in \overline{J} \times \overline{B_R(0)}} |f(\tau, z)| < \infty. \quad (476)$$

Es folgt für beliebiges $t \in J$

$$|(T[u])(t)| = \left| y_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) \, ds \right| \leq |y_0| + \left| \int_{t_0}^t f(s, u(s)) \, ds \right| \quad (477)$$

$$= |y_0| + \left| \int_{\min(t_0, t)}^{\max(t_0, t)} f(s, u(s)) \, ds \right| \leq |y_0| + \int_{\min(t_0, t)}^{\max(t_0, t)} |f(s, u(s))| \, ds, \quad (478)$$

wobei wir im letzten Schritt die vektorwertige Dreiecksungleichung (Aufgabe 1 auf Blatt 8) verwendet haben. Mit (476) gilt $|f(s, u(s))| \leq L$ für alle $s \in J$ und daher

$$|(T[u])(t)| \leq |y_0| + L(\max(t_0, t) - \min(t_0, t)) = |y_0| + L|t - t_0| = |y_0| + L(b - a). \quad (479)$$

Weil $t \in J$ beliebig war folgt $T[u] \in C_b^0(I; \mathbb{R}^n)$.

Eine Unannehmlichkeit ist hier hinzugekommen: Scheinbar muss hier das Intervall I verkleinert werden zu einem beschränkten Intervall J mit $\overline{J} \subset I$. Diese Unannehmlichkeit werden wir im Folgenden durch *Ausschöpfung* beseitigen.

Proposition 94. AUSSCHÖPFUNG. Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $t_0 \in I$. Dann gibt es eine Folge $(J_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von offenen beschränkten Teilintervallen von I mit $t_0 \in J_k$, $\overline{J}_k \subset I$, $J_k \subset J_{k+1}$ für alle k und

$$I = \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k. \quad (480)$$

Beweis. Übungsblatt 8.

2.1.4 Beweis des (globalen) Satzes von Picard-Lindelöf

Nun können wir endlich den globalen Satz von Picard-Lindelöf beweisen.

Lemma 95. KONTRAKTIONSEIGENSCHAFT - I. Es erfülle $f \in C^0(I \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ eine globale Lipschitzbedingung auf I mit Lipschitzkonstante $L > 0$. Es sei $T : C^0(I; \mathbb{R}^n) \rightarrow C^0(I; \mathbb{R}^n)$ wie in Definition 86. Dann gilt für alle $j \in \mathbb{N}_0$ und $u, v \in C_b^0(I; \mathbb{R}^n)$

$$|(T^j[u])(t) - (T^j[v])(t)| \leq \frac{L^j |t - t_0|^j}{j!} d_\infty^{(I)}(u, v) \quad \forall t \in I. \quad (481)$$

(Wir treffen für diese Aussage die Konvention $T^0[u] := u$ für alle $u \in C_b^0(I; \mathbb{R}^n)$.)

Beweis. Induktion nach $j \in \mathbb{N}_0$. Der Induktionsanfang $j = 0$ ist klar, da in diesem Fall $\frac{L^0 |t - t_0|^0}{0!} = 1$ und

$$|(T^j[u])(t) - (T^j[v])(t)| = |u(t) - v(t)| \leq d_\infty(u, v) = 1 \cdot d_\infty(u, v) = \frac{L^j |t - t_0|^j}{j!} d_\infty(u, v). \quad (482)$$

Nun zum Induktionsschritt $j \rightarrow j + 1$. Es gelte (481) für ein $j \in \mathbb{N}$. Definiere $u_j := T^j[u]$ und $v_j := T^j[v]$. Wir berechnen

$$|(T^{j+1}[u])(t) - (T^{j+1}[v])(t)| = |(T[T^j[u]])(t) - (T[T^j[v]])(t)| = |(T[u_j])(t) - (T[v_j])(t)| \quad (483)$$

$$\stackrel{\text{Definition 86}}{=} \left| y_0 + \int_{t_0}^t f(s, u_j(s)) \, ds - \left(y_0 + \int_{t_0}^t f(s, v_j(s)) \, ds \right) \right| \quad (484)$$

$$= \left| \int_{t_0}^t [f(s, u_j(s)) - f(s, v_j(s))] \, ds \right| = \left| \int_{\min(t_0, t)}^{\max(t_0, t)} [f(s, u_j(s)) - f(s, v_j(s))] \, ds \right| \quad (485)$$

$$\leq \int_{\min(t_0, t)}^{\max(t_0, t)} |f(s, u_j(s)) - f(s, v_j(s))| \, ds \leq \int_{\min(t_0, t)}^{\max(t_0, t)} L |u_j(s) - v_j(s)| \, ds. \quad (486)$$

Mit der Induktionshypothese gilt für alle $s \in [\min(t_0, t), \max(t_0, t)]$

$$|u_j(s) - v_j(s)| = |(T^j[u])(s) - (T^j[v])(s)| \stackrel{\text{Ind.hyp}}{\leq} \frac{L^j |s - t_0|^j}{j!} d_\infty(u, v). \quad (487)$$

Wir folgern mit (486)

$$|(T^{j+1}[u])(t) - (T^{j+1}[v])(t)| \leq \int_{\min(t_0, t)}^{\max(t_0, t)} L \frac{L^j |s - t_0|^j}{j!} \, ds = \frac{L^{j+1}}{j!} \int_{\min(t_0, t)}^{\max(t_0, t)} |s - t_0|^j \, ds \quad (488)$$

Wir berechnen nun das Integral auf der rechten Seite. Falls $t \geq t_0$ so gilt

$$\frac{L^{j+1}}{j!} \int_{\min(t_0, t)}^{\max(t_0, t)} |s - t_0|^j ds = \frac{L^{j+1}}{j!} \int_{t_0}^t (s - t_0)^j ds = \frac{L^{j+1}}{j!} \frac{(t - t_0)^{j+1}}{j+1} = \frac{L^{j+1} |t - t_0|^{j+1}}{(j+1)!} \quad (489)$$

und falls $t < t_0$ so gilt

$$\frac{L^{j+1}}{j!} \int_{\min(t_0, t)}^{\max(t_0, t)} |s - t_0|^j ds = \frac{L^{j+1}}{j!} \int_t^{t_0} (t_0 - s)^j ds = \frac{L^{j+1}}{j!} \frac{(t_0 - t)^{j+1}}{j+1} = \frac{L^{j+1} |t - t_0|^{j+1}}{(j+1)!}. \quad (490)$$

In beiden Fällen hat man also

$$|(T^{j+1}[u])(t) - (T^{j+1}[v])(t)| \leq \frac{L^{j+1} |t - t_0|^{j+1}}{(j+1)!}. \quad (491)$$

Korollar 96. KONTRAKTIONSEIGENSCHAFT - II. Es erfülle $f \in C^0(I \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ eine globale Lipschitzbedingung auf I mit Lipschitzkonstante $L > 0$. Es sei $J = (a, b) \subset I$ beschränkt mit $\bar{J} \subset I$. Es sei $T : C_b^0(J; \mathbb{R}^n) \rightarrow C_b^0(J; \mathbb{R}^n)$ wie in Proposition 93. Dann gilt für alle $u, v \in C_b^0(J; \mathbb{R}^n)$ und $m \in \mathbb{N}$, dass $T^m[u], T^m[v] \in C_b^0(J; \mathbb{R}^n)$ und

$$d_\infty^{(J)}(T^m[u], T^m[v]) \leq \frac{L^m (b-a)^m}{m!} d_\infty^{(J)}(u, v). \quad (492)$$

Insbesondere gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$d_\infty^{(J)}(T^{n_0}[u], T^{n_0}[v]) \leq \frac{1}{2} d_\infty^{(J)}(u, v) \quad \forall u, v \in C_b^0(J; \mathbb{R}^n). \quad (493)$$

Beweis. Dass $T^m[u], T^m[v] \in C_b^0(J; \mathbb{R}^n)$ folgt direkt induktiv aus Proposition 93. Nun gilt mit Lemma 95 (angewandt mit $I = J$), dass für alle $t \in J = (a, b)$

$$|(T^m[u])(t) - (T^m[v])(t)| \leq \frac{L^m |t - t_0|^m}{m!} d_\infty^{(J)}(u, v) \leq \frac{L^m (b-a)^m}{m!} d_\infty^{(J)}(u, v). \quad (494)$$

Nimmt man nun das Supremum über alle $t \in J$ so gilt

$$d_\infty^{(J)}(T^m[u], T^m[v]) \leq \frac{L^m (b-a)^m}{m!} d_\infty^{(J)}(u, v). \quad (495)$$

Damit ist (492) gezeigt. Für (493) genügt es dann zu zeigen, dass es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit $\frac{L^{n_0} (b-a)^{n_0}}{(n_0)!} < \frac{1}{2}$. Beobachte dazu, dass

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{L^m (b-a)^m}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{[L(b-a)]^m}{m!} = e^{L(b-a)}, \quad (496)$$

d.h. die Reihe $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{L^m(b-a)^m}{j!}$ ist konvergent. Nach einem Satz aus der Analysis muss dass $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{L^m(b-a)^m}{m!} = 0$ gelten. Daraus folgt die Existenz von $n_0 \in \mathbb{N}$ wie oben behauptet.

Jetzt können wir den globalen Satz von Picard-Lindelöf zeigen. Wir wiederholen zunächst die Aussage.

Wiederholung Satz 75. SATZ VON PICARD-LINDELÖF I – GLOBALE VERSION. Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f \in C^0(I \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ erfülle eine globale Lipschitzbedingung. Dann hat für alle $t_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{R}^n$ das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & (t \in I) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (497)$$

eine eindeutige Lösung $y \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$.

Beweis (von Satz 75). Nach Proposition 94 gibt es beschränkte Intervalle $J_1 \subset J_2 \subset \dots \subset I$ mit $t_0 \in J_k$, $\overline{J_k} \subset I$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $I = \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k$. Definiere $T_k : C_b^0(J_k; \mathbb{R}^n) \rightarrow C_b^0(J_k; \mathbb{R}^n)$, $u \mapsto T_k[u]$ durch

$$(T_k[u])(t) := y_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) \, ds \quad (t \in J_k). \quad (498)$$

Nach Proposition 93 ist T_k wohldefiniert für alle $k \in \mathbb{N}$ (d.h. wirklich eine Selbstabbildung). Nach Korollar 96 gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $(T_k)^{n_0}$ eine strikte Kontraktionsabbildung im Sinne von Korollar 89 ist. Nach Korollar 89 hat T_k damit für alle $k \in \mathbb{N}$ einen eindeutigen Fixpunkt. Etwa sei $u_k \in C_b^0(J_k; \mathbb{R}^n)$ das eindeutige Element mit $T_k[u_k] = u_k$. **Nun zur Existenz einer Lösung.** Wir werden diese u_k 's nun zu einer Lösung des AWP *zusammenkleben*. Dazu zeigen wir die folgende

Zwischenbehauptung. Für $m \geq k$ gilt $u_m|_{J_k} = u_k$. Wir werden sehen, dass $u_m|_{J_k}$ ein weiterer Fixpunkt von T_k ist. Dazu sei $t \in J_k$ beliebig. Dann gilt (weil J_k ein Intervall ist) auch $[t_0, t] \subset J_m$ und somit

$$T_k[u_m|_{J_k}](t) \stackrel{(498)}{=} y_0 + \int_{t_0}^t f(s, u_m|_{J_k}(s)) \, ds \quad (499)$$

$$= y_0 + \int_{t_0}^t f(s, u_m(s)) \, ds \stackrel{(498)}{=} T_m[u_m](t) = u_m(t) = (u_m|_{J_k})(t). \quad (500)$$

Also ist $u_m|_{J_k}$ ein Fixpunkt von T_k und daher aufgrund der Eindeutigkeit $u_m|_{J_k} = u_k$.

Ende der Zwischenbehauptung.

Nun definiere $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch

$$y(t) := u_{k_t}(t) \quad \text{wobei } k_t := \min\{m \in \mathbb{N} : t \in J_m\}. \quad (501)$$

Beachte, dass dann $y|_{J_l} = u_l$ für alle $l \in \mathbb{N}$ — denn schließlich gilt für ein beliebiges $t \in J_l$, dass $k_t \leq l$ (d.h. auch $J_{k_t} \subset J_l$). Deswegen hat man $y(t) = u_{k_t}(t) \stackrel{\text{Zw.beh.}}{=} (u_l|_{J_{k_t}})(t) = u_l(t)$.

Wir behaupten, dass

(A) $y \in C^0(I; \mathbb{R}^n)$ und

(B) $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) \, ds$ für alle $t \in I$.

Zu (A). Es sei $t \in I$ beliebig. Dann ist $t \in J_l$ für ein $l \in \mathbb{N}$. Da $y|_{J_l} = u_l$ und $u_l \in C^0(J_l; \mathbb{R}^n)$ ist y auf J_l stetig und damit haben wir auch Stetigkeit bei t . **Zu (B).** Es sei $t \in I$, etwa $t \in J_l$ für ein $l \in \mathbb{N}$. Beachte, dass dann auch $[t_0, t] \in J_l$, weil J_l ein Intervall ist. Nun berechnen wir

$$y(t) = (y|_{J_l})(t) \stackrel{y|_{J_l}=u_l}{=} u_l(t) = (T_l[u_l])(t) \stackrel{(498)}{=} y_0 + \int_{t_0}^t f(s, u_l(s)) \, ds \quad (502)$$

$$\stackrel{\frac{[t_0, t] \subset J_l}{y|_{J_l}=u_l}}{=} y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) \, ds. \quad (503)$$

Die Behauptung folgt, da $t \in I$ beliebig war. Nun sind also (A) und (B) gezeigt und damit die Voraussetzungen von Aussage (2) in Proposition 85 erfüllt. Aus Proposition 85 “(2) \Rightarrow (1)” folgt nun, dass y das gegebene Anfangswertproblem löst.

Zur Eindeutigkeit einer Lösung. Angenommen es gäbe eine weitere Lösung $\tilde{y} \neq y$. Das heißt es gibt ein $t_1 \in I$ mit $\tilde{y}(t_1) \neq y(t_1)$. Nun gibt es ein $l \in \mathbb{N}$ mit $t_1 \in J_l$. Da \tilde{y} auf J_l das Anfangswertproblem löst, gilt nach Proposition 85, dass

$$\tilde{y}(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, \tilde{y}(s)) \, ds \quad \forall t \in J_l, \quad \text{d.h.} \quad T_l[\tilde{y}|_{J_l}] = \tilde{y}|_{J_l}. \quad (504)$$

Wir folgern, (aus der Eindeutigkeit des Fixpunktes von T_l), dass $\tilde{y}|_{J_l} = u_l = y|_{J_l}$. Somit wäre aber $\tilde{y}(t_1) = y(t_1)$, ein Widerspruch.

Zum Schluss noch ein Wort zur *numerischen Approximation* von Lösungen.

Definition 97. PICARD-ITERATION. Es sei $f \in C^0(I \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ und $u \in C^0(I; \mathbb{R}^n)$. Es sei $T : C^0(I; \mathbb{R}^n) \rightarrow C^0(I; \mathbb{R}^n)$ wie in Definition 86. Dann heißt die (Funktionen-)Folge $(T^j[u])_{j \in \mathbb{N}}$ die *Picard-Iteration* mit Startwert u .

Methode 98. NUMERISCHE APPROXIMATION. Es erfülle $f \in C^0(I \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ eine globale Lipschitzbedingung. Es sei $y \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$ die (nach Satz 75) eindeutige Lösung von

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & (t \in I) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}. \quad (505)$$

Behauptung. Es sei $J = (a, b) \subset I$ ein beschränktes Intervall mit $\bar{J} \subset I$. Dann konvergiert für ein beliebiges $u \in C^0(I; \mathbb{R}^n)$ die Picard-Iteration $(T^j[u])_{j \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig auf J

gegen y .

Begründung. Beachte zunächst, dass $u, y \in C_b^0(J; \mathbb{R}^n)$, denn u, y sind beide stetig auf dem Kompaktum \bar{J} (und daher beschränkt nach dem Satz von Weierstraß). Wir erinnern uns daran, dass nach Methode 87 $T[y] = y$ und somit auch $T^m[y] = y$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Daher

$$d_\infty^{(J)}(T^m[u], y) = d_\infty^{(J)}(T^m[u], T^m[y]) \stackrel{\text{Korollar 96}}{\leq} \frac{L^m(b-a)^m}{m!} d_\infty^{(J)}(u, y). \quad (506)$$

Somit gilt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{t \in J} |(T^m[u])(t) - y(t)| \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{t \in J} \frac{L^m(b-a)^m}{m!} d_\infty^{(J)}(u, y) = 0, \quad (507)$$

was die gleichmäßige Konvergenz zeigt.

2.1.5 Einige Worte zum Satz von Peano

Wir werden eine Teilaussage zum Satz von Peano beweisen: Wir werden nämlich zeigen, dass es für alle $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^n)$, $t_0 \in I$ und $y_0 \in G$ ein kleines Intervall $(t_0 - a, t_0 + a) \subset I$ gibt, so, dass

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & (t \in (t_0 - a, t_0 + a)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (508)$$

eine Lösung besitzt. Ein solches Resultat nennt man *Kurzzeitexistenz-Resultat*.

Würde man den Satz von Peano komplett beweisen wollen, so müsste man noch argumentieren, dass das Existenzintervall so groß gemacht werden kann, dass die Lösung y eine *nichtfortsetzbare Lösung* ist. Dies sparen wir aber an dieser Stelle aber aus.

Unsere Beweisidee: Wir *approximieren* eine beliebige Funktion $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^n)$ auf einer geeigneten Teilmenge durch Funktionen $(f_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset C^0(I \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, die eine globale Lipschitzbedingung erfüllen.

Proposition 99. Es sei $A \subset \mathbb{R}$ kompakt, $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $f \in C^0(A \times K; \mathbb{R}^m)$. Dann gibt es eine Folge $(f_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset C^0(A \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ mit

$$\forall j \in \mathbb{N}: \quad |f_j(\tau, z_2) - f_j(\tau, z_1)| \leq \sqrt{m}j|z_2 - z_1| \quad \forall \tau \in A \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{R}^n. \quad (509)$$

und $f_j \rightarrow f$ gleichmäßig auf $A \times K$.

Beweisidee. Wir zeigen nur den Fall $m = 1$. Für $m > 1$ muss man lediglich jede Komponente betrachten, siehe Übungsblatt 7. Es sei also $f \in C^0(A \times K; \mathbb{R})$. Wir setzen für $j \in \mathbb{N}$ und $(\tau, z) \in A \times \mathbb{R}^n$.

$$f_j(\tau, z) := \inf_{w \in K} \{f(\tau, w) + j|w - z|\}. \quad (510)$$

Schritt 1. $f_j : A \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist reellwertig. Dazu: Weil $A \times K$ kompakt ist, gibt es ein $M > 0$ mit $|f(\tau, w)| \leq M$ für alle $(\tau, w) \in A \times K$. Somit gilt für $\tau \in A$ und $z \in \mathbb{R}^n$ und

$w \in K$

$$f(\tau, w) + j|w - z| \geq -M + j|w - z| \geq -M. \quad (511)$$

Somit haben wir auch

$$\inf_{w \in K} \{f(\tau, w) + j|w - z|\} \geq -M > -\infty \quad \forall (\tau, z) \in A \times \mathbb{R}^n. \quad (512)$$

Schritt 2. $f_j \rightarrow f$ gleichmäßig auf $A \times K$. Sei dazu $\varepsilon \in (0, 1)$. Beachte zunächst, dass für alle $(\tau, z) \in A \times K$ gilt, dass

$$f_j(\tau, z) = \inf_{w \in K} \{f(\tau, w) + j|w - z|\} \leq \inf_{w=z} \{f(\tau, z) + j|z - z|\} = f(\tau, z). \quad (513)$$

Wir wählen nun für alle $j \in \mathbb{N}$ ein $w_j \in K$ so, dass

$$f(\tau, w_j) + j|w_j - z| \leq f_j(\tau, z) + \frac{1}{2}\varepsilon. \quad (514)$$

Nun gilt

$$0 \underset{(513)}{\leq} f(\tau, z) - f_j(\tau, z) \underset{(514)}{\leq} f(\tau, z) - f(\tau, w_j) - j|w_j - z| + \frac{1}{2}\varepsilon \leq f(\tau, z) - f(\tau, w_j) + \frac{1}{2}\varepsilon. \quad (515)$$

Beachte nun, dass

$$j|z - w_j| \underset{(514)}{\leq} f_j(\tau, z) - f(\tau, w_j) + \frac{1}{2}\varepsilon \underset{(513)}{\leq} f(\tau, z) - f(\tau, w_j) + \frac{1}{2}\varepsilon \underset{\varepsilon < 1}{\leq} 2M + \frac{1}{2}, \quad (516)$$

d.h.

$$|z - w_j| \leq \frac{1}{j}(2M + \frac{1}{2}). \quad (517)$$

Da f auf $A \times K$ stetig ist (und $A \times K$ kompakt ist), ist es dort auch gleichmäßig stetig (siehe Analysis). Somit gibt es ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ mit

$$(\tau_1, v_1), (\tau_2, v_2) \in A \times K : |(\tau_1, v_1) - (\tau_2, v_2)| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(\tau_1, v_1) - f(\tau_2, v_2)| < \frac{1}{2}\varepsilon. \quad (518)$$

Sei man nun $j \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\frac{1}{j}(2M + \frac{1}{2}) < \delta(\varepsilon)$. Für $(\tau_1, v_1) := (\tau, z)$ und $(\tau_2, v_2) := (\tau, w_j)$ gilt dann nach (517), dass $|(\tau_1, v_1) - (\tau_2, v_2)| < \delta(\varepsilon)$. Somit haben wir

$$|f(\tau, z) - f(\tau, w_j)| = |f(\tau_1, v_1) - f(\tau_2, v_2)| < \frac{1}{2}\varepsilon. \quad (519)$$

Gehen wir nun zurück zu (515) so sehen wir, dass für $j \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{j}(2M + \frac{1}{2}) < \delta(\varepsilon)$ gilt, dass

$$0 \leq f(\tau, z) - f_j(\tau, z) \leq f(\tau, z) - f(\tau, w_j) + \frac{1}{2}\varepsilon \underset{(519)}{<} \varepsilon. \quad (520)$$

Das bedeutet, dass für $j \geq \lfloor \frac{1}{\delta(\varepsilon)}(2M + \frac{1}{2}) \rfloor + 1 := n_0(\varepsilon)$ gilt, dass

$$|f_j(\tau, z) - f(\tau, z)| < \varepsilon \quad \forall (\tau, z) \in A \times K. \quad (521)$$

Es folgt, dass f_j gleichmäßig gegen f konvergiert.

Schritt 3. Wir zeigen (509). Dies funktioniert wie im Beweis von Satz 84. Es seien dazu $j \in \mathbb{N}$ fest, $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^n$ und $\tau \in A$. Wähle nun für $\varepsilon > 0$ ein $w \in K$ mit

$$f(\tau, w) + j|w - z_1| \leq f_j(\tau, z_1) + \varepsilon. \quad (522)$$

Dann gilt

$$f_j(\tau, z_2) - f_j(\tau, z_1) \stackrel{(522)}{\leq} f_j(\tau, z_2) - (f(\tau, w) + j|w - z_1|) + \varepsilon \quad (523)$$

$$\stackrel{(510)}{\leq} [f(\tau, w) + j|w - z_2|] - (f(\tau, w) + j|w - z_1|) + \varepsilon \quad (524)$$

$$= j(|w - z_2| - |w - z_1|) + \varepsilon = j(|w - z_1 + z_1 - z_2| - |w - z_1|) + \varepsilon \quad (525)$$

$$\stackrel{\Delta\text{-Üngl.}}{\leq} j(|w - z_1| + |z_1 - z_2| - |w - z_1|) + \varepsilon = j|z_1 - z_2| + \varepsilon. \quad (526)$$

Lassen wir $\varepsilon \rightarrow 0+$ gehen, so erhalten wir

$$f_j(\tau, z_2) - f_j(\tau, z_1) \leq j|z_1 - z_2|. \quad (527)$$

Vertauschen wir die Rollen von z_1, z_2 , so könnten wir auch herleiten, dass

$$f_j(\tau, z_1) - f_j(\tau, z_2) \leq j|z_1 - z_2|. \quad (528)$$

Die beiden vorigen Gleichungen ergeben dann

$$|f_j(\tau, z_1) - f_j(\tau, z_2)| \leq j|z_1 - z_2|. \quad (529)$$

Schritt 4. Zu zeigen wäre hier noch die Stetigkeit von f auf $A \times \mathbb{R}^n$. Wir überspringen dies an dieser Stelle, weil es genauso funktioniert wie in Satz 84.

Die Idee ist nun die Folgende: Es sei $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^n)$, $t_0 \in I$, $y_0 \in G$. Wir wählen ein geeignetes Teilkompaktum $A \times K = [a, b] \times K$ von $I \times G$ und approximieren f auf $A \times K$ durch $(f_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset C^0(A \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ wie im vorigen Lemma. Dann gibt es für alle $j \in \mathbb{N}$ Lösungen $y_j \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$ zu

$$\begin{cases} y_j'(t) = f_j(t, y_j(t)) & (t \in (a, b)) \\ y_j(t_0) = y_0 \end{cases}. \quad (530)$$

Man hofft nun, dass diese Lösungen y_j in einem geeigneten Sinne gegen eine Lösung des ursprünglichen Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & (t \in ?) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (531)$$

konvergieren. Hierbei muss man unter Umständen noch das Intervall (a, b) verkleinern, deswegen das Fragezeichen.

Todo 1. Wahl des Teilkompaktums.

Proposition 100. Es sei $f \in C^0(I \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, $t_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Es sei $R > 0$ und $\alpha > 0$ mit $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \subset I$. Es sei $M := \max_{(\tau, z) \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \times \overline{B_R(y_0)}} |f(\tau, z)|$. Ferner sei $y \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$ eine Lösung von

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & (t \in (t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}. \quad (532)$$

Definiere $a := \min\{\frac{1}{2}\alpha, \frac{R}{M+1}\}$. Dann gilt, dass $y(t) \in \overline{B_R(y_0)}$ für alle $t \in [t_0 - a, t_0 + a]$.

Beweis. Es sei $a > 0$ wie in der Aussage. Wir erinnern uns, dass wegen Proposition 85 gilt, dass

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) \, ds \quad \forall t \in (t_0 - \alpha, t_0 + \alpha). \quad (533)$$

Definiere

$$S := \sup\{t \in [t_0, t_0 + a] : y(\tau) \in \overline{B_R(y_0)} \, \forall \tau \in [t_0, t]\}. \quad (534)$$

Beachte, dass $S \leq t_0 + a < t_0 + \alpha$ und damit ist $S \in I$. Somit ist es stets möglich, y bei S auszuwerten. Wir zeigen, dass $S = t_0 + a$. Für einen Widerspruch nehmen wir an, dass $S < t_0 + a$. Dann gilt (wegen der Wahl von S), dass $y(S) \in \partial B_R(y_0)$, d.h. $|y(S) - y_0| = R$. Somit folgt

$$R = |y(S) - y_0| \stackrel{(533)}{=} \left| \int_{t_0}^S f(s, y(s)) \, ds \right| \leq \int_{t_0}^S |f(s, y(s))| \, ds \quad (535)$$

Wegen der Wahl von S gilt $y(s) \in \overline{B_R(y_0)}$ für alle $s \in [t_0, S]$. Daher folgt nach der Definition von M in der Aussage

$$R \leq \int_{t_0}^S \underbrace{|f(s, y(s))|}_{\leq M} \, ds = M(S - t_0) \leq M(t_0 + a - t_0) = aM \leq R \frac{M}{M+1} \quad (536)$$

Subtrahiert man die rechte Seite von der linken, so erhält man $\frac{R}{M+1} \leq 0$, also einen Widerspruch. Es folgt, dass $S = t_0 + a$ und damit $y(t) \in \overline{B_R(y_0)}$ für alle $t \in [t_0, t_0 + a]$. Analog zeigt man $y(t) \in \overline{B_R(y_0)}$ für alle $t \in [t_0 - a, t_0]$ und damit folgt die Behauptung.

Wir werden später im Beweis ein geeignetes Teilkompaktum der Form $[t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B_R(y_0)}$ wählen, wobei $a > 0$ wie in der Aussage der vorigen Proposition ist.

Todo 2. Verstehen der Konvergenz.

Proposition 101. SATZ VON ARZELA-ASCOLI. Es sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und für $j \in \mathbb{N}$ sei $g_j \in C^0([a, b]; \mathbb{R}^m)$ eine stetige Funktion so, dass die Folge $(g_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset C^0([a, b]; \mathbb{R}^m)$ folgendes erfüllt: Sie ist

- (a) *punktweise beschränkt*, d.h. für alle $x \in [a, b]$ gilt: $\exists C > 0$ mit $\sup_{j \in \mathbb{N}} |g_j(x)| \leq C$.

und

(b) *gleichgradig stetig*, d.h. für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ so, dass

$$x_1, x_2 \in [a, b] : |x_1 - x_2| < \delta \quad \Rightarrow \quad \sup_{j \in \mathbb{N}} |g_j(x_1) - g_j(x_2)| \leq \varepsilon. \quad (537)$$

Dann gibt es eine Teilfolge $(g_{j_l})_{l \in \mathbb{N}}$ und ein $g \in C^0([a, b]; \mathbb{R}^m)$ so, dass $g_{j_l} \rightarrow g$ gleichmäßig auf $[a, b]$ konvergent ist.

Beweis. Es sei $g_j \in C^0([a, b]; \mathbb{R}^m)$ so, dass (a) und (b) erfüllt sind. Beachte nun: $[a, b] \cap \mathbb{Q}$ ist abzählbar, sei etwa $[a, b] \cap \mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \dots\}$.

Schritt 1. Finde eine Teilfolge $(j_l)_{l \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ so dass für alle $i \in \mathbb{N}$ die Folge $(g_{j_l}(q_i))_{l \in \mathbb{N}}$ konvergent ist. Hierzu werden wir benutzen, dass wegen Eigenschaft (a) für alle $i \in \mathbb{N}$ die Folge $(g_j(q_i))_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^m$ eine beschränkte Folge ist. Daher gibt es mit dem Satz von Bolzano-Weierstraß (angewendet auf $(g_j(q_1))_{j \in \mathbb{N}}$) eine Teilfolge $(k_l^{(1)})_{l \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ so, dass $(g_{k_l^{(1)}}(q_1))_{l \in \mathbb{N}}$ konvergent ist. Nun ist auch die Teilfolge $(g_{k_l^{(1)}}(q_2))_{l \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^m$ eine beschränkte Folge. Somit gibt es mit Bolzano-Weierstraß eine Teilfolge $(k_l^{(2)})_{l \in \mathbb{N}}$ von $(k_l^{(1)})_{l \in \mathbb{N}}$ so, dass $(g_{k_l^{(2)}}(q_2))_{l \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^m$ konvergent ist. Wiederum ist $(g_{k_l^{(2)}}(q_3))_{l \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge. Der Satz von Bolzano-Weierstraß liefert nun eine Teilfolge $(k_l^{(3)})_{l \in \mathbb{N}}$ von $(k_l^{(2)})_{l \in \mathbb{N}}$ so, dass $(g_{k_l^{(3)}}(q_3))_{l \in \mathbb{N}}$ konvergent ist. Wir können nun immer so weiter machen und finden *geschachtelte Teilfolgen* $(k_l^{(1)})_{l \in \mathbb{N}} \supset (k_l^{(2)})_{l \in \mathbb{N}} \supset (k_l^{(3)})_{l \in \mathbb{N}} \supset \dots$ so, dass für alle $r \in \mathbb{N}$ die Folge $(g_{k_l^{(r)}}(q_r))_{l \in \mathbb{N}}$ konvergent ist. Wir wählen nun die Teilfolge $j_l := k_l^{(l)}$ für alle $l \in \mathbb{N}$. Sei nun $i \in \mathbb{N}$. \mathbf{Z} : $g_{j_l}(q_i)$ ist konvergent. Dazu bemerke: Es definiert $(j_l)_{l > i} = (k_l^{(l)})_{l > i}$ stets eine Teilfolge von $(k_l^{(i)})_{l > i}$. Dies liegt daran dass die Teilfolgen geschachtelt waren! Da $(g_{k_l^{(i)}}(q_i))_{l \in \mathbb{N}}$ bereits konvergent ist, ist somit auch $(g_{j_l}(q_i))_{l > i}$ konvergent. Da für die Konvergenz aber die ersten i Folgenglieder keine Rolle spielen, ist auch $(g_{j_l}(q_i))_{l \in \mathbb{N}}$ konvergent.

Schritt 2. Wir zeigen nun, dass $(g_{j_l})_{l \in \mathbb{N}} \subset (C^0([a, b]; \mathbb{R}^m), d_\infty)$ eine Cauchy-Folge ist. Dazu sei $\varepsilon > 0$. \mathbf{Z} : Es gibt $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $d_\infty(g_l, g_k) [= \sup_{x \in [a, b]} |g_l(x) - g_k(x)|] < \varepsilon$ für alle $l, k \geq n_0(\varepsilon)$. Wegen der gleichgradigen Stetigkeit (d.h. Bedingung (b)) existiert ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ mit

$$x_1, x_2 \in [a, b] : |x_1 - x_2| < \delta \quad \Rightarrow \quad \sup_{j \in \mathbb{N}} |g_j(x_1) - g_j(x_2)| \leq \frac{1}{3}\varepsilon. \quad (538)$$

Zusätzlich gilt $[a, b] \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_\delta(q_i)$, da für jedes $x \in [a, b]$ das Intervall $(x - \delta, x + \delta) \cap [a, b]$ eine rationale Zahl enthalten muss (und $\{q_i : i \in \mathbb{N}\}$ ja gerade eine Abzählung der rationalen Zahlen in $[a, b]$ ist). Nach dem Satz von Heine-Borel gibt es nun ein endliches

$N_\delta \in \mathbb{N}$ so, dass

$$[a, b] \subset \bigcup_{i=1}^{N_\delta} B_\delta(q_i) \quad (\text{weil } (B_\delta(q_i))_{i \in \mathbb{N}} \text{ offene Überdeckung des Kompaktums } [a, b] \text{ war.}) \quad (539)$$

Für alle $i = 1, \dots, N_\delta$ ist nun $(g_{j_l}(q_i))_{l \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^m$ eine Cauchy-Folge in \mathbb{R}^m . Damit gibt es auch für alle $i = 1, \dots, N_\delta$ ein $n_i = n_i(\varepsilon) \geq 0$ so, dass

$$|g_{j_l}(q_i) - g_{j_k}(q_i)| < \frac{1}{3}\varepsilon \quad \forall l, k \geq n_i. \quad (540)$$

Wähle nun $n_0(\varepsilon) := \max_{i=1, \dots, N_\delta} n_i(\varepsilon)$. Seien $l, k \geq n_0(\varepsilon)$ und sei $x \in [a, b]$ beliebig. Nach (539) gibt es $i_0 \in \{1, \dots, N_\delta\}$ mit $|x - q_{i_0}| < \delta$. Wir berechnen nun

$$|g_{j_l}(x) - g_{j_k}(x)| = |g_{j_l}(x) - g_{j_l}(q_{i_0}) + g_{j_l}(q_{i_0}) - g_{j_k}(q_{i_0}) + g_{j_k}(q_{i_0}) - g_{j_k}(x)| \quad (541)$$

$$\leq \underbrace{|g_{j_l}(x) - g_{j_l}(q_{i_0})|}_{\leq \sup_{j \in \mathbb{N}} |g_j(x) - g_j(q_{i_0})|} + |g_{j_l}(q_{i_0}) - g_{j_k}(q_{i_0})| + \underbrace{|g_{j_k}(q_{i_0}) - g_{j_k}(x)|}_{\leq \sup_{j \in \mathbb{N}} |g_j(x) - g_j(q_{i_0})|} \quad (542)$$

$$\leq 2 \sup_{j \in \mathbb{N}} |g_j(x) - g_j(q_{i_0})| + |g_{j_l}(q_{i_0}) - g_{j_k}(q_{i_0})|. \quad (543)$$

Nach (538) gilt (weil $|x - q_{i_0}| < \delta$), dass $\sup_{j \in \mathbb{N}} |g_j(x) - g_j(q_{i_0})| < \frac{1}{3}\varepsilon$. Ferner beachte, dass $k, l \geq n_0(\varepsilon) \geq n_{i_0}$ und deshalb (wegen (540)) auch $|g_{j_l}(q_{i_0}) - g_{j_k}(q_{i_0})| \leq \frac{1}{3}\varepsilon$ für alle l, k . Nun folgt mit (541) für $l, k \geq n_0(\varepsilon)$

$$|g_{j_l}(x) - g_{j_k}(x)| \leq 2 \sup_{j \in \mathbb{N}} |g_j(x) - g_j(q_{i_0})| + |g_{j_l}(q_{i_0}) - g_{j_k}(q_{i_0})| < 2 \cdot \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon = \varepsilon. \quad (544)$$

Da $x \in [a, b]$ beliebig war gilt für alle $l, k \geq n_0(\varepsilon)$, dass

$$d_\infty(g_{j_l}, g_{j_k}) = \sup_{x \in [a, b]} |g_{j_l}(x) - g_{j_k}(x)| \leq \varepsilon. \quad (545)$$

Wir haben also gezeigt, dass $(g_{j_l})_{l \in \mathbb{N}} \subset (C^0([a, b]; \mathbb{R}^m), d_\infty)$ eine Cauchy-Folge ist. Beachte, dass nach dem Satz von Weierstraß $C^0([a, b]; \mathbb{R}^m) = C_b^0([a, b]; \mathbb{R}^m)$. Nun folgt mit Proposition 93, dass $(g_{j_l})_{l \in \mathbb{N}}$ in $(C^0([a, b]; \mathbb{R}^m), d_\infty)$ konvergent ist, also insbesondere gleichmäßig konvergent (vgl Anmerkung 91).

Wir sind nun bereit für das *Kurzzeitexistenzresultat* von Peano.

Satz 102. KURZZEITEXISTENZRESULTAT VON PEANO. Es sei $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^n)$, $t_0 \in I$, $y_0 \in G$ gegeben. Dann gibt es ein $b > 0$ so, dass das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t \in (t_0 - b, t_0 + b) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (546)$$

eine Lösung besitzt.

Beweis. Es sei $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^n)$, $t_0 \in I$, $y_0 \in G$. Wähle $\alpha > 0$ und $R > 0$ mit $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \times \overline{B_R(y_0)} \subset I \times G$. Sei nun $A := [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ und $K := \overline{B_R(y_0)}$. Nach Proposition 99 gibt es eine Folge $(f_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset C^0(A \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ von Funktionen, die eine globale Lipschitzbedingung erfüllen, mit $f_j \rightarrow f$ gleichmäßig auf $A \times K$. Wähle nun $M_j := \max_{(\tau, z) \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \times \overline{B_R(y_0)}} |f_j(\tau, z)|$ und $M := \max_{(\tau, z) \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \times \overline{B_R(y_0)}} |f(\tau, z)|$. Nach Aufgabe 2 auf Übungsblatt 9 konvergiert M_j gegen M für $j \rightarrow \infty$. Wir definieren nun $a_j := \min\{\frac{1}{2}\alpha, \frac{R}{M_j+1}\}$, $a := \min\{\frac{1}{2}\alpha, \frac{R}{M+1}\} > 0$ und vergewissern uns leicht, dass auch $a_j \rightarrow a$ für $j \rightarrow \infty$ gilt. Insbesondere gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_j > \frac{a}{2}$ für alle $j \geq n_0$. Es sei nun $y_j \in C^1((t_0 - \alpha, t_0 + \alpha); \mathbb{R}^n)$ die eindeutige Lösung zu

$$\begin{cases} y_j'(t) = f_j(t, y_j(t)) & (t \in (t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)) \\ y_j(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (547)$$

Dass diese Lösung existiert und eindeutig ist liegt daran, dass $f_j|_{(t_0 - \alpha, t_0 + \alpha) \times \mathbb{R}^n} \in C^0((t_0 - \alpha, t_0 + \alpha) \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ alle Voraussetzungen von Satz 75 erfüllt. Nach Proposition 100 gilt, dass $y_j(t) \in \overline{B_R(y_0)}$ für alle $t \in (t_0 - a_j, t_0 + a_j)$. Für $j \geq n_0$ hat man also $y_j(t) \in \overline{B_R(y_0)}$ für alle $t \in [t_0 - \frac{a}{2}, t_0 + \frac{a}{2}]$. Im Folgenden identifizieren wir y_j mit $y_j|_{[t_0 - \frac{a}{2}, t_0 + \frac{a}{2}]}$.

Zwischenbehauptung. Es gibt eine Teilfolge $(y_{j_i})_{i \in \mathbb{N}} \subset C^0([t_0 - \frac{a}{2}, t_0 + \frac{a}{2}]; \mathbb{R}^n)$ von $(y_j)_{j \geq n_0}$, die gleichmäßig gegen ein $y \in C^0([t_0 - \frac{a}{2}, t_0 + \frac{a}{2}]; \mathbb{R}^n)$ konvergiert. Dazu prüfen wir die Voraussetzungen von Proposition 101 für $(y_j)_{j \geq n_0}$ nach.

Zu Voraussetzung (a). Für die punktweise Beschränktheit beobachten wir, dass für $j \geq n_0$ nach Proposition 100

$$y_j(t) \in \overline{B_R(y_0)} \quad \forall t \in [t_0 - \frac{a}{2}, t_0 + \frac{a}{2}] \quad \Rightarrow \quad |y_j(t) - y_0| \leq R \quad \forall t \in [t_0 - \frac{a}{2}, t_0 + \frac{a}{2}]. \quad (548)$$

Somit gilt für $t \in [t_0 - \frac{a}{2}, t_0 + \frac{a}{2}]$, dass

$$|y_j(t)| = |y_j(t) - y_0 + y_0| \leq |y_j(t) - y_0| + |y_0| \leq R + |y_0|. \quad \text{d.h.} \quad \sup_{j \in \mathbb{N}} |y_j(t)| \leq R + |y_0|. \quad (549)$$

Zu Voraussetzung (b). Wir definieren $\tilde{M} := \sup_{j \geq n_0} M_j$. Dieses Supremum ist endlich, da $(M_j)_{j \geq n_0}$ als konvergente Folge beschränkt ist. Es sei $\varepsilon > 0$. Wähle nun $\delta = \delta(\varepsilon) := \frac{1}{\tilde{M}}\varepsilon$. Seien nun $x_1, x_2 \in [t_0 - \frac{a}{2}, t_0 + \frac{a}{2}]$, $|x_1 - x_2| < \delta$ und $j \geq n_0$. Dann gilt

$$|y_j(x_1) - y_j(x_2)| = \left| \int_{x_1}^{x_2} y_j'(s) \, ds \right| = \left| \int_{\min(x_1, x_2)}^{\max(x_1, x_2)} y_j'(s) \, ds \right| \quad (550)$$

$$\leq \int_{\min(x_1, x_2)}^{\max(x_1, x_2)} |y_j'(s)| \, ds \stackrel{(547)}{=} \int_{\min(x_1, x_2)}^{\max(x_1, x_2)} \underbrace{|f_j(s, y_j(s))|}_{\leq M_j, \text{ da } y_j(s) \in \overline{B_R(y_0)}} \, ds \leq M_j |x_2 - x_1|. \quad (551)$$

Nehmen wir das Supremum über alle $j \geq n_0$ so erhalten wir

$$\sup_{j \geq n_0} |y_j(x_1) - y_j(x_2)| \leq \sup_{j \geq n_0} M_j |x_2 - x_1| = \tilde{M} |x_2 - x_1| \leq \tilde{M} \delta = \tilde{M} \frac{1}{\tilde{M}} \varepsilon = \varepsilon. \quad (552)$$

Wir haben die Voraussetzungen von Satz 101 nachgeprüft und erhalten die Existenz der Teilfolge $(y_{j_l})_{l \in \mathbb{N}}$ und des Grenzwertes y aus der Zwischenbehauptung.

Behauptung. $y \in C^1((t_0 - \frac{a}{2}, t_0 + \frac{a}{2}); \mathbb{R}^n)$ ist Lösung von

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & (t \in (t_0 - \frac{a}{2}, t_0 + \frac{a}{2})) \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \quad (553)$$

Hierzu genügt (nach Proposition 85) folgendes zu zeigen

$$\mathbb{Z}: \quad y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) \, ds \quad \forall t \in (t_0 - \frac{a}{2}, t_0 + \frac{a}{2}). \quad (554)$$

Beachte, dass (547) (und Proposition 85) impliziert, dass für alle $j \in \mathbb{N}$

$$y_j(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f_j(s, y_j(s)) \, ds \quad \forall t \in (t_0 - \frac{a}{2}, t_0 + \frac{a}{2}), \quad (555)$$

somit auch

$$y_{j_l}(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f_{j_l}(s, y_{j_l}(s)) \, ds \quad \forall t \in (t_0 - \frac{a}{2}, t_0 + \frac{a}{2}). \quad (556)$$

Wir gehen nun auf beiden Seiten zum Grenzwert ($l \rightarrow \infty$) über. Auf der linken Seite gilt $\lim_{l \rightarrow \infty} y_{j_l}(t) = y(t)$, weil y_{j_l} gegen y gleichmäßig konvergiert. Für die rechte Seite gehen wir wie folgt vor. Es sei $\varepsilon > 0$. Da $f_{j_l} \rightarrow f$ gleichmäßig auf $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \times \overline{B_R(y_0)}$ konvergiert, gibt es ein $l_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\sup_{(\tau, z) \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \times \overline{B_R(y_0)}} |f_{j_l}(\tau, z) - f(\tau, z)| < \frac{1}{2} \varepsilon \quad \forall l \geq l_0. \quad (557)$$

Ferner ist f auf dem Kompaktum $[t_0 - \frac{a}{2}, t_0 + \frac{a}{2}] \times \overline{B_R(y_0)}$ gleichmäßig stetig ist und daher gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$z_1, z_2 \in \overline{B_R(y_0)}, |z_1 - z_2| < \delta, s \in [t_0 - \frac{a}{2}, t_0 + \frac{a}{2}] \Rightarrow |f(s, z_1) - f(s, z_2)| < \frac{1}{2} \varepsilon. \quad (558)$$

Zudem gibt es ein $l_1 \in \mathbb{N}$ so, dass $l \geq l_1$ impliziert, dass

$$|y_{j_l}(s) - y(s)| < \delta \quad \forall s \in [t_0 - \frac{a}{2}, t_0 + \frac{a}{2}]. \quad (559)$$

Wir berechnen für $l \geq \max(l_0, l_1)$

$$\left| y_0 + \int_{t_0}^t f_{j_l}(s, y_{j_l}(s)) \, ds - \left(y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) \, ds \right) \right| = \left| \int_{t_0}^t (f_{j_l}(s, y_{j_l}(s)) - f(s, y(s))) \, ds \right| \quad (560)$$

$$= \left| \int_{\min(t, t_0)}^{\max(t, t_0)} (f_{j_l}(s, y_{j_l}(s)) - f(s, y(s))) \, ds \right| \leq \int_{\min(t, t_0)}^{\max(t, t_0)} |f_{j_l}(s, y_{j_l}(s)) - f(s, y(s))| \, ds. \quad (561)$$

Nun gilt mit der Dreiecksungleichung

$$|f_{j_l}(s, y_{j_l}(s)) - f(s, y(s))| \leq |f_{j_l}(s, y_{j_l}(s)) - f(s, y_{j_l}(s))| + |f(s, y_{j_l}(s)) - f(s, y(s))|. \quad (562)$$

Für den ersten Summanden haben wir (weil nach (548) $y_{j_l}(s) \in \overline{B_R(y_0)}$)

$$|f_{j_l}(s, y_{j_l}(s)) - f(s, y_{j_l}(s))| \leq \sup_{(\tau, z) \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \times \overline{B_R(y_0)}} |f_{j_l}(\tau, z) - f(\tau, z)| \leq \frac{1}{2}\varepsilon. \quad (563)$$

Für den zweiten Summanden definiere $z_1 := y_{j_l}(s)$ und $z_2 := y(s)$. Dann gilt nach (559), dass $|z_1 - z_2| < \delta$ für alle $l \geq \max(l_0, l_1)$. Es folgt aus (558), dass

$$|f(s, y_{j_l}(s)) - f(s, y(s))| = |f(s, z_2) - f(s, z_1)| < \frac{1}{2}\varepsilon. \quad (564)$$

Mit den beiden obigen Gleichungen und (562) folgt

$$|f(s, y_{j_l}(s)) - f(s, y(s))| \leq \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon. \quad (565)$$

Benutzen wir dies in (561) so folgt für $l \geq \max(l_1, l_2)$

$$\left| y_0 + \int_{t_0}^t f_{j_l}(s, y_{j_l}(s)) \, ds - \left(y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) \, ds \right) \right| \leq \varepsilon(t - t_0). \quad (566)$$

Somit

$$\limsup_{l \rightarrow \infty} \left| y_0 + \int_{t_0}^t f_{j_l}(s, y_{j_l}(s)) \, ds - \left(y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) \, ds \right) \right| \leq \varepsilon(t - t_0). \quad (567)$$

Lassen wir $\varepsilon \rightarrow 0+$ streben, so erhalten wir

$$\limsup_{l \rightarrow \infty} \left| y_0 + \int_{t_0}^t f_{j_l}(s, y_{j_l}(s)) \, ds - \left(y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) \, ds \right) \right| = 0. \quad (568)$$

Dies erlaubt uns dann auch, auf der rechten Seite von (556) zum Grenzwert überzugehen und wir erhalten

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) \, ds \quad \forall t \in (t_0 - \frac{a}{2}, t_0 + \frac{a}{2}), \quad (569)$$

was zu zeigen war. Die Aussage des Satzes folgt dann mit $b := \frac{a}{2}$.

2.1.6 Der Eindeutigkeitsatz

Für das Eindeutigkeitsresultat ist der *Satz von Kirszbraun-Valentine* unsere Hauptzutat

Wiederholung Satz 84. SATZ VON KIRSZBRAUN-VALENTINE. Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt sowie $I \subset \mathbb{R}$ offen. Es sei $m \in \mathbb{N}$ und $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^m)$ erfülle

$$|f(\tau, z_2) - f(\tau, z_1)| \leq L|z_2 - z_1| \quad \forall \tau \in I, \forall z_1, z_2 \in G. \quad (570)$$

Dann gibt es $F \in C^0(I \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ mit $F|_{I \times G} = f$ und

$$|F(\tau, z_2) - F(\tau, z_1)| \leq \sqrt{m}L|z_2 - z_1| \quad \forall \tau \in I, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{R}^n. \quad (571)$$

Damit können wir das Eindeutigkeitsresultat beweisen

Wiederholung Satz 81. EINDEUTIGKEITSSATZ. Es erfülle $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^n)$ eine lokale Lipschitzbedingung, sei $t_0 \in I$ und $y_0 \in G$. Seien $I_1, I_2 \subset I$ Teilintervalle mit $t_0 \in I_1 \cap I_2$ und $y_j \in C^1(I_j; G)$ ($j = 1, 2$) Lösungen von

$$\begin{cases} y_j'(t) = f(t, y_j(t)) & (t \in I_j) \\ y_j(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (j = 1, 2). \quad (572)$$

Dann gilt $y_1|_{I_1 \cap I_2} = y_2|_{I_1 \cap I_2}$.

Beweis. Es seien $y_1 \in C^1(I_1; G)$ und $y_2 \in C^1(I_2; G)$ wie in der Aussage. Beachte, dass $I_1 \cap I_2$ auch ein offenes Intervall ist. Definiere

$$O := \{t \in I_1 \cap I_2 : y_1(t) = y_2(t)\} \quad (573)$$

Beachte, dass $O \neq \emptyset$, da $t_0 \in O$.

Zwischenbehauptung 1. $I_1 \cap I_2 \setminus O$ ist offen. Dazu

$$I_1 \cap I_2 \setminus O = \{t \in I_1 \cap I_2 : y_1(t) \neq y_2(t)\} = \{t \in I_1 \cap I_2 : |y_1(t) - y_2(t)| > 0\}. \quad (574)$$

Nun ist die Funktion $h : I_1 \cap I_2 \rightarrow \mathbb{R}$, $h(t) := |y_1(t) - y_2(t)|$ stetig. Aus (574) lernen wir, dass $I_1 \cap I_2 \setminus O = h^{-1}((0, \infty))$. Da Urbilder offener Mengen unter stetigen Funktionen wieder offen sind (Analysis) folgt, dass $I_1 \cap I_2 \setminus O$ offen ist.

Zwischenbehauptung 2. O ist offen. Dazu sei $T \in O$ beliebig, d.h. $y_1(T) = y_2(T)$. Definiere $v := y_1(T) [= y_2(T)]$. Wegen der lokalen Lipschitzbedingung gibt es nun $\varepsilon > 0$, $r > 0$ und $L > 0$ so, dass $(T - \varepsilon, T + \varepsilon) \subset I$, $B_r(v) \subset G$ und

$$|f(\tau, z_2) - f(\tau, z_1)| \leq L|z_2 - z_1| \quad \forall \tau \in (T - \varepsilon, T + \varepsilon) \quad \forall z_1, z_2 \in B_r(v). \quad (575)$$

Nach dem Satz von Kirszbraun-Valentine gibt es nun ein $F \in C^0((T - \varepsilon, T + \varepsilon) \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ so, dass $F|_{(T - \varepsilon, T + \varepsilon) \times B_r(v)} = f$ und

$$|F(\tau, z_2) - F(\tau, z_1)| \leq \sqrt{n}L|z_2 - z_1| \quad \forall \tau \in (T - \varepsilon, T + \varepsilon) \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{R}^n. \quad (576)$$

Insbesondere erfüllt F eine globale Lipschitzbedingung auf $(T - \varepsilon, T + \varepsilon)$. Betrachten wir nun $U := y_1^{-1}(B_r(v)) \cap y_2^{-1}(B_r(v)) \cap (T - \varepsilon, T + \varepsilon)$. Da y_1, y_2 stetig sind (und daher Urbilder offener Mengen wieder offen sind), ist U offen. Da auch $T \in U$ gibt es nun $\delta > 0$ mit

$$(T - \delta, T + \delta) \subset U = y_1^{-1}(B_r(v)) \cap y_2^{-1}(B_r(v)) \cap (T - \varepsilon, T + \varepsilon) \quad (577)$$

Nun hat nach dem globalen Satz von Picard-Lindelöf das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) = F(t, y(t)) & (t \in (T - \delta, T + \delta)) \\ y(T) = v \end{cases} \quad (578)$$

Eine eindeutige Lösung $y \in C^1((T - \delta, T + \delta); \mathbb{R}^n)$. Für $t \in (T - \delta, T + \delta)$ gilt nun

$$y_1'(t) = f(t, y_1(t)) \quad \text{weil wg. (577) } y_1(t) \in B_r(v) \quad \forall t \in (T - \delta, T + \delta) \quad F(t, y_1(t)) \quad (579)$$

und ferner $y_1(T) = v$. Wir folgern aus der Eindeutigkeit von , dass $y_1|_{(T - \delta, T + \delta)} = y$. Analog zeigen wir

$$y_2'(t) = f(t, y_2(t)) \quad \text{weil wg. (577) } y_2(t) \in B_r(v) \quad \forall t \in (T - \delta, T + \delta) \quad F(t, y_2(t)). \quad (580)$$

Es folgt (wiederum aus der Eindeutigkeit von), dass $y_2|_{(T - \delta, T + \delta)} = y$ und somit $y_2|_{(T - \delta, T + \delta)} = y_1|_{(T - \delta, T + \delta)}$. Damit gilt also $(T - \delta, T + \delta) \subset O$. Die Offenheit von O ist bewiesen. **Ende der Zwischenbehauptungen.** Beachte nun, dass

$$(I_1 \cap I_2) = [(I_1 \cap I_2) \setminus O] \cup O, \quad (581)$$

d.h. $I_1 \cap I_2$ ist die Vereinigung zweier disjunkter offener Mengen. Da $I_1 \cap I_2$ aber (als Intervall) zusammenhängend ist, gilt nun entweder $O = \emptyset$ oder $I_1 \cap I_2 \setminus O = \emptyset$. Da aber $O \neq \emptyset$ (weil $t_0 \in O$) gilt $I_1 \cap I_2 \setminus O = \emptyset$ und somit $O = I_1 \cap I_2$. Mit anderen Worten gilt also $y_1|_{I_1 \cap I_2} = y_2|_{I_1 \cap I_2}$.

2.1.7 Beweis des (lokalen) Satzes von Picard-Lindelöf

Wir haben bereits angekündigt, dass der lokale Satz von Picard-Lindelöf und dem abgeschwächten Satz von Peano folgt. Diesen werden wir als nächstes beweisen.

Wiederholung Satz 78. ABGESCHWÄCHTER SATZ VON PEANO. Es erfülle $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^n)$ eine lokale Lipschitzbedingung. Sei dazu $t_0 \in I$ und $y_0 \in G$. Dann existiert ein Teilintervall $\tilde{I} \subset I$ mit $t_0 \in \tilde{I}$ und mit einer nichtfortsetzbaren Lösung $y \in C^1(\tilde{I}; G)$ des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & (t \in \tilde{I}) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (582)$$

Beweis. Nach dem Kurzzeitexistenzresultat von Peano (Satz 102) gibt es ein $b > 0$ so, dass eine *Kurzzeitlösung* $y_{ku} \in C^1((t_0 - b, t_0 + b); \mathbb{R}^n)$ von

$$\begin{cases} y'_{ku}(t) = f(t, y_{ku}(t)) & (t \in (t_0 - b, t_0 + b)) \\ y_{ku}(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (583)$$

Wir führen für den Beweis folgende Bezeichnung ein. Für ein offenes Teilintervall $J \subset I$ gilt

$$(AWP|J) \quad \text{bezeichnet das Anfangswertproblem} \quad \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & (t \in J) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (584)$$

Definiere nun

$$t_+ := \sup\{\bar{t} \geq t_0 + b : (AWP|(t_0 - b, \bar{t})) \text{ hat eine Lösung } \bar{y} \text{ mit } \bar{y}|_{(t_0 - b, t_0 + b)} = y_{ku}\} \quad (585)$$

und

$$t_- := \inf\{\underline{t} \leq t_0 - b : (AWP|(\underline{t}, t_0 + b)) \text{ hat eine Lösung } \underline{y} \text{ mit } \underline{y}|_{(t_0 - b, t_0 + b)} = y_{ku}\}. \quad (586)$$

Nun gibt es eine monoton wachsende Folge $\bar{t}_j \uparrow t_+$ und Lösungen \bar{y}_j von $(AWP, (t_0 - b, \bar{t}_j))$ mit $\bar{y}_j|_{(t_0 - b, t_0 + b)} = y_{ku}$ sowie eine monoton fallende Folge $\underline{t}_j \uparrow t_+$ und Lösungen \underline{y}_j von $(AWP, (\underline{t}_j, t_0 + b))$ mit $\underline{y}_j|_{(t_0 - b, t_0 + b)} = y_{ku}$. Definiere $y_j : (\underline{t}_j, \bar{t}_j) \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch

$$y_j(t) := \begin{cases} \underline{y}_j(t) & t \in (\underline{t}_j, t_0] \\ \bar{y}_j(t) & t \in (t_0, \bar{t}_j) \end{cases} \quad (587)$$

Sicherlich gilt, dass $y_j \in C^1((\underline{t}_j, \bar{t}_j); \mathbb{R}^n)$, denn sowohl \underline{y}_j als auch \bar{y}_j stimmen auf $(t_0 - b, t_0 + b)$ mit y_{ku} überein und somit gibt es bei t_0 keine Differenzierbarkeitsprobleme. Ferner gilt für alle $t \in (\underline{t}_j, \bar{t}_j)$

$$y'_j(t) = \begin{cases} \underline{y}'_j(t) & t \in (\underline{t}_j, t_0] \\ \bar{y}'_j(t) & t \in (t_0, \bar{t}_j) \end{cases} = \begin{cases} f(t, \underline{y}_j(t)) & t \in (\underline{t}_j, t_0] \\ f(t, \bar{y}_j(t)) & t \in (t_0, \bar{t}_j) \end{cases} = f(t, y_j(t)) \quad (588)$$

und außerdem $y_j(t_0) = y_{ku}(t_0) = y_0$. Somit löst y_j also $(AWP|(\underline{t}_j, \bar{t}_j))$. Wir definieren nun $I_j := (\underline{t}_j, \bar{t}_j)$. Da unsere Folgen monoton gewählt waren gilt $I_j \subset I_{j+1}$ für alle $j \in \mathbb{N}$.

Zwischenbehauptung. Für alle $k \geq j$ gilt $y_k|_{I_j} = y_j$. Dies folgern wir leicht aus dem Eindeigkeitsatz (Satz 81) — denn y_k löst $(AWP|I_k)$ und y_j löst $(AWP|I_j)$ (also dasselbe AWP auf unterschiedlichen Intervallen) und daher stimmen y_k und y_j auf $I_k \cap I_j = I_j$ überein. Wir folgern $y_k|_{I_j} = y_j|_{I_j} = y_j$. **Zwischenbehauptung Ende.**

Nun setze $\tilde{I} := (t_-, t_+) = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$ und definiere

$$\hat{y} : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^n : \Rightarrow \hat{y}(t) := y_{k_t}(t) \quad \text{wobei} \quad k_t := \min\{j \in \mathbb{N} : t \in I_j\} \quad (589)$$

Beachte, dass für alle $l \in \mathbb{N}$ gilt

$$t \in I_l \quad \Rightarrow \quad k_t \leq l \quad \text{und somit} \quad \hat{y}(t) = y_{k_t}(t) \stackrel{\text{Zw.Beh.}}{=} (y_l|_{I_{k_t}})(t) = y_l(t), \quad (590)$$

d.h. $\hat{y}|_{I_l} = y_l$.

Behauptung. \hat{y} ist eine nichtfortsetzbare Lösung von $(AWP|\tilde{I})$. Dass \hat{y} eine Lösung des AWP auf \tilde{I} ist liegt daran, dass $\hat{y}|_{I_j} = y_j$ und somit löst \hat{y} das Anfangswertproblem auf I_j für alle $j \in \mathbb{N}$, also auch auf $\tilde{I} = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$. Noch $\mathbb{Z}\hat{y}$ ist nichtfortsetzbar. Dazu: Angenommen es gäbe ein $J = (\alpha, \beta) \supsetneq \tilde{I}$ und ein $z \in C^1(J; G)$ mit $z|_{\tilde{I}} = \hat{y}$ und

$$\begin{cases} z'(t) = f(t, z(t)) & (t \in J) \\ z(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (591)$$

Beachte, dass $z|_{(t_0-b, t_0+b)} = \hat{y}|_{(t_0-b, t_0+b)} = y_{ku}$, wobei Letzteres gilt weil $(y_j)|_{(t_0-b, t_0+b)} = y_{ku}$. Dass bedeutet aber, dass die Lösung $z_{(t_0-b, \beta)}$ an der Supremumbildung in (585) teilnimmt. Man folgert $\beta \leq t_+$ Genauso nimmt die Lösung $z_{(\alpha, t_0+b)}$ an der Infimumsbildung in (586) teil. Es folgt, dass $\alpha \geq t_-$. Beides zusammen ergibt dann den folgenden Widerspruch:

$$J = (\alpha, \beta) \subset (t_-, t_+) = \tilde{I} \subsetneq J. \quad (592)$$

Wiederholung Satz 81. SATZ VON PICARD-LINDELÖF II - LOKALE VERSION. Es erfülle $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^n)$ eine lokale Lipschitzbedingung, sei $t_0 \in I$ und $y_0 \in G$. Dann gibt es eine eindeutige maximale Lösung $y \in C^1(\hat{I}; G)$, $(\hat{I} \subset I, t_0 \in \hat{I})$ von

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (593)$$

Das bedeutet: y löst das o.g. Anfangswertproblem auf \hat{I} und für jede weitere Lösung $z \in C^1(J; G)$ ($J \subset I$ offen, $t_0 \in J$) von

$$\begin{cases} z'(t) = f(t, z(t)) & (t \in J) \\ z(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (594)$$

gilt $J \subset \hat{I}$ und $z = y|_J$.

Beweis. Es erfülle $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^n)$ eine lokale Lipschitzbedingung, sei $t_0 \in I$ und $y_0 \in G$.

Existenz. Wir wissen bereits aus dem vorigen Beweis (von Satz 78), dass es eine nichtfortsetzbare Lösung $y \in C^1(\tilde{I}; G)$ von

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & (t \in \tilde{I}) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (595)$$

gibt. Wir definieren $\hat{I} := \tilde{I}$ und behaupten, dass y eine maximale Lösung ist. In der Tat, sei $z \in C^1(J; G)$ eine weitere Lösung von

$$\begin{cases} z'(t) = f(t, z(t)) & (t \in J) \\ z(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (596)$$

Nach dem Eindeutigkeitsatz (Satz 81) gilt $z|_{\tilde{I} \cap J} = y|_{\tilde{I} \cap J}$. Wir nehmen an, dass $J \not\subset \tilde{I}$, d.h. auch $\tilde{I} \cup J \not\supset \tilde{I}$. Definiere nun

$$\bar{z} : \tilde{I} \cup J \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \bar{z}(t) := \begin{cases} y(t) & t \in \tilde{I} \\ z(t) & t \in J. \end{cases} \quad (597)$$

Da y und z auf $\tilde{I} \cap J$ übereinstimmen ist \bar{z} wohldefiniert. Ferner gibt es wegen der Offenheit von $\tilde{I} \cap J$ keine Differenzierbarkeitsprobleme an Randpunkten von \tilde{I} bzw. J . Man sieht nun, dass $\bar{z}|_{\tilde{I}} = y$ und rechnet leicht nach, dass

$$\begin{cases} \bar{z}'(t) = f(t, \bar{z}(t)) & (t \in \tilde{I} \cup J) \\ \bar{z}(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (598)$$

Dies aber widerspricht der Nichtfortsetzbarkeit von y .

Eindeutigkeit. Es seien $y_1 \in C^1(\hat{I}_1; G)$ und $y_2 \in C^1(\hat{I}_2; G)$ zwei maximale Lösungen desselben Anfangswertproblems. Wegen der Maximalität von y_1 gilt $\hat{I}_2 \subset \hat{I}_1$ und $y_2 = y_1|_{\hat{I}_2}$. Wegen der Maximalität von y_2 gilt aber auch $\hat{I}_1 \subset \hat{I}_2$ und $y_1 = y_2|_{\hat{I}_1}$. Wir folgern $\hat{I}_1 = \hat{I}_2$ und $y_1 = y_2$.

2.2 Die Maximale Lösung

2.2.1 Thematischer Überblick

Es sei $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^n)$ eine lokale Lipschitzbedingung erfüllend, $t_0 \in I$ und $y_0 \in G$. Wir haben nun gezeigt, dass wir eine *maximale* (= größtmögliche) Lösung $y \in C^1(\hat{I}; G)$ (für ein

$\hat{I} \subset I$) zu

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (599)$$

finden können.

Fragestellungen 103.

1. Unter welchen Voraussetzungen ist die maximale Lösung auf ganz I definiert (d.h. $\hat{I} = I$)?
2. Falls $\hat{I} \subsetneq I$: Was muss schiefgehen, dass sich die Lösung nicht über \hat{I} hinaus vergrößern lässt?

Wieder besprechen wir in diesem Abschnitt nur die Resultate, die die o.g. Fragen beantworten. Die Beweise machen wir später. **Zu Frage 2.** Es sei etwa $I = (a, b)$ und $\hat{I} = (t_-, t_+) \subsetneq I$. Falls $t_+ < b$ muss bei t_+ etwas passieren, was verursacht, dass sich die Lösung nicht weiter fortsetzen lässt. Wir werden sehen, dass im wesentlichen zwei Dinge schiefgehen können

1. *Flucht-Situation* d.h. “die Lösung verlässt G ”, also $\liminf_{t \rightarrow t_+} \text{dist}(y(t), \mathbb{R}^n \setminus G) = 0$.
2. *Explosions-Situation*, d.h. “die Lösung explodiert”, also $\limsup_{t \rightarrow t_+} |y(t)| = \infty$.

Analoges passiert falls $t_- > a$. Wir fassen diese Phänomene zu dem Folgenden Satz zusammen

Satz 104. MAXIMALITÄTSDETEKTOR. Es erfülle $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^n)$ eine lokale Lipschitzbedingung. Sei $t_0 \in I, y_0 \in G$. Es sei $y \in C^1(\hat{I}; \mathbb{R}^n)$ die maximale Lösung von

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (600)$$

Sei $I = (a, b)$ und $\hat{I} = (t_-, t_+)$. Dann gilt

$$t_+ = b \quad \text{oder} \quad \liminf_{t \uparrow t_+} \min \left\{ \text{dist}(y(t), \mathbb{R}^n \setminus G), \frac{1}{|y(t)| + 1} \right\} = 0. \quad (601)$$

Analog

$$t_- = a \quad \text{oder} \quad \liminf_{t \downarrow t_-} \min \left\{ \text{dist}(y(t), \mathbb{R}^n \setminus G), \frac{1}{|y(t)| + 1} \right\} = 0. \quad (602)$$

Hierbei verwenden wir die Konvention $\text{dist}(v, \emptyset) = \infty$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$.

Mithilfe der Funktion $t \mapsto \min \left\{ \text{dist}(y(t), \mathbb{R}^n \setminus G), \frac{1}{|y(t)| + 1} \right\}$ lassen sich also die Endpunkte des maximalen Existenzintervalls *detectieren*. Abschließend führen wir noch folgende Sprechweise ein

Definition 105. LINKS/RECHTSGLOBALITÄT. Es erfülle $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^n)$ eine lokale Lipschitzbedingung. Sei $t_0 \in I, y_0 \in G$. Es sei $y \in C^1(\hat{I}; \mathbb{R}^n)$ die maximale Lösung von

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (603)$$

Sei $I = (a, b)$ und $\hat{I} = (t_-, t_+)$. Dann heißt y

- *linksglobal*, falls $t_- = a$,
- *rechtsglobal*, falls $t_+ = b$,
- *global*, falls y linksglobal und rechtsglobal ist.

Zu Frage 1. Wir wissen nun, was bei einer nicht-(rechts/links)globalen Lösung passieren kann: Entweder sie flieht oder sie explodiert. Unter gewissen Voraussetzungen können beide Phänomene ausgeschlossen werden. Wir erhalten dann *Globalitätskriterien*, d.h. Voraussetzungen unter denen $\hat{I} = I$ gilt. Zum Beispiel das Folgende

Satz 106. GLOBALITÄT ÜBER LINEARES WACHSTUM. Es erfülle $f \in C^0(I \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ (d.h. $G = \mathbb{R}^n$) eine lokale Lipschitzbedingung und es gebe ein $c \in C^0(I; \mathbb{R}^n)$ so, dass

$$|f(\tau, z)| \leq c(\tau)(1 + |z|) \quad \forall \tau \in I, z \in \mathbb{R}^n. \quad (604)$$

Dann ist für alle $t_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{R}^n$ die maximale Lösung von

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (605)$$

eine globale Lösung.

Wir kennen bereits ein Globalitätskriterium: Es besagt nämlich der globale Satz von Picard-Lindelöf, dass eine globale Lösung existiert, sofern $f \in C^0(I \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ eine globale Lipschitzbedingung erfüllt. Auf Übungsblatt 10 werden wir sehen, dass in diesem Fall aber auch das Kriterium aus Satz 106 erfüllt ist.

Um solche Globalitätskriterien herzuleiten, müssen wir das *Wachstum* von Lösungen verstehen. Ein entscheidendes Resultat in diesem Kontext wird das berühmte *Lemma von Gronwall* sein.

2.2.2 Beweis des Maximalitätsdetektors

Der Beweis des Maximalitätsdetektors beruht auf dem folgenden Lemma

Proposition 107. DAS ESCAPE-LEMMA. Es erfülle $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^n)$ eine lokale Lipschitz-Bedingung. Sei für $t_0 \in I$ und $y_0 \in G$ die Lösung $y \in C^1(\hat{I}; G)$ ($\hat{I} = (t_-, t_+)$)

die maximale Lösung von

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} . \quad (606)$$

Falls es ein Kompaktum $K \subset G$ gibt mit $y(t) \in K$ für alle $t \in [t_0, t_+)$, so ist y rechtsglobal.
Analog: Falls es ein Kompaktum $K \subset G$ gibt mit $y(t) \in K$ für alle $t \in (t_-, t_0]$, so ist y linksglobal.

Beweis.

2.2.3 Das Lemma von Gronwall

2.2.4 Globalitätskriterien

2.3 Lineare Differentialgleichungen - Teil 2

2.4 Wohlgestelltheit und glatte Abhängigkeit