Uni Freiburg

Abgabe am:
Donnerstag, 27.01.2022

Marius Müller
Saskia Glaffig
Simone Hermann
Wintersemester 2021/2022
Punktzahl: 7+2*=9 Punkte

Gewöhnliche Differentialgleichungen: Blatt 11

1. [siehe Übung 127, p. 134] Lineare Differentialungleichungen. (3 Punkte)
Es seien $a, b \in C^0(I; [0, \infty))$ und $z \in C^1(I; \mathbb{R})$ so, dass

$$\begin{cases} z'(t) \leq a(t)z(t) + b(t) \quad \forall t \in I. \\ z(t_0) \leq y_0 \end{cases} \tag{1}$$

Ferner sei $y \in C^1(I, \mathbb{R})$ die eindeutige Lösung von

$$\begin{cases} y'(t) = a(t)y(t) + b(t) \quad (t \in I). \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{2}$$

Zeigen Sie, dass $z(t) \leq y(t)$ für alle $t \in I$ mit $t \geq t_0$.

2. [siehe Übung 131, p. 138] Anwendung des Globalitätskriteriums. (4 Punkte)
Gegeben sei die DGL

$$y'(t) = \sin(y(t)^2) + t \tag{3}$$

(a) Zeigen Sie: $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t, z) = \sin(z^2) + t$ erfüllt eine lokale Lipschitz-Bedingung, aber keine globale Lipschitz-Bedingung.

(b) Zeigen Sie: Für alle $(t_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ gilt, dass das AWP

$$\begin{cases} y'(t) = \sin(y(t)^2) + t \quad t \in \mathbb{R} \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{4}$$

eine eindeutige globale Lösung $y \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ besitzt.

3. [Bonus, siehe Übung 124, p. 129] Rechtsglobalität & Kontrolle der Norm. (2* Punkte)
Betrachten Sie für einen beliebigen Anfangswert $y_0 = (y_{0,1}, y_{0,2})^T \in \mathbb{R}^2$ das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y_1'(t) = -y_2(t) \\ y_2'(t) = y_1(t) + (1 - y_1^2(t) - y_2^2(t))y_2(t). \\ (y_1(0), y_2(0)) = (y_{0,1}, y_{0,2}). \end{cases} \tag{5}$$

Zeigen Sie: Es existiert eine maximale Lösung $y_{max} = (y_1, y_2) : I_{max} \to \mathbb{R}^2$, die auch rechtsglobal ist, d.h. $I_{max} \supset [0, \infty)$.