

---

## Gewöhnliche Differentialgleichungen: Blatt 3

---

1. [1+1+2 = 4 Punkte] Gegeben sei eine Funktion  $y \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}^n)$ . Zeigen Sie

(a)  $\operatorname{Re}(y)$  liegt in  $C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$  und es gilt  $\frac{d}{dt}\operatorname{Re}(y(t)) = \operatorname{Re}(y'(t))$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ .

(b) Für  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $t \in \mathbb{R}$  gilt  $\operatorname{Re}(Ay(t)) = A\operatorname{Re}(y(t))$ .

(c) Sei nun  $E \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}^{n \times n})$  und  $v \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}^n)$ . Dann gilt für  $t \in \mathbb{R}$

$$\frac{d}{dt}E(t)v(t) = E'(t)v(t) + E(t)v'(t). \quad (1)$$

2. [2+1+2 = 5 Punkte] Sei  $\omega > 0$ .

(a) Finden Sie die allgemeine Lösung zu

$$y'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} y(t) \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (2)$$

Zeigen Sie: Jedes Element der allgemeinen Lösung ist beschränkt.

(b) Finden Sie die reelle allgemeine Lösung zum System in (a).

(c) Sei zusätzlich  $\alpha > 0$  und  $d \in \mathbb{C}$ . Finden Sie die allgemeine Lösung zu

$$z'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} z(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ de^{i\alpha t} \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (3)$$

Für welche Werte von  $\alpha, d$  ist jedes Element der allgemeinen Lösung beschränkt?

3. [2+2 = 4 Punkte]

(a) Finden Sie die allgemeine Lösung zu

$$z'(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} z(t) \quad (t \in \mathbb{R}). \quad (4)$$

(b) Finden Sie die allgemeine Lösung zu

$$y'(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} y(t) \quad (t \in \mathbb{R}). \quad (5)$$

4. [2 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung und die reelle allgemeine Lösung zu

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 0 \quad (t \in \mathbb{R}). \quad (6)$$

5. [2\* Punkte] Finden Sie die allgemeine Lösung DGL-Systems

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(t)^2 - y_2(t)^2 \\ 2y_1(t)y_2(t) \end{pmatrix} \quad (t \in (a, b)). \quad (7)$$