Uni Freiburg

Abgabe am:
Donnerstag, 16.12.2021

Marius Müller
Saskia Glaffig
Simone Hermann
Wintersemester 2021/2022
Punktzahl: 8+3=11 Punkte

Gewöhnliche Differentialgleichungen: Blatt 8

1. [siehe Übung 96, p. 102] Lokale und Globale Lipschitzbedingung (1+1=2 Punkte)

(a) Geben Sie ein Beispiel für eine Funktion $f \in C^0(I \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, die eine lokale Lipschitzbedingung erfüllt, jedoch nicht einer globalen Lipschitzbedingung genügt.

(b) Geben Sie ein Beispiel für eine beschränkte (!) Funktion $f \in C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, die eine lokale Lipschitzbedingung erfüllt, jedoch nicht einer globalen Lipschitzbedingung genügt.

2. [siehe Übung 97, p. 102] Existenz einer SIR-Pandemie. (4 Punkte)
Es sei wie in Kapitel 2

$$Z := \{(s, i, r) \in (0,1)^3 : s + i + r = 1\}.$$

Zeigen Sie: Für alle $y_0 \in Z$ existiert eine SIR-Pandemie $y \in C^1(I; \mathbb{R}^3)$ für $I \supset [0, \infty)$ mit $y(0) = y_0$. [Hierbei ist der Begriff einer SIR-Pandemie im Sinne von Definition 72 (p. 77) zu verstehen.]

3. [siehe Übung 103, p. 109] Wohldefiniertheit der Fixpunktabbildung T. (2 Punkte)
Es sei $f \in C^0(I \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ und $J \subset\subset I$ (d.h. J beachränkt und $\overline{J} \subset I$) mit $t_0 \in J$. Zeigen Sie: Für alle $y \in C_b^0(J; \mathbb{R}^n)$ sei die Funktion $T_y : J \to \mathbb{R}^n$ gegeben durch

$$T_y(t) := y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, \mathrm{d}s \quad (t \in J) \tag{1}$$

ein Element von $C_b^0(J; \mathbb{R}^n)$. Gilt dies auch, wenn man auf die Beschränktheit von J verzichtet?

4. [Bonusaufgabe, Wdh-Übung, s. Übung 58, p. 59] Der Integrierende Faktor. (3* Punkte)

Gegeben sei eine DGL der Form

$$p(t, y(t)) + q(t, y(t))y'(t) = 0 \quad \forall t \in I \tag{2}$$

wobei $p, q \in C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ mit $q(\tau, z) > 0$ für alle $(\tau, z) \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie: Unter der folgenden

$$\textbf{Annahme}: \quad \frac{1}{q(\tau, z)} \left(\frac{\partial p}{\partial z}(\tau, z) - \frac{\partial q}{\partial \tau}(\tau, z) \right) \quad \text{hängt nur von } \tau \text{ ab,} \tag{3}$$

gibt es ein Integral der Bewegung.