Marius Müller
Robert Baumgarth
Wintersemester 2022/2023
Punktzahl: $15 + 2^*$ Punkte

UNIVERSITÄT LEIPZIG

Übungsblatt

Abgabe am:
Montag, 24.10.2022

Gewöhnliche Differentialgleichungen: Blatt 2

1. [1+2 = 3 Punkte] Gegeben sei für ein $f \in C^0(\mathbb{R})$ und $y_0 > 0$ das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t)) \quad (t \in \mathbb{R}) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{1}$$

gegeben.

(a) Zeigen Sie: Ist $f \geq 0$ so ist jede Lösung monoton wachsend.

(b) Es gebe nun ein $c > 0$ so, dass für alle $z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt, dass $\frac{f(z)}{z} \geq c$. Zeigen Sie, dass jede Lösung y die Abschätzung $y(t) \geq y_0 e^{ct}$ für alle $t \in [0, \infty)$ erfüllt.

2. [2+1+1+1 = 5 Punkte] Es sei für $y_0 \in (0,1)$ beliebig das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) = y(t)(1 - y(t)) \quad (t \in \mathbb{R}) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{2}$$

gegeben.

(a) Bestimmen Sie eine explizite Lösung und fertigen Sie eine Zeichung an.

(b) Zeigen Sie, dass für jede Lösung y gilt, dass $y(t) \in (0,1)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

(c) Folgern Sie, dass das Anfangswertproblem eine eindeutige Lösung besitzt.

(d) Zeigen Sie, dass die Lösung streng monoton ist und einen eindeutigen Wendepunkt $t_0 \in \mathbb{R}$ mit $y(t_0) = \frac{1}{2}$ besitzt.

3. [2 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von

$$y'(t) = \frac{1}{t}\left(\sqrt{y(t)^2 + t^2} + y(t)\right) \quad (t \in (0, \infty)). \tag{3}$$

4. [1+2+1+2* = 5+ 2* Punkte] Wir betrachten für $\gamma > 0, \gamma \notin \mathbb{N}$, $y_0 \geq 0$ und $a, b \in C^0(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) = a(t)y(t) + b(t)y(t)^\gamma \quad (t \in \mathbb{R}) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{4}$$

Man beachte, dass $y(t)^\gamma$ nur wohldefiniert ist, falls $y(t) \geq 0$.

(a) Substituieren Sie $z(t) = y(t)^{1-\gamma}$ und leiten Sie eine DGL für z her. Kennen Sie den DGL-Typ dieser DGL?

(b) Zeigen Sie: Falls $y_0 > 0$ und

$$|1-\gamma| \int_{-\infty}^{\infty} |b(u)| \exp\left(-\int_0^u (1-\gamma)a(s)\,\mathrm{d}s\right)\,\mathrm{d}u < y_0^{1-\gamma}, \tag{5}$$

so hat das AWP eine eindeutige (globale, d.h. auf ganz $\mathbb{R}$ definierte) Lösung.

(c) Kann auf Gleichung (5) und '$y_0 > 0$' als Vorraussetzung verzichtet werden? Geben Sie Gegenbeispiele (sowohl für globale Existenz als auch für Eindeutigkeit) an.

(d*) Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt es eine (auf ganz $(0, \infty)$ definierte) Lösung von

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t) + y(t)^3 \quad (t \in (0, \infty)) \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad ? \tag{6}$$