ÜBUNGSBLATT

Abgabe am:
Montag, 15.05.2023

Marius Müller
Bernd Käßemodel
Sommersemester 2023
Punktzahl: 16 Punkte

Funktionentheorie: Blatt 6

1. [2+2 = 4 Punkte]

(a) Es sei $f : D \to \mathbb{C}$ so, dass $f'(z) = 0$ für alle $z \in D$. Zeigen Sie: Dann ist f konstant.

(b) Beweisen Sie Bemerkung 120 (vi) (partielle Integration im Komplexen). Kann man auf die Vorraussetzung "$h_1', h_2' : (a,b) \to \mathbb{C}$ integrierbar" verzichten?

2. [1+1+1+1+1+1+1= 7 Punkte] Es sei $D := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\}$. Wir definieren $\tan : D \to \mathbb{C}$ durch $\tan(z) := \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$.

(a) Zeigen Sie, dass tan auf D injektiv ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\tan(D) = \mathbb{C} \setminus \{iy : y \in \mathbb{R}, |y| \geqslant 1\} =: U$.

(c) Zeigen Sie, dass $\tan'(z) = \frac{1}{\cos^2(z)} = 1 + \tan^2(z)$ für alle $z \in D$.

(d) Zeigen Sie, dass $\tan : D \to U$ biholomorph ist.

(e) Wir definieren $\arctan : U \to D$ durch $\arctan := \tan^{-1}$. Zeigen Sie $\arctan'(z) = \frac{1}{1+z^2}$ für alle $z \in U$.

(f) Finden Sie eine Potenzreihendarstellung für arctan in $B_1(0) \subset \Omega$, d.h. finden Sie eine Potenzreihe $P(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ mit Konvergenzradius 1 so, dass $\arctan(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ für alle $z \in B_1(0)$.

(g) Beweisen Sie, dass arctan auf $B_1(0)$ unbeschänkt ist. Vergleichen Sie mit dem reellen Arcustangens.

3. [2+1+2=5 Punkte]

(a) Lesen und beweisen Sie Proposition 134.

(b) Berechnen Sie

$$\int_{\partial B_1(0)} \bar{z} \, \mathrm{d}z \tag{1}$$

Ist es Zufall, dass das selbe Ergebnis wie in Beispiel 131 rauskommt?

(c) Zeigen Sie: Es gilt für alle $w \in \mathbb{C} \setminus \partial B_1(0)$ gilt

$$\int_{\partial B_1(0)} \frac{\bar{z}}{z-w} \, \mathrm{d}z = \int_{\partial B_1(0)} \frac{1}{1-wz} \, \mathrm{d}z.$$