Marius Müller
Saskia Glaffig
Simone Hermann
Wintersemester 2021/2022
Punktzahl: 15^* Punkte

Gewöhnliche Differentialgleichungen: Wiederholungsaufgaben

1. Wahr oder Falsch: Jede maximale Lösung ist eine nicht-fortsetzbare Lösung. (1^* Punkt)

2. Wahr oder falsch (mit Beweis/Gegenbeispiel) (2^* Punkte)
Ist $f \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ so, dass die Jacobimatrix $Df \in C^0(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^{n\times n})$ auf nur beschränkte Einträge hat, so erfüllt $(t, z) \mapsto f(z)$ eine globale Lipschitz-Bedingung auf $I = \mathbb{R}$.

3. Es erfülle $f \in C^0(I \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ eine globale Lipschitz-Bedingung. (1^* Punkt)
Zeigen Sie: Dann gibt es $c \in C^0(I; [0, \infty))$ mit

$$|f(s, z)| \leq c(s)(1 + |z|) \quad \forall s \in I \ \forall z \in \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

4. Es erfülle $f \in C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ eine lokale Lipschitzbedingung. (2^* Punkte)
Eine Funktion $V \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ heißt *Lyapunow-Funktion* für f, falls

- $\mathrm{grad}V(z) \cdot f(t, z) \leq 0$ für alle $(t, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$
- $V^{-1}((-\infty, c])$ ist kompakt für alle $c \in \mathbb{R}$.

Es sei nun für ein beliebiges $y_0 \in \mathbb{R}^n$ das AWP

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{2}$$

gegeben, wobei f eine Lyapunow-Funktion besitzt. Zeigen Sie, dass $I_{max} \supset [t_0, \infty)$.

5. Gegeben sei das Anfangswertproblem (2^* Punkte)

$$\begin{cases} y'(t) = t^2\sqrt{1 + y(t)^2}\arctan(y(t)^6) + 1 \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Zeigen Sie, dass eine eindeutige globale Lösung $y \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ existiert.

6. Gegeben sei das Anfangswertproblem (2^* Punkte)

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{1}{1+y(t)} \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{4}$$

Zeigen Sie, dass $I_{max} = (-\frac{1}{2}, \infty)$ und bestimmen Sie die maximale Lösung $y_{max} \in C^1(I_{max}, \mathbb{R})$.

7. Gegeben sei das Anfangswertproblem ($2^* + 1^* + 2^* = 5^*$ Punkte)

$$\begin{cases} 4t^3y(t)^3 + \left(\frac{1}{1+y(t)^2} + 3(t^4 + 1)y(t)^2\right) y'(t) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases} \tag{5}$$

(a) Bestimmen Sie ein Integral der Bewegung für die DGL.
(b) Zeigen Sie, dass eine eindeutige maximale Lösung $y \in C^1(I_{max}; \mathbb{R})$ existiert.
(c) Zeigen Sie, dass $I_{max} = \mathbb{R}$.

Lösungen.
Lösung zu Aufgabe 1. Die Aussage ist wahr. Es sei $y : I_{max} \to \mathbb{R}^n$ eine maximale Lösung. Wir zeigen, dass y nicht-fortsetzbar ist. Angenommen es gäbe ein $J \supsetneq I_{max}$ und eine Lösung $z \in C^1(J; \mathbb{R}^n)$ desselben Anfangswertproblems mit $z|_{I_{max}} = y$. Wegen der Maximalität von y (siehe Definition 95 und Satz 94 (2)) muss aber gelten, dass jede weitere Lösung eine Einschränkung von y sein muss, also ist auch $J \subset I_{max}$ und $z|_{I_{max}} = y$. Wir erhalten einen Widerspruch zu $J \supsetneq I_{max}$.

Lösung zu Aufgabe 2. Es ist zu zeigen, dass es ein $L > 0$ gibt mit

$$|f(z) - f(w)| \leq L|z - w| \quad \forall z, w \in \mathbb{R}^n \tag{6}$$

Dazu definiere

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, \quad h(t) := f(w + t(z - w)). \tag{7}$$

Es gilt nach der Kettenregel, dass $h'(t) = Df(w + t(z - w)) \cdot (z - w)$ für alle $t \in \mathbb{R}$

$$|f(z) - f(w)| = |h(1) - h(0)| = \left| \int_0^1 h'(s) \, \mathrm{d}s \right| \leq \int_0^1 |h'(s)| \, \mathrm{d}s \tag{8}$$

$$= \int_0^1 |Df(w + s(z - w)) \cdot (z - w)| \, \mathrm{d}s \tag{9}$$

Aufgrund der Voraussetzung gibt es nun ein $M > 0$ mit

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(v) \right| \leq M \quad \forall v \in \mathbb{R}^n \tag{10}$$

Nun ist die i-te Komponente von $Df(w + s(z - w)) \cdot (z - w)$ gegeben durch

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(w + s(z - w))(z_j - w_j). \tag{11}$$

Es gilt

$$\left| \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(w + s(z - w))(z_j - w_j) \right| \leq \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(w + s(z - w)) \right| |z_j - w_j| \leq \sum_{j=1}^{n} M|z_j - w_j| \tag{12}$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} M|z - w| = nM|z - w| \tag{13}$$

Daher gilt

$$|Df(w + s(z - w)) \cdot (z_j - w_j)| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(w + s(z - w))(z_j - w_j) \right|^2} \tag{14}$$

$$\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} n^2 M^2 |z - w|^2} = \sqrt{n^3 M^2 |z - w|^2} = n^{\frac{3}{2}} M|z - w|. \tag{15}$$

Lösung zu Aufgabe 3. Es erfülle $f \in C^0(I \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ eine globale Lipschitz-Bedingung. Dann gibt es $L > 0$ mit

$$|f(t, y) - f(t, z)| \leq L|y - z| \quad \forall y, z \in \mathbb{R}^n \; \forall t \in I. \tag{16}$$

Nun sei $s \in I$ und $z \in \mathbb{R}^n$. Wir schätzen ab

$$|f(s, z)| = |f(s, z) - f(s, 0) + f(s, 0)| \leq |f(s, z) - f(s, 0)| + |f(s, 0)| \leq L|z - 0| + |f(s, 0)|. \tag{17}$$

Daher gilt

$$|f(s, z)| \leq |f(s, 0)| + L|z| \leq (|f(s, 0)| + L) + (|f(s, 0) + L)|z| = (|f(s, 0)| + L)(1 + |z|) \tag{18}$$

Mit der Wahl $c(s) := |f(s, 0)| + L$ (für alle $s \in I$) folgt die Behauptung.
Lösung zu Aufgabe 4. Es sei $I_{max} = (t_-, t_+)$ das maximale Lösungsintervall und $y \in C^1(I_{max}; \mathbb{R}^n)$ die maximale Lösung. Zu zeigen ist, dass $t_+ = \infty$. Wir verwenden das Escape-Lemma (Lemma 123): Wenn

es ein $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt gibt mit $y(t) \in K$ für $t \in [t_0, t_+)$, so gilt $t_+ = \infty$. Wir setzen $c := V(y_0)$ und $K := V^{-1}((-\infty, c])$ und behaupten $y(t) \in K$ für alle $t \in [t_0, t_+)$. Dazu berechnen wir

$$\frac{d}{dt}V(y(t)) = DV(y(t)) \cdot y'(t) = \mathrm{grad}V(y(t)) \cdot f(t, y(t)) \leq 0. \tag{19}$$

Daher ist die Abbildung $t \mapsto V(y(t))$ monoton fallend und es gilt

$$V(y(t)) \leq V(y_0) = c, \tag{20}$$

mit anderen Worten $V(y(t)) \in (-\infty, c]$, als

$$y(t) \in V^{-1}((-\infty, c]). \tag{21}$$

Lösung zu Aufgabe 5. Wir verwenden das lineare Wachstumskriterium. Die DGL ist von der Form $y'(t) = f(t, y(t))$ mit $f(s, z) = s^2\sqrt{1 + z^2} \arctan(z^6) + 1$. Wir schätzen nun ab

$$|\arctan(z^6)| \leq \sup_{w\in\mathbb{R}} |\arctan(w)| = \frac{\pi}{2}, \tag{22}$$

und

$$\sqrt{1 + z^2} = \sqrt{1 + |z|^2} \leq \sqrt{1 + 2|z| + |z|^2} \leq \sqrt{(1 + |z|)^2} = 1 + |z|. \tag{23}$$

Wir erhalten

$$|f(s, z)| \leq \frac{\pi}{2}s^2(1 + |z|) + 1 \leq \frac{\pi}{2}s^2(1 + |z|) + (1 + |z|) \leq \left(\frac{\pi}{2}s^2 + 1\right)(1 + |z|) = c(s)(1 + |z|), \tag{24}$$

wobei wir im letzten Schritt $c(s) := \frac{\pi}{2}s^2 + 1$ definiert haben. Da $c \in C^1(\mathbb{R}; [0, \infty))$ ist, ist das lineare Wachstumskriterium für $I = \mathbb{R}$ erfüllt. Daher hat jedes Anfangswertproblem, auch das in der Aufgabe gestellte, globale Lösungen auf $\mathbb{R}$.

Lösung zu Aufgabe 6. Die Funktion $f : \mathbb{R} \times (-1, \infty)$, $f(t, z) := \frac{1}{1+z}$ erfüllt eine lokale Lipschitz-Bedingung. Daher existiert eine eindeutige maximale Lösung $y \in C^1(I_{max}; \mathbb{R})$. Es ist nun zu zeigen, dass $I_{max} = (-\frac{1}{2}, \infty)$. Hierfür bestimmen wir zunächst eine explizite Darstellung für y mittels Separation der Variablen. Hierzu sei $t \in I_{max} = (t_-, t_+)$ beliebig. Aus

$$y'(t) = \frac{1}{1 + y(t)} \tag{25}$$

folgt

$$(1 + y(t))y'(t) = 1. \tag{26}$$

Integrieren wir von 0 bis t so erhalten wir

$$\int_0^t (1 + y(s))y'(s)\ \mathrm{d}s = \int_0^t 1\ \mathrm{d}s = t. \tag{27}$$

Substituieren wir auf der linken Seite $u = y(s)$ (und nutzen, dass $\mathrm{d}u = y'(s)\mathrm{d}s$), so erhalten wir

$$\int_{y(0)}^{y(t)} (1 + u)\ \mathrm{d}u = t. \tag{28}$$

Verwenden wir nun, dass $y(0) = 0$, so erhalten wir

$$\int_0^{y(t)} (1 + u)\ \mathrm{d}u = t \tag{29}$$

Nutzen wir, dass die Stammfunktion von $(1 + u)$ durch $\frac{1}{2}(1 + u)^2 + C$ gegeben ist, so erhalten wir

$$\frac{1}{2}(1 + y(t))^2 - \frac{1}{2} = t. \tag{30}$$

Umgeformt ergibt das

$$(1 + y(t))^2 = 1 + 2t \tag{31}$$

Ziehen wir die Wurzel, so erhalten wir

$$1 + y(t) = \pm\sqrt{1 + 2t} \tag{32}$$

und daher

$$y(t) = -1 \pm \sqrt{1+2t} \quad \forall t \in I_{max}. \tag{33}$$

Es ist noch unklar wie "$\pm$" zu wählen ist. Dies können wir allerdings mit der Anfangswertbedingung $y(0) = 0$ herausfinden — diese ist nur im Fall "+" erfüllt. Das heißt also

$$y(t) = -1 + \sqrt{1+2t} \quad \forall t \in I_{max}. \tag{34}$$

Wir behaupten nun, dass $I_{max} = (-\frac{1}{2}, 0)$. Dies kann man mit dem Maximalitätskriterium überprüfen: Wir zeigen dazu (für $G = (-\infty, \frac{1}{2})$)

$$\liminf_{t \downarrow -\frac{1}{2}} \min\left\{ \operatorname{dist}(y(t); \mathbb{R}^n \setminus G), \frac{1}{|y(t)|+1} \right\} = 0 \tag{35}$$

und es gibt kein $T \in (0, \infty)$ mit

$$\liminf_{t \uparrow T} \min\left\{ \operatorname{dist}(y(t); \mathbb{R}^n \setminus G), \frac{1}{|y(t)|+1} \right\} = 0. \tag{36}$$

Nach dem Maximalitätskriterium folgt aus dieser Aussage $t_- = -\frac{1}{2}$ und $t_+ = \infty$. Zuerst zu $t_- = -\frac{1}{2}$:

$$\liminf_{t \downarrow -\frac{1}{2}} \operatorname{dist}(y(t), \mathbb{R}^n \setminus G) = \liminf_{t \downarrow -\frac{1}{2}} \operatorname{dist}(-1 + \sqrt{2t+1}, (-\infty, -1]) \tag{37}$$

$$\leq \liminf_{t \downarrow -\frac{1}{2}} |-1 + \sqrt{2t+1} - (-1)| = \liminf_{t \downarrow -\frac{1}{2}} \sqrt{2t+1} = \sqrt{2 \cdot (-\tfrac{1}{2}) + 1} = 0. \tag{38}$$

Somit ist (35) gezeigt. Nun zu (36). Für $t \in (0, \infty)$ gilt

$$y(t) = -1 + \sqrt{2t+1} \geq 0, \tag{39}$$

und daher

$$\operatorname{dist}(y(t); \mathbb{R}^n \setminus G) = \operatorname{dist}(y(t); (-\infty, -1]) = |y(t) - (-1)| = |y(t) + 1| \geq 1. \tag{40}$$

Eine Escape-Situation ist somit bei jedem $T \in (0, \infty)$ ausgeschlossen. Zun schließen wir auch noch eine Blow-Up Situation aus. Für jedes $T \in (0, \infty)$ gilt

$$\liminf_{t \uparrow T} \frac{1}{1+|y(t)|} = \liminf_{t \uparrow T} \frac{1}{1 + (-1 + \sqrt{2t+1})} = \liminf_{t \uparrow T} \frac{1}{+\sqrt{2t+1}} = \frac{1}{\sqrt{2T+1}} > 0. \tag{41}$$

Die Behauptung ist damit gezeigt.

Lösung zu Aufgabe 7a. Die DGL hat die Form

$$p(t, y(t)) + q(t, y(t))y'(t) = 0 \tag{42}$$

wobei $p(\tau, z) = 4\tau^3 z$ und $q(\tau, z) = \frac{1}{1+z^2} + 3(\tau^4+1)z^2$. Wir suchen nun eine Funktion $\phi \in C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ mit $\nabla\phi = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$. Um ϕ zu finden integrieren wir p nach τ und erhalten

$$\phi(\tau, z) = \tau^4 z^3 + c(z) \tag{43}$$

für eine nur von z abhängige Funktion c. Ferner integrieren wir q nach z und erhalten

$$\phi(\tau, z) = \arctan(z) + (\tau^4+1)z^3 + \tilde{c}(\tau) \tag{44}$$

für eine nur von τ abhängige Funktion $\tilde{c}$. Vergleichen wir die Ausdrücke aus den beiden vorigen Gleichungen so erhalten wir, dass

$$\phi(\tau, z) = \arctan(z) + (\tau^4+1)z^3 \tag{45}$$

eine sinnvolle Wahl ist. Es gilt, wie i der Vorlesung (Beispiel 57) gesehen, für jede Lösung $y \in C^1(J; \mathbb{R})$ der DGL, dass

$$\phi(t, y(t)) \equiv \text{const.}, \quad \text{d.h.} \quad \arctan(y(t)) + (t^4+1)y(t)^3 \equiv \text{const.} \quad (t \in J). \tag{46}$$

Lösung zu Aufgabe 7b. Wir möchten den lokalen Satz von Picard-Lindelöf anwenden. Hierzu benötigt die DGL jedoch zuerst die Gestalt "$y'(t) = f(t, y(t))$" Um diese Form zu erhalten, formen wir um.

$$\begin{aligned}
4ty(t)^3 + \left(\tfrac{1}{1+y(t)^2} + 3(t^4+1)y(t)^2\right) y'(t) &= 0 && (47)\\
\Leftrightarrow \quad \left(\tfrac{1}{1+y(t)^2} + 3(t^4+1)y(t)^2\right) y'(t) &= -4ty(t)^3 && (48)\\
\Leftrightarrow \quad y'(t) &= \frac{1}{\frac{1}{1+y(t)^2} + 3(t^4+1)y(t)^2}(-4ty(t)^3) && (49)\\
\Leftrightarrow \quad y'(t) &= \frac{-4ty(t)^3(1+y(t)^2)}{1+3(t^4+1)y(t)^2(1+y(t)^2)}. && (50)
\end{aligned}$$

Nun ist die DGL also von der Form $y'(t) = f(t, y(t))$ mit

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(t,z) := \frac{-4tz^3(1+z^2)}{1+3(t^4+1)z^2(1+z^2)}. \tag{51}$$

Da diese Funktion in $C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$ liegt, erfüllt sie eine lokale Lipschitz-Bedingung. Daher hat das oben gegebene AWP eine eindeutige maximale Lösung $y \in C^1(I_{max}; \mathbb{R})$.

Lösung zu Aufgabe 7c. Es sei $I_{max} = (t_-, t_+)$. Es gibt nun zwei Möglichkeiten, die Aufgabe zu lösen.

Lösungsalternative 1. Wir zeigen, dass f aus (51) eine lineare Wachstumsbedingung erfüllt. Dazu berechnen wir für $t \in \mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
|f(t,z)| = \frac{4|t|\,|z|^3(1+z^2)}{1+3(t^4+1)z^2(1+z^2)} &\leq \frac{4|t|\,|z|^3(1+z^2)}{3(t^4+1)z^2(1+z^2)} && (52)\\
&= \frac{4|t|}{3(t^4+1)}\frac{|z|^3}{|z|^2} \leq \frac{4|t|}{3(t^4+1)}|z| \leq \frac{4|t|}{3(t^4+1)}(1+|z|). && (53)
\end{aligned}$$

Die lneare Wachstumsbedingung ist damit mit $c(t) := \frac{4|t|}{3(t^4+1)}$ erfüllt.

Lösungsalternative 2. Wir benutzen das Integral der Bewegung um zu zeigen, dass alle Lösungen beschränkt sind. Dazu sei $c \in \mathbb{R}$ so, dass $\arctan(y(t)) + (t^4+1)y(t)^3 = c$ für alle $t \in I_{max}$. Dann gilt mit der umgekehrten Dreiecksungleichung

$$|c| = |\arctan(y(t)) + (t^4+1)y(t)^3| \geq (t^4+1)|y(t)|^3 - |\arctan(y(t))|. \tag{54}$$

Formen wir um, so erhalten wir

$$(t^4+1)|y(t)|^3 \leq |c| + |\arctan(y(t))| \leq |c| + \frac{\pi}{2}, \tag{55}$$

da $|\arctan|$ auf $\mathbb{R}$ durch $\frac{\pi}{2}$ beschränkt ist. Nun gilt für alle $t \in \mathbb{R}$

$$|y(t)|^3 \leq (t^4+1)|y(t)|^3 \leq |c| + \frac{\pi}{2}, \tag{56}$$

d.h.

$$|y(t)| \leq \sqrt[3]{|c| + \frac{\pi}{2}} \quad \forall t \in I_{max} = (t_-, t_+) \tag{57}$$

Damit kann weder bei t_- noch bei t_+ eine Blow-Up-Situation auftreten. Da $G = \mathbb{R}$ ist, kann auch keine Escape-Situation auftreten. Wir folgern die Globalität mit dem Maximalitätskriterium. Da $I = \mathbb{R}$ gilt somit $t_- = -\infty$ und $t_+ = \infty$.

Vergleich der beiden Lösungsalternativen. Man kann sich bei beiden Lösungsalternativen im Allgemeinen nicht darauf verlassen, dass sie anwendbar sind. Es ist nur der guten Struktur der DGL geschuldet, dass die Funktion f aus (51) eine lineare Wachstumsbedingung erfüllt. Aber auch die Existenz eines Integrals der Bewegung benutzt viel Struktur, nämlich die *Exaktheit* der Differentialgleichung. Wir haben in Beispiel 53 gesehen, dass diese Exaktheit nicht für jede beliebige Funktion p und q gilt. Im Gegenteil: Es ist notwendig (und auf $\mathbb{R}^2$ auch hinreichend), dass $\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial q}{\partial \tau}$. Es gibt hier also nicht die "bessere" Lösungsalternative. Man muss bei beiden Alternativen austesten, ob sie funktionieren.