Übungsblatt

Abgabe am:
Montag, 28.11.2022

Marius Müller
Robert Baumgarth
Wintersemester 2022/2023
Punktzahl: $16 + 2^*$ Punkte

UNIVERSITÄT LEIPZIG

Gewöhnliche Differentialgleichungen: Blatt 7

1. [1+1+1=3 Punkte]

(a) Zeigen Sie: Erfüllt $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^n)$ eine globale Lipschitz-Bedingung und hängt f nicht von τ ab, so ist f gleichmäßig stetig.

(b) Gilt diese Folgerung auch, wenn f von τ abhängen darf?

(c) Erfüllt jede Funktion $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^n)$, die auf $I \times G$ gleichmäßig stetig ist, eine lokale Lipschitzbedingung?

2. [1+2= 3 Punkte] Es sei $f \in C^1(I \times G; \mathbb{R}^n)$.

(a) Zeigen Sie: Ist G konvex und $|D_z f(\tau, z)| \leq L$ für alle $(\tau, z) \in I \times G$ so erfüllt f eine globale Lipschitzbedingung.

(b) Kann auf die Konvexität von G verzichtet werden?
Hinweis: Betrachten Sie $G = (B_1(0) \setminus \overline{B_{\frac{1}{2}}(0)}) \setminus \{(x, 0) : x \geq 0\}$ und zeigen Sie zuerst, dass $\Phi : (\frac{1}{2}, 1) \times (0, 2\pi) \to G$, $\Phi(r, \theta) := (r\cos\theta, r\sin\theta)$ eine stetig differenzierbare Umkehrabbildung hat. Folgern Sie die Existenz einer stetig differenzierbaren Abbildung $f : G \to \mathbb{R}$ mit $f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \theta$ für alle $r \in (\frac{1}{2}, 1)$ und $\theta \in (0, 2\pi)$.

3. [2+2= 4 Punkte] Wir vollenden den Beweis zum Satz von Kirszbraun-Valentine. Es sei dazu $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $I \subset \mathbb{R}$ offen, sowie $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^m)$ stetig mit

$$|f(\tau, z_2) - f(\tau, z_1)| \leq L|z_2 - z_1| \quad \forall \tau \in I \ \forall z_1, z_2 \in G \tag{1}$$

(a) Es sei zunächst $m = 1$ und wie in Gleichung (412) $F(\tau, z) := \inf_{w \in G}\{f(\tau, w) + L|w - z|\}$. Zeigen Sie, dass F reellwertig ist.

(b) Beweisen Sie den Satz im Fall $m > 1$. Sie dürfen dabei die Aussage für $m = 1$ verwenden.

4. [$2 + 2 + 2 + 2^*$= 8 Punkte] Im Folgenden bezeichnet für $k \geq 1$

$$C_b^k(I; \mathbb{R}) := \{f : I \to \mathbb{R}\ f \text{ ist beschränkt, stetig und } k\text{-mal stetig differenzierbar}\}. \tag{2}$$

Ferner definieren wir für zwei Funktion $u, v : I \to \mathbb{R}$ stets $d_\infty(u, v) := \sup_{x \in I} |u(x) - v(x)| \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

(a) Ist $(C_b^1(I; \mathbb{R}); d_\infty)$ ein vollständiger metrischer Raum?
Hinweis: Zeigen Sie, dass durch $u_n(x) := \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$ eine Cauchy-Folge in $(C_b^1((-1, 1); \mathbb{R}), d_\infty)$ gegeben ist.

(b) Ist $(C^0(I; \mathbb{R}); d_\infty)$ ein vollständiger metrischer Raum? Hinweis: Ist d_∞ hier überhaupt eine Metrik?

(c) Es sei $I = \bigcup_{k=1}^\infty I_k$ für beschränkte Intervalle I_k mit $\overline{I_k} \subset I$ und $I_k \subset I_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Definieren Sie für $u, v \in C^0(I; \mathbb{R})$

$$d_A(u, v) := \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{2^k} \frac{\sup_{x \in I_k} |u(x) - v(x)|}{1 + \sup_{t \in I_k} |u(x) - v(x)|}. \tag{3}$$

Zeigen Sie, dass d_A eine Metrik auf $C^0(I; \mathbb{R})$ definiert. (Dreiecksungleichung nicht vergessen!)

(d*) Sei d_A wie in der vorigen Teilaufgabe. Zeigen Sie: $(C^0(I; \mathbb{R}), d_A)$ ist ein vollständiger metrischer Raum.