Uni Freiburg

Marius Müller
Saskia Glaffig
Simone Hermann
Wintersemester 2021/2022

Gewöhnliche Differentialgleichungen: Formelsammlung

Notation: $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $n, m \in \mathbb{N}$.

Lösungsformeln

1. Separation der Variablen: $g \in C^0(I)$ und $h \in C^0(\mathbb{R})$, so dass $h(z) \neq 0\ \forall z \in \mathbb{R}$. Sei G eine Stammfunktion von g und H eine Stammfunktion von $\frac{1}{h}$. Dann ist h invertierbar und falls $G(I) \subset H(\mathbb{R})$, ist $y := H^{-1} \circ G \in C^1(I \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$ eine Lösung von $y'(t) = g(t)h(y(t))$ $(t \in I)$.

2. Lineare DGLs: $y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$ $(t \in \mathbb{R})$ mit $a, b \in C^0(I; \mathbb{R})$, $e(t) := \exp\left(\int^t a(s)\mathrm{d}s\right)$, $t \in I$.
$$\mathbb{L} = \left\{ y \in C^1(I) \mid \exists c \in \mathbb{R} : y(t) = \left(c + \int^t \frac{b(u)}{e(u)}\mathrm{d}u\right) e(t)\, \forall t \in I \right\}$$

3. Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten: $y' = Ay$ für ein $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ Eigenwerte zu A. Dann ist eine Fundamentalmatrix für die DGL gegeben durch $M(t) = e^{(t-t_0)A}$ $(t \in \mathbb{R})$.

   - Spezialfall $\exists S \in \mathbb{C}^{n \times n}$, s.d. $S^{-1}AS$ Diagonalmatrix:
   $$E(t) := \operatorname{diag}\left(e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}\right),$$
   dann
   $$\mathbb{L} = \left\{ y \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}^n) \mid \exists c \in \mathbb{C}^n : y(t) = SE(t)c\, \forall t \in \mathbb{R} \right\}$$
   - Spezialfall $\exists S \in \mathbb{C}^{n \times n}$, s.d. $S^{-1}AS$ Jordan-Block zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$:
   $$E(t)_{ij} := \begin{cases} \frac{t^{j-i}}{(j-i)!}e^{\lambda t} & \text{falls } j \geq i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$
   dann
   $$\mathbb{L} = \left\{ y \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}^n) \mid \exists c \in \mathbb{C}^n : y(t) = SE(t)c\, \forall t \in \mathbb{R} \right\}.$$
   - Speziell $n = 2$:
   Es existiert ein $S \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$, s.d. $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix mit Diagonalelementen $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ oder ein Jordan-Block zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ ist. Es gilt
   $$\mathbb{L} = \left\{ y \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}^2) \mid \exists c \in \mathbb{C}^2 : y(t) = SE(t)c\, \forall t \in \mathbb{R} \right\},$$
   wobei
   $$E(t) := \begin{cases} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} & \text{falls } A \text{ diagonalisierbar} \\ \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Integrale der Bewegung und Energieerhaltung

1. Exakte DGL: $p(t, y(t)) + q(t, y(t))y'(t) = 0$ $(t \in I)$ für $p, q \in C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ mit $\partial_1 q = \partial_2 p$ auf $\mathbb{R}^2$. Dann ist $\phi \in C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ mit $\nabla\phi = \binom{p}{q}$ ein Integral der Bewegung.

2. Energieerhaltung: $y \in C^2(I; \mathbb{R}^n)$ Lösung von $y''(t) = -\nabla U(y(t))$ $(t \in I)$ mit $U \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$. Dann gilt $\frac{1}{2}|y'(t)|^2 + U(y(t)) \equiv \text{const}$.

Lipschitz-Bedingungen

1. Globale Lipschitz-Bedingung: Eine Funktion $f \in C^0(I \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ erfüllt eine globale Lipschitz-Bedingung auf I falls es ein $L > 0$ gibt mit
$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \quad \forall t \in I \; \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n.$$
2. Lokale Lipschitz-Bedingung: Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Teilgebiet von $\mathbb{R}^n$. Eine Funktion $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^m)$ erfüllt eine lokale Lipschitz-Bedingung falls es zu jedem $(t_0, y_0) \in I \times G$ ein $\epsilon > 0$ sowie ein $r > 0$ und ein $L > 0$ gibt mit $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \subset I$ sowie $B_r(y_0) \subset G$ und
$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \quad \forall t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \; \forall y_1, y_2 \in B_r(y_0).$$

Sätze von Picard-Lindelöf

1. Globale Version: Erfüllt $f \in C^0(I \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ eine globale Lipschitz-Bedingung auf I, dann hat für alle $t_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{R}^n$ das AWP
$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \quad (t \in I) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$
eine eindeutige Lösung.
2. Lokale Verison: Ist $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Teilgebiet und erfüllt $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^n)$ eine lokale Lipschitz-Bedingung, dann gibt es zu jedem $(t_0, y_0) \in I \times G$ ein eindeutiges offenes Intervall $I_{max} \subset I$ mit $t_0 \in I_{max}$ und eine eindeutige maximale Lösung $y_{max} \in C^1(I_{max}; G)$ des AWP's
$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Picard-Iteration

Es sei $t_0 \in I$, $-\infty < a < t_0 < b < \infty$, $f \in C^0(I \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ und
$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \quad (t \in I) \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \tag{1}$$
Ist $z_0 \in C^0((a, b); \mathbb{R}^n)$, dann sind die Picard-Iterierten für $j \in \mathbb{N}$ gegeben durch
$$z_j(t) := T z_{j-1}(t) := y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, z_{j-1}(s)) \mathrm{d}s, \qquad t \in (a, b).$$
Erfüllt f eine globale Lipschitz-Bedingung auf I und ist $y \in C_b^0((a, b); \mathbb{R}^n)$ die eindeutige Lösung von (1) auf (a, b), dann gilt für den Fehler der Picard-Iterierten
$$d_\infty(z_j, y) = \sup_{t \in (a,b)} |z_j(t) - y(t)| \leq \frac{L^j (b-a)^j}{j!} d_\infty(z_0, y)$$
für jedes $j \in \mathbb{N}$, wobei $L > 0$ die Lipschitzkonstante von f bezeichnet.

Einige wichtige Resultate

1. Lineares Wachstumskriterium: Es erfülle $f \in C^0(I \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ eine lokale Lipschitz-Bedingung und sei $t_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Ferner gebe es $c \in C^0(I; [0, \infty))$ mit
$$|f(s, z)| \leq c(s)(1 + |z|) \quad \forall s \in I \; \forall z \in \mathbb{R}^n.$$
Es sei das AWP
$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \quad (t \in I) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$
gegeben. Dann gibt es eine eindeutige globale Lösung $y \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$.

2. MAXIMALITÄTSKRITERIUM: Es seien $I = (a, b)$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$, $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Teilgebiet und $(t_0, y_0) \in I \times G$. Ferner erfülle $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^n)$ eine lokale Lipschitz-Bedingung und es sei $J = (t_-, t_+) \subset I$. Es sei $y \in C^1(J; G)$ eine Lösung von

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & (t \in J) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) $J = I_{max}$ und $y = y_{max}$.

(b) Es gilt $t_+ = b$ oder

$$\liminf_{t \uparrow t_+} \min \left\{ \operatorname{dist}(y(t), \mathbb{R}^n \setminus G), \frac{1}{|y(t)| + 1} \right\} = 0.$$

Ferner gilt $t_- = a$ oder

$$\liminf_{t \downarrow t_-} \min \left\{ \operatorname{dist}(y(t), \mathbb{R}^n \setminus G), \frac{1}{|y(t)| + 1} \right\} = 0.$$

Hierbei verwenden wir für den Fall $G = \mathbb{R}^n$ die Konvention $\operatorname{dist}(z, \emptyset) = \infty$ für alle $z \in \mathbb{R}^n$.

3. LEMMA VON GRONWALL: Für $u_0, t_0, T \in \mathbb{R}$ mit $t_0 < T$ und $u, v \in C^0([t_0, T]; \mathbb{R})$ mit $v(t) \geq 0$, $u(t) \leq u_0 + \int_{t_0}^t u(s)v(s)\mathrm{d}s$ für alle $t \in [t_0, T]$ gilt

$$u(t) \leq u_0 \exp \int_{t_0}^t v(s)\mathrm{d}s \qquad \forall t \in [t_0, T].$$

4. SATZ VON KIRSZBRAUN: Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $J \subset \mathbb{R}$ offen. Es sei $f : J \times U \to \mathbb{R}^n$ so, dass ein $L > 0$ existiert mit

$$|f(t, y) - f(t, z)| \leq L|y - z| \quad \forall y, z \in U \ \forall t \in J.$$

Dann gibt es eine Funktion $F : J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $F\big|_{J \times U} = f$ und

$$|F(t, y) - F(t, z)| \leq \sqrt{n} L|y - z| \quad \forall y, z \in \mathbb{R}^n \ \forall t \in J.$$

Insbesondere erfüllt F eine globale Lipschitz-Bedingung auf J. Falls $f \in C^0(J \times U; \mathbb{R}^n)$, so ist $F \in C^0(J \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$.

5. STETIGE ABHÄNGIGKEIT: Es erfülle $f \in C^0(I \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ eine globale Lipschitz-Bedingung mit Lipschitz-Konstante $L > 0$. Ferner seien $y, z \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$ die eindeutigen Lösungen von

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & (t \in I), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

und

$$\begin{cases} z'(t) = f(t, z(t)) & (t \in I), \\ z(t_0) = z_0. \end{cases}$$

Dann gilt

$$|y(t) - z(t)| \leq e^{L|t - t_0|}|y_0 - z_0| \quad \forall t \in I.$$

Stammfunktionen und Ableitungen

Hinweise: Ist F Stammfunktion von f, dann auch $F + c$ für jedes $c \in \mathbb{R}$. Definitionsintervalle sind hier nicht näher angegeben und werden als bekannt vorausgesetzt.

Funktion $f(x)$	Stammfunktion $F(x)$	Ableitung $f'(x)$
$\tan x$	$-\log\lvert\cos x\rvert$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\sin^2 x$	$\frac{1}{2}(x - \sin x \cdot \cos x)$	$2 \sin x \cdot \cos x$
$\cos^2 x$	$\frac{1}{2}(x + \sin x \cdot \cos x)$	$-2 \sin x \cdot \cos x$
$\arcsin x$	$x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$x \arccos x - \sqrt{1 - x^2}$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$x \arctan x - \frac{1}{2}\log(1 + x^2)$	$\frac{1}{x^2+1}$
$\tanh x$	$\log \cosh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$
$\operatorname{Arsinh} x$	$x \operatorname{Arsinh} x - \sqrt{x^2 + 1}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\operatorname{Arcosh} x$	$x \operatorname{Arcosh} x - \sqrt{x^2 - 1}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{Artanh} x$	$x \operatorname{Artanh} x + \frac{1}{2}\log(1 - x^2)$	$\frac{1}{1-x^2}$