UNIVERSITÄT LEIPZIG

Übungsblatt

Abgabe am:
Dienstag, 02.05.2023

Marius Müller
Bernd Käßemodel
Sommersemester 2023
Punktzahl: 20 Punkte

Funktionentheorie: Blatt 4

1. [2+2+1=5 Punkte] Vollenden Sie den Beweis von Proposition 81, d.h. zeigen Sie:

(a) $A \subset \mathbb{C}$ abgeschlossen und beschränkt in $(\mathbb{C}, d) \Rightarrow A$ abgeschlossen in $(\mathbb{C}_\infty, \chi)$.

(b) $A = \mathbb{C}_\infty \setminus U$ für ein $U \subset \mathbb{C}$ offen in $(\mathbb{C}, d) \Rightarrow A$ abgeschlossen in $(\mathbb{C}_\infty, \chi)$.

(c) Nutzen Sie nun Proposition 81, um die offenen Mengen $D \subset (\mathbb{C}_\infty, \chi)$ zu charakterisieren. Ist $\mathbb{C}_\infty \setminus \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}$ offen in $(\mathbb{C}_\infty, \chi)$? Ist $\mathbb{C}_\infty \setminus \mathbb{R}$ offen in $(\mathbb{C}_\infty, \chi)$?

2. [1+1+1+1=4 Punkte] Es sei $T : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ eine Möbiustransformation assoziiert zu $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C})$.

(a) Zeigen Sie: Ist $c \neq 0$ so gibt es ein $w \in \mathbb{C}$ mit $T(w) = w$.

(b) Zeigen Sie: Es gibt eine Möbiustransformation $\tilde{T}$ mit der Eigenschaft, dass $(\tilde{T}^{-1} \circ T \circ \tilde{T})(\infty) = \infty$.

(c) Folgern Sie, dass jede Matrix $M \in GL_2(\mathbb{C})$ ähnlich zu einer oberen Dreiecksmatrix ist. Genauer: Für alle $M \in GL_2(\mathbb{C})$ gibt es ein $S \in GL_2(\mathbb{C})$ mit $S^{-1}MS = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$.

(d) Können Sie mithilfe von Möbiustransformationen auch zeigen, dass jede Matrix $M \in GL_2(\mathbb{C})$ ähnlich zu ihrer Jordan'schen Normalform ist?

3. [1+2+1=5 Punkte] Im Folgenden wollen wir zwei alternative Beweise von Proposition 91 vorstellen. Einer steht im Skript, den anderen finden Sie in Teilaufg (b) und (c). Ein Vorteil des letzteren Beweises ist, dass er kurz und elegant ist. Ein Vorteil des Beweises im Skript ist, dass die Bilder der Inversion expliziter verstanden werden.

(a) Lesen Sie den Beweis von Proposition 91.

(b) Zeigen Sie: Eine abgeschlossene nichtleere Menge $A \subset (\mathbb{C}_\infty, \chi)$, $A \neq \{\infty\}$ ist genau dann eine Gerade oder ein Kreis, wenn es $\alpha, \delta \in \mathbb{R}$ und $\beta \in \mathbb{C}$ gibt mit $(\alpha, \beta, \delta) \neq (0, 0, 0)$

$$z \in A \cap \mathbb{C} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha|z|^2 + \beta z + \overline{\beta}\overline{z} + \delta = 0.$$

(c) Nutzen Sie Teilaufgabe (b) um zu folgern, dass Möbius-Inversionen von Geraden oder Kreisen wieder Geraden oder Kreise sind. Folgern Sie Proposition 91

4. [1+2+2+1=6 Punkte]

(a) Wahr oder Falsch? Der in Gleichung (290) definierte Gruppenhomomorphismus $\Phi : GL_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{Moeb}(\mathbb{C}_\infty)$ ist bijektiv.

(b) Finden Sie eine Möbiustransformation $T : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ mit $T(1) = i, T(i) = 0, T(-1) = -i$

(c) Finden Sie eine Möbiustransformation, die $B_1(0)$ auf $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0\}$ abbildet.

(d) Es sei $\psi : \mathbb{S}^2_{Rm} \to \mathbb{C}_\infty$ stereographische Projektion und für $\theta \in (-\pi, \pi]$ sei $T(z) := e^{i\theta}z$ die Möbiustransformation, die die *Drehung um den Winkel θ* beschreibt. Berechnen Sie $\psi^{-1} \circ T \circ \psi : \mathbb{S}^2_{Rm} \to \mathbb{S}^2_{Rm}$ und interpretieren Sie geometrisch.