UNIVERSITÄT LEIPZIG

Übungsblatt

Abgabe am:
Montag, 14.11.2022

Marius Müller
Robert Baumgarth
Wintersemester 2022/2023
Punktzahl: 15 Punkte

Gewöhnliche Differentialgleichungen: Blatt 5

1. [2+2+1 = 5 Punkte] Sei $I \subset (0, \infty)$ ein Intervall.

(a) Bestimmen Sie für $\alpha \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung von

$$\alpha + y(t)^2 + \arctan(t) + \frac{t}{1+t^2} + 2ty(t)y'(t) = 0 \qquad (t \in I). \tag{1}$$

(b) Bestimmen Sie für alle $\ell > 0, \alpha \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung von

$$\ell(\alpha + y(t)^2 + \arctan(t)) + \frac{t}{1+t^2} + 2ty(t)y'(t) = 0 \qquad (t \in I). \tag{2}$$

(c) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ hat die Gleichung in (a) Lösungen, die auf $I = (0, \infty)$ definiert sind?

2. [2+2+2 = 6 Punkte]

(a) Finden Sie eine Lösung von

$$\begin{cases} y''(t) = e^{2y(t)} & (t \in I) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \tag{3}$$

für ein möglichst großes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $0 \in I$.

(b) Finden Sie eine Lösung von

$$\begin{cases} y''(t) = e^{2y(t)} & (t \in I) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = \sqrt{2} \end{cases} \tag{4}$$

für ein möglichst großes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $0 \in I$.

(c) Finden Sie eine Lösung von

$$\begin{cases} y''(t) = e^{2y(t)} & (t \in I) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \tag{5}$$

für ein möglichst großes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $0 \in I$.

3. [2+1+1=4 Punkte] Es sei $f \in C^1((a,b);\mathbb{R})$ konvex.

(a) Zeigen Sie: Für alle $x_0 \in (a,b)$ gilt

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \forall x \in (a,b). \tag{6}$$

(b) Zeigen Sie: Erfüllt $x_0 \in (a,b)$, dass $f'(x_0) = 0$, so ist x_0 eine globale Minimumsstelle von f auf (a,b).

(c) Formulieren Sie analoge Aussagen von Teilaufgabe (a) und (b) für konkave Funktionen.