Marius Müller
Saskia Glaffig
Simone Hermann
Wintersemester 2021/2022
Punktzahl: 7 Punkte

Gewöhnliche Differentialgleichungen: Blatt 7

1. [Wiederholungsübung, siehe Übung 14, p. 16] Differentialungleichungen und exponentielles Wachstum. (2 Punkte)
Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t)) \quad (t \in \mathbb{R}) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{1}$$

wobei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $\frac{f(z)}{z} \geq c$ für alle $z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ($c \in \mathbb{R}$ beliebig) und $y_0 > 0$. Zeigen Sie, dass

$$y(t) \geq y_0 e^{ct} \quad \forall t \in (0, \infty). \tag{2}$$

2. [siehe Übung 88, p.94] Unabdingbarkeit der Vorraussetzung '$G = \mathbb{R}^n$' für den globalen Satz von Picard-Lindelöf. (2 Punkte)
Sei $G = (0, 1) \subset \mathbb{R}^1$ und $f : \mathbb{R} \times (0, 1) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(t, z) := z \quad (t, z) \in \mathbb{R} \times G. \tag{3}$$

Zeigen Sie, dass das AWP

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \quad (t \in \mathbb{R}) \\ y(0) = \frac{1}{2} \end{cases} \tag{4}$$

keine Lösung auf $I = \mathbb{R}$ besitzt. Besitzt das AWP auf einer offenen Teilmenge von I eine eindeutige Lösung?

3. [siehe Übung 89, p.94] Globalität des Fadenpendels. (3 Punkte)
Zeigen Sie, dass für alle $\varphi_0, \alpha_0 \in \mathbb{R}$ die Gleichung

$$\begin{cases} \varphi''(t) = -\omega^2 \sin(\varphi(t)) \quad (t \in \mathbb{R}) \\ \varphi(0) = \varphi_0 \\ \varphi'(0) = \alpha_0 \end{cases} \tag{5}$$

eine eindeutige globale Lösung $\varphi \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ besitzt.