ÜBUNGSBLATT

Abgabe am:
Montag, 16.01.2023 (fakultativ)

Marius Müller
Robert Baumgarth
Wintersemester 2022/2023
Punktzahl: $\leqslant 10*$

Gewöhnliche Differentialgleichungen: Probeklausur

Die erworbenen Punkte dieses Übungsblattes zählen zu einem Zehntel (immer aufgerundet) als zusätzliche Übungspunkte der Zulassungsvoraussetzung.

Die Bearbeitungszeit beträgt 150 Minuten (= 2,5 Stunden). Als Hilfsmittel ist ein handgeschriebenes Blatt (Vorder- und Rückseite) DIN A4 zugelassen. Es wird nur der Stoff bis einschließlich der letzten Vorlesung vor Weihnachten abgefragt. Für den kommenden Stoff werden später Wiederholungsaufgaben bereitgestellt.

1. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL (10 Punkte)

$$ty'(t) + 2y(t) = \sin t.$$

2. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des DGL-Systems (15 Punkte)

$$z'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} z(t).$$

3. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL (15 Punkte)

$$y''(t) - 8y'(t) + 17y(t) = 0.$$

4. Bestimmen Sie die eindeutige maximale Lösung des Anfangswertproblems (15 Punkte)

$$\begin{cases} y'(t) &= & 1 + y(t)^2 \\ y(0) &= & 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass es sich tatsächlich um die maximale Lösung handelt.

5. Es sei $y \in \mathsf{C}^1(I;\mathbb{R})$ eine Lösung der DGL $y'(t) = y(t)^2$ $(t \in I)$. (10 Punkte)

Wahr oder falsch: Ist $y(t_0) \neq 0$ für ein $t_0 \in I$, so ist $y(t) \neq 0$ für alle $t \in I$.

6. Gegeben Sei die DGL (10 Punkte)

$$ty(t)\,(1 - y'(t)) - y(t)^2 + \frac{y'(t)}{y(t)} = 0.$$

Prüfen Sie, ob die DGL exakt ist. Bestimmen Sie (wenn nötig den integrierenden Faktor und damit) die allgemeine Lösung.

7. Wahr oder falsch (mit Beweis oder Gegenbeispiel): (15 Punkte)

Erfüllt $f \in \mathsf{C}^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ eine globale Lipschitz-Bedingung, dann auch der Betrag $|f|$ von f.

8. Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem (10 Punkte)

$$\begin{cases} y'(t) &= & t + \sqrt{1 + y(t)^2} \qquad (t \in \mathbb{R}) \\ y(0) &= & 0. \end{cases}$$

eine eindeutige globale Lösung $y \in \mathsf{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ hat.

1 Lösungen

Lösungsvorschlag zur Aufgabe 1.

Eine lineare inhomogene DGL ist von der Form

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t) \qquad (t \in I) \tag{1}$$

wobei $a, b \in \mathsf{C}^0(I;\mathbb{C})$ gegeben sind als

$$a(t) = -\frac{2}{t} \qquad \text{und} \qquad b(t) = \frac{\sin t}{t}.$$

Variante 1 Die allgemeine Lösung $y(t)$ ergibt sich als Superposition von homogener $y_h(t)$ und *einer* speziellen Lösung $y_s(t)$.

Die homogene DGL können wir mit Trennung der Veränderlichen lösen:

$$\begin{aligned} & ty'(t) + y(t) = 0 \\ \implies \quad & \frac{y'(t)}{y(t)} = -2\frac{1}{t} \\ \implies \quad & \int^{y(t)} \frac{\mathrm{d}u}{u} = -2\int^t \frac{\mathrm{d}s}{s} \\ \implies \quad & \ln|y(t)| = -2\ln|t| + \tilde{C} \\ \implies \quad & y(t) = \frac{C}{t^2}, \qquad C := e^{\tilde{C}} \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{2}$$

Für die spezielle Lösung können wir Variation der Konstanten verwenden. D.h. wir wählen den Ansatz, $C = C(t)$,

$$y_s(t) = \frac{C(t)}{t^2}, \qquad \implies \qquad y_s'(t) = \frac{C'(t)}{t^2} - \frac{2tC(t)}{t^3}.$$

Einsetzen in die Ausgangs-DLG (1) ergibt

$$t\frac{C'(t)}{t^2} - \frac{2tC(t)}{t^3} + 2\frac{C(t)}{t^2} \stackrel{!}{=} \sin t$$

also

$$C'(t) = t\ \sin t \qquad \implies \qquad C(t) = C + \sin t - t\ \sin t, \qquad C \in \mathbb{R}$$

und einsetzen in die homogene DGL (2) ergibt

$$y(t) = \frac{C}{t^2} + \frac{\sin t}{t^2} - \frac{\cos t}{t}.$$

Daher gilt

$$\mathbb{L} = \left\{ y \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R}) : y(t) = \frac{c}{t^2} + \frac{\sin t}{t^2} - \frac{\cos t}{t} \text{ für ein } c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Variante 2 Wir benutzen Satz 20. Wir setzen zunächst

$$e(t) := \exp\left(\int^t a(s)\ \mathrm{d}s\right) = \exp\left(-2\int^t \frac{1}{s}\ \mathrm{d}s\right) = \frac{1}{t^2}.$$

und schließen dann

$$\mathbb{L} = \left\{ y \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R}) : y(t) = \frac{1}{t^2}\left(c + \int^t \frac{(\sin s)/s}{1/s^2}\,\mathrm{d}s\right) \text{ für ein } c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Das Integral ist noch zu bestimmen (partielle Integration):

$$\int^t \frac{(\sin s)/s}{1/s^2}\,\mathrm{d}s = \int^t s\,\sin s\,\mathrm{d}s = \sin t - t\,\cos t.$$

Daher gilt

$$\mathbb{L} = \left\{ y \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R}) : y(t) = \frac{c}{t^2} + \frac{\sin t}{t^2} - \frac{\cos t}{t} \text{ für ein } c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Lösungsvorschlag zur Aufgabe 2.

Gegeben ist das DGL-System

$$\begin{pmatrix} z_1'(t) \\ z_2'(t) \\ z_3'(t) \\ z_4'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \\ z_4(t) \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

Da es sich um eine Blockmatrixstruktur handelt ist das System *entkoppelbar*, d.h. es genügt die beiden Teilsysteme

$$\begin{pmatrix} z_1'(t) \\ z_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} z_3'(t) \\ z_4'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_3(t) \\ z_4(t) \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}) \tag{3}$$

zu lösen. Dies sind glücklicherweise sogar auch noch dieselben DGL-Systeme. Wir diagonalisieren nun die Matrix $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Dazu berechnen wir zunächst die *Eigenwerte*.

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda - 2).$$

Somit sind die Eigenwerte durch $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 2$ gegeben. Wir berechnen nun die Eigenräume.

$$\ker(A - 0I) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{span} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\ker(A - 2I) = \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{span} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Somit ist $S := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ eine Matrix mit $S^{-1}AS = \operatorname{diag}(0, 2)$. Wie in Gedankenexperiment 28 setzen wir nun

$$E(t) := \begin{pmatrix} e^{0t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

und berechnen

$$M(t) = SE(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & e^{2t} \\ -1 & e^{2t} \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Mit Gedankenexperiment 28 schließen wir, dass $t \mapsto M(t)$ eine Fundamentalmatrix ist. Somit gilt nach (3)

$$\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = M(t) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} z_3(t) \\ z_4(t) \end{pmatrix} = M(t) \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}, \quad \text{für gewisse } c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{C}.$$

Damit gilt

$$\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \\ z_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & e^{2t} & 0 & 0 \\ -1 & e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & e^{2t} \\ 0 & 0 & -1 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}.$$

Lösungsvorschlag zur Aufgabe 3.

Wir machen den Ansatz $y_A(t) = Ce^{\lambda t}$. Dann ist das charakteristische Polynom gegeben als

$$\lambda^2 - 8\lambda + 17 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\lambda - 4)^2 = -1$$

Damit erhalten wir zwei komplexe Nullstellen $\lambda_{1/2} = 4 \pm i$.

Es gilt $\lambda_{1/2} = \alpha \pm i\beta$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Mit unserem Ansatz ist also

$$y_A(t) = e^{(\alpha \pm i\beta)t} \equiv e^{\alpha t} (\cos \beta t \pm i \sin \beta t).$$

und

$$y_1(t) = e^{(4+i)t}, \qquad y_2(t) = e^{(4-i)t}$$

eine Lösungsbasis.

Die (reelle) Lösungsbasis ergibt sich somit als

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &:= \operatorname{Re} y_A(t) = e^{4t} \cos t, \\ \varphi_2(t) &:= \operatorname{Im} y_A(t) = e^{4t} \sin t. \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung ergibt sich als Superposition

$$y(t) = C_1 e^{4t} \sin t + C_2 e^{4t} \cos t, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Lösungsvorschlag zur Aufgabe 4.

Da $f(t,z) := 1 + z^2$ (definiert für $(t,z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$) sicherlich die lokale Lipschitz-Bedingung erfüllt gibt es sicherlich eine maximale Lösung (Das war hier nicht verlangt). Für $t \in \hat{I}$ beobachten wir mit der Separation der Variablen, dass

$$\frac{y'(t)}{1 + y(t)^2} = 1$$

Integrieren von 0 bis t liefert dann

$$\int_0^t \frac{y'(s)}{1 + y(s)^2} \, \mathrm{d}s = t.$$

Die Substitution $u = y(s)$ und die Tatsache, dass $y(0) = 0$ liefert

$$\int_0^{y(t)} \frac{1}{1 + u^2} \, \mathrm{d}u = t.$$

Da die Stammfunktion von $\frac{1}{1+u^2}$ durch arctan gegeben ist, ist

$$\arctan(y(t)) = t \quad \forall t \in \hat{I},$$

d.h. umgeformt

$$y(t) = \tan(t) \quad \forall t \in \hat{I}.$$

Wir müssen nun $\hat{I}$ bestimmen. Wir wissen nach dem Globalitätskriterium

- $\hat{I}$ ist ein offenes Intervall,
- $0 \in \hat{I}$,
- An beiden Randpunkten von $\hat{I}$ tritt eine Blow-Up Situation ein.

(Wir haben hierbei verwendet, dass eine Escape-Situation ausgeschlossen ist, da $G = \mathbb{R}$.) Schauen wir uns nun den Graphen der Tangensfunktion an, so sehen wir, dass wir, dass Blow-Up-Situationen bei $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ stattfinden. Zwischen diesen beiden Werten findet keine statt. Da $\hat{I}$ ein Intervall sein muss, gilt automatisch $\hat{I} = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Somit ist die maximale Lösung also gegeben durch

$$y(t) = \tan(t) \quad (t \in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2})).$$

Lösungsvorschlag zur Aufgabe 5.

Angenommen es gibt einen Punkt $t_1 \in I$ mit $y(t_1) = 0$. Dann ist y eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y'(t) = y(t)^2 \quad (t \in I) \\ y(t_1) = 0 \end{cases}.$$

Da $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(\tau, z) := z^2$ als C^1-Funktion offensichtlich einer lokalen Lipschitzbedingung genügt, gibt es eine eindeutige maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} v'(t) = v(t)^2 \\ v(t_1) = 0 \end{cases}.$$

Man sieht leicht durch Einsetzen, dass $v(t) \equiv 0$ $(t \in \mathbb{R})$ die maximale Lösung dieses Anfangswertproblems ist. (In der Tat: $v'(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und $v(t)^2 = 0^2 = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und die Lösung ist maximal weil sie global ist). Wegen der Eindeutigkeit der maximalen Lösung gilt $y = v|_I \equiv 0$. Dies ist aber ein Widerspruch zu $y(t_0) \neq 0$. Die Behauptung folgt.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe 6.

Wir stellen die DGL zunächst äquivalent um und erhalten die Form

$$(ty(t) - y(t)^2) + \left(\frac{1}{y(t)} - ty(t)\right) y'(t) = 0 \tag{4}$$

Schritt 1. Prüfung der Exaktheit. Wir definieren $p(\tau, z) := \tau z - z^2$ und $q(\tau, z) := \frac{1}{z} - \tau z$ und erhalten die Form $p(t, y(t)) + q(t, y(t))y'(t) = 0$. Für die Exaktheit der DGL ist zu prüfen ob $\partial_\tau q = \partial_z p$. Hierzu: $\partial_z p = \tau - 2z$ und $\partial_\tau q = -z$. Diese Ableitungen stimmen im Allgemeinen also nicht überein.
Schritt 2 (falls nötig/möglich). Finden eines integrierenden Faktors. Um die DGL exakt zu machen, können wir die DGL stets mit einem Faktor $m(t, y(t))$ multiplizieren. Wir erhalten dadurch die neue DGL $m(t, y(t))p(t, y(t)) + m(t, y(t))q(t, y(t))y'(t) = 0$. Für deren Exaktheit ist notwendig,

dass $\partial_z(mp) = \partial_\tau(mq)$. Dies schreiben wir mit der Produktregel aus und erhalten

$$\begin{aligned}
&& (\partial_z m)p + m(\partial_z p) &= (\partial_\tau m)q + m(\partial_\tau q) \\
\Leftrightarrow && (\partial_z m)p - (\partial_\tau m)q &= m(\partial_\tau q - \partial_z p) \\
\Leftrightarrow && \frac{\partial_z m}{m} p - \frac{\partial_\tau m}{m} q &= \partial_\tau q - \partial_z p \\
\Leftrightarrow && (\partial_z \log m)\, p - (\partial_\tau \log m)\, q &= \partial_\tau q - \partial_z p \qquad (5)
\end{aligned}$$

In Skript haben wir diese Rechnung bereits im Spezialfall $m(\tau, z) = m(\tau)$ gemacht. Dieser führt hier aber nicht zum Ziel. Im Spezialfall $m(\tau, z) = m(\tau)$ ergäbe sich nämlich aus (5)

$$\begin{aligned}
-(\partial_\tau \log m(\tau))q = \partial_\tau q - \partial_z p. \quad &\Leftrightarrow \quad -(\partial_\tau \log m(\tau)) \left(\frac{1}{z} - \tau z\right) = -z - (\tau - 2z) = z - \tau. \\
&\Leftrightarrow \quad -\partial_\tau \log m(\tau) = \frac{(z-\tau)}{\frac{1}{z} - \tau z} = \frac{(z-\tau)z}{1 - \tau z^2}.
\end{aligned}$$

Diese Gleichung ist unerfüllbar, da die linke Seite der Gleuchung nur von τ abhängig ist, die rechte Seite hängt jedoch auch von z ab. Viele von Ihnen werden beim ersten Lösungsversuch auf dieses Problem gestoßen sind. Einen Versuch war es sicher wert, aber leider bleibt dieser Ansatz $m(\tau, z) \stackrel{!}{=} m(\tau)$ hier erfolglos!

Spiegelbildlich können wir aber einen anderen Ansatz verfolgen, nämlich $m(\tau, z) \stackrel{!}{=} m(z)$. Mit (5) erhalten wir dann

$$\begin{aligned}
(\partial_z \log m(z))\, p = \partial_\tau q - \partial_z p. \quad &\Leftrightarrow \quad (\partial_z \log m(z))\, (\tau z - z^2) = -z - (\tau - 2z) = z - \tau. \\
&\Leftrightarrow \quad \partial_z \log m(z) = \frac{(z-\tau)}{\tau z - z^2} = \frac{(z-\tau)}{z(\tau - z)} = -\frac{1}{z}.
\end{aligned}$$

Diese Bedingung ist erfüllbar. Wir erhalten

$$\log m(z) = \int^z -\frac{1}{w}\, \mathrm{d}w = -\log z + C$$

und daher $m(z) = e^C e^{-\log z} = \frac{D}{z}$ für eine Konstante $D \neq 0$, die frei wählbar ist. Der Einfachheit halber wählen wir $D = 1$ und multiplizieren daher die DGL (4) mit $m(y(t)) := \frac{1}{y(t)}$. Wir erhalten die neue exakte(!) DGL

$$t - y(t) + \left(\frac{1}{y(t)^2} - t\right) y'(t) = 0.$$

Diese ist nun von der Form $\tilde{p}(t, y(t)) + \tilde{q}(t, y(t))y'(t) = 0$ mit $\tilde{p}(\tau, z) = \tau - z$ und $\tilde{q}(\tau, z) = \frac{1}{z^2} - \tau$.

Schritt 3. Lösen der DGL. Um die DGL zu lösen finden wir ein Integral der Bewegung. Ein solches ist gegeben durch eine Stammfunktion φ für das Vektorfeld $(\tilde{p}, \tilde{q})^T$, d.h. eine Funktion $\varphi(\tau, z)$ mit $\partial_\tau \varphi = \tilde{p}$ und $\partial_z \varphi = \tilde{q}$. Für ein solches φ würde gelten

$$\varphi(\tau, z) = \int \tilde{p}(\tau, z)\, \mathrm{d}\tau + c(z) = \frac{1}{2}\tau^2 - \tau z + c(z).$$

Um die $z-$abhängige Integrationskonstante $c(z)$ zu bestimmen berechnen wir

$$\frac{1}{z^2} - \tau = q \stackrel{!}{=} \partial_z \varphi = -\tau + c'(z). \quad \Rightarrow \quad c'(z) = \frac{1}{z^2}. \quad \Rightarrow \quad c(z) = -\frac{1}{z} + d \quad \text{für ein } d \in \mathbb{R}.$$

Es folgt, dass $\varphi(\tau, z) := \frac{\tau^2}{2} - \tau z - \frac{1}{z}$ eine Stammfunktion von $(\tilde{p}, \tilde{q})^T$ ist. Dadurch, dass diese ein Integral der Bewegung definiert, gibt es für jede Lösung $t \mapsto y(t)$ ein $C \in \mathbb{R}$ mit

$$\frac{t^2}{2} - ty(t) - \frac{1}{y(t)} = C.$$

Um eine Lösungsformel zu finden lösen wir nach $y(t)$ auf. Dazu formen wir zunächst äquivalent um und erhalten

$$ty(t) + \frac{1}{y(t)} + \left(C - \frac{t^2}{2}\right) = 0.$$

Multiplizieren mit $y(t)$ liefert

$$ty(t)^2 + \left(C - \frac{t^2}{2}\right) y(t) + 1 = 0.$$

Dies ist eine quadratische Gleichung in $y(t)$. Die Lösungsformel für quadratische Gleichungen liefert

$$y(t) = \frac{1}{2t}\left(\frac{t^2}{2} - C \pm \sqrt{\left(\frac{t^2}{2} - C\right)^2 - 1}\right).$$

Lösungsvorschlag zur Aufgabe 7.

Es erfülle $f \in C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ eine globale Lipschitz-Bedingung. Dann gibt es $L > 0$ so, dass

$$|f(\tau, z_1) - f(\tau, z_2)| \leqslant L|z_1 - z_2| \quad \forall \tau \in \mathbb{R}\ \forall z_1, z_2 \in \mathbb{R}^n.$$

Wir wiederholen nun, dass für alle $a, b \in \mathbb{R}^n$ die *inverse Dreiecksungleichung* gilt, d.h. $|\,|a| - |b|\,| \leqslant |a - b|$. Sei nun $\tau \in \mathbb{R}$ und $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Mit $a = f(\tau, z_1)$ und $b = f(\tau, z_2)$ erhalten wir dann

$$|\,|f(\tau, z_1)| - |f(\tau, z_2)|\,| \leqslant |f(\tau, z_1) - f(\tau, z_2)| \leqslant L|z_1 - z_2|.$$

Wir folgern die globale Lipschitzbedingung für $|f|$ (mit derselben Lipschitzkonstante $L > 0$).

Lösungsvorschlag zur Aufgabe 8.

Wir definieren $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(t, z) := t + \sqrt{1 + z^2}.$$

Alternative 1. Offensichtlich genügt f als C^1-Funktion einer lokalen Lipschitzbedingung. Wir zeigen nun, dass f der linearen Wachstumsbedingung genügt. Dazu berechnen wir

$$|f(\tau, z)| = |\tau + \sqrt{1 + z^2}| \leqslant |\tau| + \sqrt{1 + z^2} \leqslant |\tau| + \sqrt{1 + 2|z| + |z|^2} = |\tau| + \sqrt{(1 + |z|^2)} = |\tau| + 1 + |z|.$$

Somit gilt

$$|f(\tau, z)| \leqslant |\tau| + 1 + |z| \leqslant |\tau|(1 + |z|) + (1 + |z|) \leqslant (|\tau| + 1)(1 + |z|).$$

Die lineare Wachstumsbedingung (mit $c(\tau) := |\tau| + 1$) folgt. Ein Resultat aus der Vorlesung impliziert dann Globalität für die maximale Lösung des gegebenen AWPs.
Alternative 2.

Wir werden zeigen, dass f einer globalen Lipschitz-Bedingung genügt. Daraus folgt nach dem globalen(!) Satz von Picard-Lindelöf die Existenz einer globalen Lösung $y \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$. Hierzu betrachten wir für $t \in \mathbb{R}$ und $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
|f(t, z_1) - f(t, z_2)| &= \left|(t + \sqrt{1 + z_1^2}) - (t + \sqrt{1 + z_2^2})\right| = \left|\sqrt{1 + z_1^2} - \sqrt{1 + z_2^2}\right| &(6)\\
&= \left|\frac{(1 + z_1^2) - (1 + z_2^2)}{\sqrt{1 + z_1^2} + \sqrt{1 + z_2^2}}\right| = \left|\frac{z_1^2 - z_2^2}{\sqrt{1 + z_1^2} + \sqrt{1 + z_2^2}}\right| = \left|\frac{(z_1 - z_2)(z_1 + z_2)}{\sqrt{1 + z_1^2} + \sqrt{1 + z_2^2}}\right| &(7)\\
&= \frac{|z_1 + z_2|}{\sqrt{1 + z_1^2} + \sqrt{1 + z_2^2}}|z_1 - z_2| \leqslant \frac{|z_1| + |z_2|}{\sqrt{1 + z_1^2} + \sqrt{1 + z_2^2}}|z_1 - z_2| \leqslant 1 \cdot |z_1 - z_2|. &(8)
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir im letzten Schritt benutzt, dass $|z_1| = \sqrt{z_1^2} \leqslant \sqrt{1 + z_1^2}$ und analog $|z_2| \leqslant \sqrt{1 + z_2^2}$.