UNIVERSITÄT LEIPZIG

Übungsblatt

Abgabe am:
Montag, 5.12.2022

Marius Müller
Robert Baumgarth
Wintersemester 2022/2023
Punktzahl: $16 + 2^*$ Punkte

Gewöhnliche Differentialgleichungen: Blatt 8

1. [1+2=3 Punkte]

(a) Es sei $w \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie: $|w| = \sup_{v\in\mathbb{R}^n, |v|=1}(w \cdot v)$.

(b) Für eine stetige Funktion $w : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, $w = (w_1, ..., w_n)^T$ definieren wir das vektorwertige Riemann-Integral durch

$$\int_a^b w(t)\, \mathrm{d}t := \begin{pmatrix} \int_a^b w_1(t)\, \mathrm{d}t \\ \vdots \\ \int_a^b w_n(t)\, \mathrm{d}t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

Zeigen Sie die *Dreiecksungleichung für vektorwertige Integrale*, d.h.

$$\left| \int_a^b w(t)\, \mathrm{d}t \right| \leq \int_a^b |w(t)|\, \mathrm{d}t. \tag{2}$$

2. [2 Punkte] Es sei $f \in C^0(I \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, $t_0 \in I, y_0 \in \mathbb{R}^n$ und T wie in Definition 86. Ist die nachfolgende Aussage wahr oder falsch?
"Ist $u \in C_b^0(I; \mathbb{R}^n)$ so gilt $T[u] \in C_b^0(I; \mathbb{R}^n)$".

3. [1 Punkt] Beweisen Sie Proposition 93.

4. [3+2+3=8 Punkte] Es sei in dieser Aufgabe stets T wie in Definition 86.

(a) Gegeben sei das AWP

$$\begin{cases} y'(t) = \cos(y(t)) & (t \in \mathbb{R}) \\ y(0) = 0 \end{cases}. \tag{3}$$

Zeigen Sie zuerst, dass das AWP eine eindeutige Lösung besitzt. Es sei nun $u := 0$. Berechnen Sie die ersten zwei Picard-Iterierten $T^1[u], T^2[u]$ und zeigen Sie (ohne y explizit zu berechnen), dass für $J := (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ gilt, dass $d_\infty^{(J)}(T^2[u], y) \leq \frac{1}{32}$. Lösen Sie danach die DGL auf J exakt und zeichnen Sie die Lösung $y, T^1[u], T^2[u]$ (auf J) in dasselbe Koordinatensystem.

(b) Es erfülle $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^n)$ eine globale Lipschitzbedingung. Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & (t \in I) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}. \tag{4}$$

Zeigen Sie: Für jedes $u \in C^0(I; \mathbb{R}^n)$ konvergiert $(T^j[u])_{j\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen y.

(c) Es sei für $c \in \mathbb{R}^n$ und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ das lineare Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) & (t \in \mathbb{R}) \\ y(0) = c \end{cases} \tag{5}$$

gegeben. Zeigen Sie, dass das AWP eine eindeutige Lösung $y \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$ besitzt. Zeigen Sie auch: Für $u := c$ und alle $j \in \mathbb{N}$ gilt

$$T^j[u] := \sum_{m=0}^{j} \frac{1}{m!} t^m A^m c. \tag{6}$$

Geben Sie damit einen alternativen Beweis zu Aufgabe 5(d) auf Blatt 4.