



UNI FREIBURG  
Abgabe am:  
Donnerstag, 02.12.2021

Marius Müller Saskia Glaffig Simone Hermann Wintersemester 2021/2022 Punktzahl: 7 Punkte
--

---

## Gewöhnliche Differentialgleichungen: Blatt 6

---

1. [siehe Übung 77, p. 81] DER VERLAUF EINER PANDEMIE. (1+1 = 2 Punkte)  
Es sei  $y$  eine  $SIR$ -Pandemie mit  $y(0) \in Z$ .

- (a) Zeigen Sie, dass  $t \mapsto \log I(t)$  strikt konkav ist.  
(b) Folgern Sie: Falls es  $t^* \geq 0$  gibt mit  $S(t^*) = \frac{\beta}{\alpha}$ , so hat  $t \mapsto I(t)$  ein eindeutiges globales Maximum bei  $t = t^*$ .

2. [siehe Übung 83, p. 87] WIE VIELE PERSONEN INFIZIEREN SICH IM LAUFE DER PANDEMIE INSGESAMT? (2+1+1+1 = 5 Punkte)  
Es sei  $y$  eine  $SIR$ -Pandemie  $y(0) \in Z$  und  $\frac{\beta}{\alpha} < 1$ .

- (a) Zeigen Sie:  $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0$ .  
(b) Beweisen Sie:  $S_{min} > 0$  und es gilt folgende Gleichung

$$S_{min} - \frac{\beta}{\alpha} \log S_{min} = I(0) + S(0) - \frac{\beta}{\alpha} \log S(0). \quad (1)$$

- (c) Wir definieren die Funktion  $W : (0, \frac{\beta}{\alpha}) \rightarrow (\frac{\beta}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha} \log \frac{\beta}{\alpha}, \infty)$  durch  $W(x) := x - \frac{\beta}{\alpha} \log x$ . Zeigen Sie, dass  $W$  bijektiv ist.  
(d) Wie viele Personen werden sich während des Verlaufes der Pandemie insgesamt infizieren? Geben Sie eine explizite Formel an.