UNIVERSITÄT LEIPZIG

Übungsblatt

Abgabe am:
Montag, 19.12.2022

Marius Müller
Robert Baumgarth
Wintersemester 2022/2023
Punktzahl: $12 + 4^* = 16$ Punkte

Gewöhnliche Differentialgleichungen: Blatt 10

1. [1+1+2=4 Punkte] Es erfülle $f \in C^0(I \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ eine lokale Lipschitzbedingung. Eine Funktion $V : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ heißt *Ljapunow-Funktion* für f falls $\langle \nabla V(z), f(t,z) \rangle \leqslant 0$ für alle $t \in I$ und $z \in \mathbb{R}^n$. Sei $y \in C^1(\hat{I}; \mathbb{R}^n)$ die maximale Lösung von

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{1}$$

(a) Zeigen Sie, dass $t \mapsto V(y(t))$ monoton fallend auf $\hat{I}$ ist.

(b) Zeigen Sie: Ist $V^{-1}([0, V(y_0)])$ eine beschränke Menge, so ist y rechtsglobal.

(c) Zeigen Sie, dass das AWP

$$\begin{cases} y_1'(t) = 3y_2(t)^2 y_1(t) \\ y_2'(t) = -y_2(t) - 3y_2(t) y_1(t)^2 (1 + t^2) \\ (y_1(0), y_2(0))^T = (1,1)^T \end{cases} \tag{2}$$

eine rechtsglobale maximale Lösung besitzt. Hinweis. Die Funktion $V(x) = |x|^2$ ist oft eine naheliegende Wahl für eine Lyapunow-Funktion.

2. [1 Punkt] Zeigen Sie: Erfüllt eine Funktion $f \in C^0(I \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ eine globale Lipschitzbedingung, so ist auch die Vorraussetzung (604) von Satz 107 erfüllt.

3. [1+2 = 3 Punkte] Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) = \sin(y(t)^2) + t \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} . \tag{3}$$

(a) Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(\tau, z) = \sin(z^2) + \tau$ eine lokale aber keine globale Lipschitzbedingung erfüllt.

(b) Zeigen Sie, dass das oben gegebene Anfangswertproblem dennoch eine globale Lösung besitzt.

4. [2+1+1= 4 Punkte] Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine nichtleere Menge. Wir definieren für $x \in \mathbb{R}^n$

$$\operatorname{dist}(x, M) := \inf_{a \in M} |x - a|. \tag{4}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) := \operatorname{dist}(x, A)$ erfüllt, dass $|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|$. für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$.

(b) Folgern Sie, dass f stetig ist.

(c) Zeigen Sie: Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen so gilt für alle $x \in U$, dass $\operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus U) > 0$.

5. [Bonus, 4 Punkte] Gegeben sei für $U \in C^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ und $y_0, y_1 \in \mathbb{R}^n$ das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y''(t) = -\nabla U(y(t)) \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = y_1 \end{cases} . \tag{5}$$

Zeigen Sie: Falls $\lim_{|x| \to \infty} U(x) = \infty$, so existiert eine eindeutige globale Lösung $y \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$.