Uni Freiburg

Abgabe am:
Dienstag, 11.01.2022

Marius Müller
Saskia Glaffig
Simone Hermann
Wintersemester 2021/2022
Punktzahl: $\leq 10^*$

Gewöhnliche Differentialgleichungen: Probeklausur

Punkte auf diesem Übungsblatt zählen zu einem Zehntel als Übungspunkte in die Studienleistung.

Die Bearbeitungszeit beträgt 150 Minuten (=2,5 Stunden). Als Hilfsmittel erhalten Sie eine Formelsammlung mit sämtlichen wichtigen Formeln. Diese wird Ihnen früh genug bekanntgegeben. Es wird hier nur der Stoff bis einschließlich Vorlesung 9 abgefragt. Für den noch kommenden Stoff werden später noch Wiederholungsaufgaben bereitgestellt.

1. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL (10 Punkte)

$$y'(t) = y(t) + t.$$

2. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von (15 Punkte)

$$z'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} z(t).$$

3. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL (20 Punkte)

$$y''(t) - 2y'(t) + y(t) = 0.$$

4. Bestimmen Sie die eindeutige maximale Lösung des Anfangswertproblems (10 Punkte)

$$\begin{cases} y'(t) = 1 + y(t)^2 & (t \in I_{max}) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass es sich tatsächlich um die maximale Lösung handelt.

5. Es sei die DGL $y'(t) = A(t)y(t), (t \in I)$ für ein $A \in C^0(I; \mathbb{C}^{n\times n})$ gegeben. (10 Punkte)
Sei zusätzlich $t \mapsto M(t)$ eine Fundamentalmatrix. Zeigen Sie: Jeder Eintrag von M liegt in $C^1(I; \mathbb{C}^n)$ und es gilt

$$M'(t) = A(t)M(t) \quad \forall t \in I.$$

6. Gegeben Sei die DGL (10+5 = 15 Punkte)

$$2t\sqrt{1 + y(t)^2} + \frac{t^2 y(t)y'(t)}{\sqrt{1 + y(t)^2}} = 0 \quad (t \in (1, \infty))$$

(a) Finden Sie ein (nichttriviales) Integral der Bewegung.

(b) Zeigen Sie, dass die DGL keine globale Lösung auf $(1, \infty)$ besitzen kann.

7. Wahr oder falsch (mit Beweis oder Gegenbeispiel): (10 Punkte)
Erfüllt $f \in C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ eine globale Lipschitz-Bedingung, so ist f auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ beschränkt.

8. Zeigen Sie: Das Anfangswertproblem (10 Punkte)

$$\begin{cases} y'(t) = t + \sqrt{1 + y(t)^2} & (t \in \mathbb{R}) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

hat eine eindeutige globale Lösung $y \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.

Lösungen.

Lösung zu Aufgabe 1.
Wir gehen vor wie in Satz 19 mit $a(t) = 1$ und $b(t) = t$. Wir setzen zunächst

$$e(t) := \exp\left(\int^t a(s)\,\mathrm{d}s\right) = e^t. \tag{1}$$

und schließen dann

$$\mathbb{L} = \left\{ y \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R}) : y(t) = e^t \left(c + \int^t \frac{s}{e^s}\,\mathrm{d}s\right) \text{ für ein } c \in \mathbb{R} \right\}. \tag{2}$$

Dies können wir noch vereinfachen

$$\int^t \frac{s}{e^s}\,\mathrm{d}s = \int^t se^{-s}\,\mathrm{d}s = \left[-se^{-s}\right]^t + \int 1 \cdot e^{-s}\,\mathrm{d}s = -te^{-t} - e^{-t}. \tag{3}$$

Daher gilt

$$\mathbb{L} = \left\{ y \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R}) : y(t) = e^t \left(c - te^{-t} - e^{-t}\right) \text{ für ein } c \in \mathbb{R} \right\}. \tag{4}$$

Lösung zu Aufgabe 2.
Schreiben wir das System aus, so erhalten wir

$$\begin{pmatrix} z_1'(t) \\ z_2'(t) \\ z_3'(t) \\ z_4'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \\ z_4(t) \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}) \tag{5}$$

Da es sich um eine Blockmatrixstruktur handelt ist das System *entkoppelbar*, d.h. es genügt die beiden Teilsysteme

$$\begin{pmatrix} z_1'(t) \\ z_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} z_3'(t) \\ z_4'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_3(t) \\ z_4(t) \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}) \tag{6}$$

zu lösen. Dies sind glücklicherweise sogar auch noch dieselben DGL-Systeme. Wir diagonalisieren nun die Matrix $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Dazu berechnen wir zunächst die *Eigenwerte*.

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda - 2). \tag{7}$$

Somit sind die Eigenwerte durch $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 2$ gegeben. Wir berechnen nun die Eigenräume.

$$\ker(A - 0I) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{span} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

$$\ker(A - 2I) = \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{span} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Somit ist $S := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ eine Matrix mit $S^{-1}AS = \operatorname{diag}(0,2)$. Wie in Gedankenexperiment 28 setzen wir nun

$$E(t) := \begin{pmatrix} e^{0t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \tag{10}$$

und berechnen

$$M(t) = SE(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & e^{2t} \\ -1 & e^{2t} \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}) \tag{11}$$

Mit Gedankenexperiment 28 schließen wir, dass $t \mapsto M(t)$ eine Fundamentalmatrix ist. Somit gilt nach (6)

$$\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = M(t) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} z_3(t) \\ z_4(t) \end{pmatrix} = M(t) \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}, \quad \text{für gewisse } c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{C}. \tag{12}$$

Damit gilt
$$\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \\ z_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & e^{2t} & 0 & 0 \\ -1 & e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & e^{2t} \\ 0 & 0 & -1 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Lösung zu Aufgabe 3.
Definieren wir $z_0(t) := y(t)$ und $z_1(t) = y'(t)$ und setzen $z(t) := (z_0(t), z_1(t))^T$ (für $t \in \mathbb{R}$) so erhalten wir nach Gedankenexperiment 43
$$z'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} z(t) \quad (t \in \mathbb{R}). \tag{14}$$

Wir bestimmen nun die Jordan-Normalform von $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Dazu zunächst die Eigenwerte
$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = \lambda(\lambda - 2) + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2. \tag{15}$$

Damit ist der Eigenwert $\lambda_1 = 1$ ein Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit 2. Wir berechnen nun die Eigenvektoren
$$\ker(A - 1 \cdot I) = \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{span} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{16}$$
Da dieser Eigenraum nur eindimensional ist, hat der Eigenwert $\lambda_1 = 1$ die geometrische Vielfachheit 1. Diese stimmt nicht mit der algebraischen Vielfachheit überein, und somit ist A nicht diagonalisierbar. Insbesondere hat also A einen einzigen Jordanblock der Größe 2 zum Eigenwert 1. Um die Basiswechselmatrix für diesen Jordanblock zu bestimmen, wählen wir einen *Hauptvektor* $v_2 \in \ker(A - 1 \cdot I)^2 \setminus \ker(A - 1 \cdot I)$. Da nach dem Satz von Cayley-Hamilton $(A - 1 \cdot I)^2 = 0$ ist gilt $\ker(A - 1 \cdot I)^2 = \mathbb{R}^2$. Daher gilt $\ker(A - 1 \cdot I)^2 \setminus \ker(A - 1 \cdot I) = \mathbb{R}^2 \setminus \operatorname{span} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, weswegen $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine zulässige Wahl ist. Wir berechnen nun
$$v_1 := (A - 1 \cdot I) v_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Setzt man nun $S := (v_1 | v_2) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ so erhalten wir, dass
$$S^{-1} A S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Definieren wir nun wie in Zusammenfassung 31
$$E(t) := \begin{pmatrix} e^{1 \cdot t} & te^{1 \cdot t} \\ 0 & e^{1 \cdot t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}) \tag{19}$$
und
$$M(t) := SE(t) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^t & 2te^t - e^t \\ 2e^t & 2te^t + e^t \end{pmatrix}. \tag{20}$$
Die allgeine Lösung für z ist dann gegeben durch
$$\tilde{\mathbb{L}} =:= \{(t \mapsto M(t)c) : c \in \mathbb{C}^2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2e^t c_1 + (2te^t - e^t) c_2 \\ 2e^t c_1 + (2te^t + e^t) c_2 \end{pmatrix} : c \in \mathbb{C}^2 \right\}. \tag{21}$$

Um wieder auf das ursprüngliche Problem für y zurückzukommen betrachten wir die erste Komponente $z_0 = y$ und erhalten die allgemeine Lösung
$$\mathbb{L} = \{(2e^t c_1 + (2te^t - e^t) c_2 : c_1, c_2 \in \mathbb{C}\}. \tag{22}$$

Lösung zu Aufgabe 4.
Da $f(t, z) := 1 + z^2$ (definiert für $(t, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$) sicherlich die lokale Lipschitz-Bedingung erfüllt gibt es sicherlich eine maximale Lösung [Das war hier nicht verlangt.] Für $t \in I_{max}$ beobachten wir mit der Separation der Variablen, dass
$$\frac{y'(t)}{1 + y(t)^2} = 1 \tag{23}$$

Integrieren von 0 bis t liefert dann

$$\int_0^t \frac{y'(s)}{1+y(s)^2}\,\mathrm{d}s = t. \tag{24}$$

Die Substitution $u = y(s)$ und die Tatsache, dass $y(0) = 0$ liefert

$$\int_0^{y(t)} \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = t. \tag{25}$$

Da die Stammfunktion von $\frac{1}{1+u^2}$ durch arctan gegeben ist, ist

$$\arctan(y(t)) = t \quad \forall t \in I_{max}, \tag{26}$$

d.h. umgeformt

$$y(t) = \tan(t) \quad \forall t \in I_{max}. \tag{27}$$

Wir müssen nun I_{max} bestimmen. Wir wissen nach dem Globalitätskriterium

- I_{max} ist ein offenes Intervall,
- $0 \in I_{max}$,
- An beiden Randpunkten von I_{max} tritt eine Blow-Up Situation ein.

(Wir haben hierbei verwendet, dass eine Escape-Situation ausgeschlossen ist, da $G = \mathbb{R}$.) Schauen wir uns nun den Graphen der Tangensfunktion an, so sehen wir, dass wir, dass Blow-Up-Situationen bei $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ stattfinden. Zwischen diesen beiden Werten findet keine statt. Da I_{max} ein Intervall sein muss, gilt automatisch $I_{max} = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Somit ist die maximale Lösung also gegeben durch

$$y(t) = \tan(t) \quad (t \in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2})). \tag{28}$$

Lösung zu Aufgabe 5.
Um zu zeigen, dass die Matrizen $M'(t)$ und $A(t)M(t)$ in $\mathbb{C}^{n\times n}$ miteinander übereinstimmen, genügt es zu zeigen, dass alle Spaltenvektoren miteinander übereinstimmen, d.h.

$$M'(t)e_i = A(t)M(t)e_i \quad \forall i = 1,...,n \quad \forall t \in I. \tag{29}$$

Definiere nun für festes $i \in \{1,...,n\}$ $y_i : I \to \mathbb{R}$ durch

$$y_i(t) = M(t)e_i \quad t \in I. \tag{30}$$

Da M eine Fundamentalmatrix ist, gilt nach Eigenschaft 2 aus Definition 34, dass y_i eine Lösung der DGL ist. Daher gilt $y_i \in C^1(I;\mathbb{R})$ und

$$y_i'(t) = A(t)y_i(t) \quad \forall t \in I. \tag{31}$$

Nun schließen wir aus (30), dass $y_i'(t) = M'(t)e_i$ für alle $t \in I$. Daher gilt

$$M'(t)e_i = y_i'(t) = A(t)y_i(t) = A(t)M(t)e_i \quad \forall t \in I. \tag{32}$$

Die Behauptung folgt.

Lösung zu Aufgabe 6.

Teilaufgabe (a).
Die DGL ist von der Form

$$p(t, y(t)) + q(t, y(t))y'(t) = 0 \quad (t \in (1, \infty)), \tag{33}$$

wobei $p(\tau, z) = 2\tau\sqrt{1+z^2}$ und $q(\tau, z) = \tau^2 \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$. Um ein Integral der Bewegung zu finden, suchen wir eine Funktion $\phi \in C^1((1,\infty)\times\mathbb{R};\mathbb{R})$ mit

$$\nabla\phi(\tau, z) = \begin{pmatrix} p(\tau, z) \\ q(\tau, z) \end{pmatrix}. \tag{34}$$

Wie in Beispiel 57 sieht man dann, dass ϕ ein Integral der Bewegung ist. Um ein solches ϕ zu finden, schreiben wir (34) in ihren Komponenten aus und erhalten

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau}(\tau, z) = p(\tau, z) = 2\tau\sqrt{1+z^2}, \qquad \frac{\partial \phi}{\partial z}(\tau, z) = q(\tau, z) = \tau^2 \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}. \tag{35}$$

Integieren wir die erste dieser beiden Gleichungen nach der τ-Variablen so erhalten wir

$$\phi(\tau, z) = \int^{\tau} 2\rho\sqrt{1+z^2}\, \mathrm{d}\rho = \tau^2\sqrt{1+z^2} + c(z). \tag{36}$$

Hierbei ist $c(z)$ eine unbekannte nur von z abhängige Funktion. Integieren wir die zweite dieser beiden Gleichungen nach der z-Variablen so erhalten wir

$$\phi(\tau, z) = \int^{z} \tau^2 \frac{w}{\sqrt{1+w^2}}\, \mathrm{d}w = \tau^2\sqrt{1+z^2} + \tilde{c}(\tau). \tag{37}$$

Hierbei ist $\tilde{c}(\tau)$ eine unbekannte nur von τ abhängige Funktion. Mit dieser Überlegung sieht man, dass sich für $\tilde{c}(\tau) = 0$ und $c(z) = 0$ die Stammfunktion $\phi(\tau, z) = \tau^2\sqrt{1+z^2}$ ergibt. Somit gilt $\phi(t, y(t)) \equiv$ const. auf $(1, \infty)$, d.h.

$$t^2\sqrt{1+y(t)^2} \equiv \text{const.} \tag{38}$$

Ein Integral der Bewegung ist gefunden!

Teilaufgabe(b).
Angenommen, es gäbe eine Lösung $y \in C^1((1, \infty); \mathbb{R})$ der DGL. Dann gäbe es nach Teilaufgabe (a) eine Konstante $K \in \mathbb{R}$ mit

$$t^2\sqrt{1+y^2(t)} = K \quad \forall t \in (1, \infty). \tag{39}$$

Man beachte, dass $K > 0$, da der Term auf der linken Seite stets positiv ist. Umgeformt folgt

$$\sqrt{1+y(t)^2} = \frac{K}{t^2} \quad \forall t \in (1, \infty). \tag{40}$$

Insbesondere gilt

$$1 \le \sqrt{1+y(t)^2} = \frac{K}{t^2} \quad \forall t \in (1, \infty). \tag{41}$$

Betrachten wir nun den Grenzfall $t \to \infty$ so gilt

$$1 \le \lim_{t \to \infty} \frac{K}{t^2} = 0. \tag{42}$$

Ein Widerspruch. Damit kann die Lösung nicht global sein.

Lösung zu Aufgabe 7.
Die Behauptung ist falsch, daher geben wir ein Gegenbeispiel an. Wir betrachten für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ die Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gegeben durch $f(t, z) := z$. Nun genügt f einer globalen Lipschitz-Bedingung, denn für alle $t \in \mathbb{R}$ und $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$|f(t, z_1) - f(t, z_2)| = |z_1 - z_2| \le 1 \cdot |z_1 - z_2|. \tag{43}$$

Somit ist die globale Lipschitz-Bedingung mit Lipschitzkonstante $L = 1$ erfüllt. Jedoch ist f auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ unbeschränkt, denn es gilt

$$|f(t, z)| = |z| \quad \forall (t, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \tag{44}$$

Betrachtet man zum Beispiel $z_j = (j, 0, ..., 0)^T \in \mathbb{R}^n$ so folgert man leicht die Unbeschränktheit. [Dies muss nicht zwingend genauer ausgeführt werden].

Lösung zu Aufgabe 8.
Wir definieren $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(t, z) := t + \sqrt{1+z^2}. \tag{45}$$

Wir werden zeigen, dass f einer globalen Lipschitz-Bedingung genügt. Daraus folgt nach dem globalen(!) Satz von Picard-Lindelöf die Existenz einer globalen Lösung $y \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$. Hierzu betrachten wir für

$t \in \mathbb{R}$ und $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$

$$|f(t,z_1) - f(t,z_2)| = \left|(t + \sqrt{1+z_1^2}) - (t + \sqrt{1+z_2^2})\right| = \left|\sqrt{1+z_1^2} - \sqrt{1+z_2^2}\right| \tag{46}$$

$$= \left|\frac{(1+z_1^2) - (1+z_2^2)}{\sqrt{1+z_1^2} + \sqrt{1+z_2^2}}\right| = \left|\frac{z_1^2 - z_2^2}{\sqrt{1+z_1^2} + \sqrt{1+z_2^2}}\right| = \left|\frac{(z_1 - z_2)(z_1 + z_2)}{\sqrt{1+z_1^2} + \sqrt{1+z_2^2}}\right| \tag{47}$$

$$= \frac{|z_1 + z_2|}{\sqrt{1+z_1^2} + \sqrt{1+z_2^2}} |z_1 - z_2| \leq \frac{|z_1| + |z_2|}{\sqrt{1+z_1^2} + \sqrt{1+z_2^2}} |z_1 - z_2| \leq 1 \cdot |z_1 - z_2|. \tag{48}$$

Hierbei haben wir im letzten Schritt benutzt, dass $|z_1| = \sqrt{z_1^2} \leq \sqrt{1+z_1^2}$ und analog $|z_2| \leq \sqrt{1+z_2^2}$.