Übungsblatt

Abgabe am:
Montag, 21.11.2022

Marius Müller
Robert Baumgarth
Wintersemester 2022/2023
Punktzahl: 13 Punkte

Gewöhnliche Differentialgleichungen: Blatt 6

1. [2 Punkte] Zeigen Sie, dass für alle $\varphi_0 \in \mathbb{R}$ und $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \varphi''(t) = -\omega^2 \sin \varphi(t) \quad (t \in \mathbb{R}) \\ \varphi(0) = \varphi_0 \\ \varphi'(0) = \alpha_0 \end{cases} \tag{1}$$

eine eindeutige globale Lösung besitzt.

2. (a) (1 Punkt) Finden Sie eine Funktion $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^n)$, die beschränkt ist, einer lokalen Lipschitzbedingung genügt, aber keiner globalen Lipschitz-Bedingung genügt.

(b) (1 Punkt) Finden Sie eine stetige Funktion $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^n)$, die keiner lokalen Lipschitzbedingung genügt.

3. [2 Punkte] Es sei $G := (0,1) \subset \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \times G \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(t,z) = z$.

(a) Zeigen Sie: f erfüllt eine globale Lipschitzbedingung.

(b) Zeigen Sie: Das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \quad (t \in \mathbb{R}) \\ y(0) = \frac{1}{2} \end{cases} \tag{2}$$

besitzt keine Lösung $y \in C^1(\mathbb{R}; G)$. Widerspricht das nicht dem Satz von Picard-Lindelöf?

4. [1+1+...+1=7 Punkte] Wir konstruieren im Folgenden eine stetige Funktion, die in keinem noch so kleinen Teilgebiet eine lokale Lipschitzbedingung erfüllt. Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$g(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cos(15^k \pi x). \tag{3}$$

(a) Zeigen Sie, dass g stetig ist.

(b) Sei nun $x_0 \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Für alle $m \in \mathbb{N}$ gibt es ein $l_m \in \mathbb{Z}$ mit $15^m x_0 - \frac{1}{2} \leq l_m \leq 15^m x_0 + \frac{1}{2}$.

(c) Definieren wir $x_m := \frac{l_m + 1}{15^m}$. Zeigen Sie, dass $x_m > x_0$, $|x_m - x_0| \leq \frac{3}{2 \cdot 15^m}$ und für alle $k \geq m$ gilt, dass $\cos(15^k \pi x_m) = (-1)^{l_m+1}$, $\sin(15^k \pi x_m) = 0$.

(d) Zeigen Sie, dass für alle $k \geq m$

$$\frac{1}{2^k}(\cos(15^k \pi x_0) - \cos(15^k \pi x_m)) = (-1)^{l_m} \frac{1}{2^k} \Big(\cos(15^{k-m} \pi (15^m x_0 - l_m)) + 1 \Big) \tag{4}$$

und folgern Sie

$$\left| \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{2^k}(\cos(15^k \pi x_0) - \cos(15^k \pi x_m)) \right| \geq \frac{1}{2^m} \geq \frac{2}{3} \left(\frac{15}{2} \right)^m |x_m - x_0|. \tag{5}$$

(e) Zeigen Sie, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $|\cos(15^k \pi x_0) - \cos(15^k \pi x_m)| \leq 15^k \pi |x_0 - x_m|$ und folgern Sie

$$\left| \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{2^k}(\cos(15^k \pi x_0) - \cos(15^k \pi x_m)) \right| \leq \frac{2\pi}{13} \left(\frac{15}{2} \right)^m |x_m - x_0| \tag{6}$$

(f) Folgern Sie aus (*d*) und (*e*), dass $\frac{|g(x_m) - g(x_0)|}{|x_m - x_0|} \geq (4 - \pi) \left(\frac{15}{2} \right)^m$. Ist g bei x_0 differenzierbar?

(g) Finden Sie eine stetige Funktion $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^n)$ so, dass es kein offenes Teilintervall $\tilde{I}$ und kein Teilgebiet $\tilde{G}$ gibt, sodass $f|_{\tilde{I} \times \tilde{G}}$ eine lokale Lipschitzbedingung erfüllt