Übungsblatt

Abgabe am:
Montag, 9.1.2023

Schöne Feiertage und einen guten Rutsch!!!

Marius Müller
Robert Baumgarth
Wintersemester 2022/2023
Punktzahl: 15 Punkte

Gewöhnliche Differentialgleichungen: Blatt 11

1. [2+2+2=6 Punkte]

(a) Zeigen Sie, dass

$$\begin{cases} y_1'(t) = \frac{1}{2}y_2(t) + y_1(t) - y_2(t)^2 y_1(t) + \arctan y_2(t) \\ y_2'(t) = y_2(t) + y_1(t)\sin(y_1(t)) + y_2(t)y_1(t)^2 \\ (y_1(0), y_2(0))^T = (1,1)^T \end{cases} \tag{1}$$

eine eindeutige maximale Lösung definiert auf $\hat{I} \supset [0, \infty)$ besitzt.

(c) Zeigen Sie, dass

$$\begin{cases} y'(t) = \log(4 + e^{|y(t)|}) \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

eine eindeutige maximale Lösung definiert auf $\hat{I} = \mathbb{R}$ besitzt.

(c) Zeigen Sie, dass

$$\begin{cases} y_1'(t) = -y_2(t) \\ y_2'(t) = y_1(t) + (1 - y_1(t)^2 - y_2(t)^2)y_2(t)^3 \\ (y_1(0), y_2(0))^T = (1,1)^T \end{cases} \tag{3}$$

eine eindeutige maximale Lösung definiert auf $\hat{I} \supset [0, \infty)$ besitzt.

2. [2+(2+1)=5 Punkte] Gegeben sei die DGL aus Beispiel 62 (Teil 1 und 2), d.h.

$$4t^3 y(t) + (y(t)^2 + 1 + t^4)y'(t) = 0 \tag{4}$$

(a) Zeigen Sie, dass jede Anfangswertproblem der Form

$$\begin{cases} 4t^3 y(t) + (y(t)^2 + 1 + t^4)y'(t) = 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{5}$$

eine eindeutige maximale Lösung $y \in C^1(\hat{I}; \mathbb{R})$ besitzt.

(b) Zeigen Sie mit zwei verschiedenen Wegen, dass $\hat{I} = \mathbb{R}$. (b1) Finden Sie ein Integral der Bewegung und verwenden Sie den Maximalitätsdetektor. (b2) Verwenden Sie ein Globalitätskriterium.

3. [2 Punkte] Beweisen Sie Proposition 49. (Nummer ist kein Schreibfehler)

4. [2 Punkte] Es erfülle $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^n)$ eine lokale Lipschitzbedingung, und es sei $y \in C^1(\hat{I}; \mathbb{R}^n)$ maximale Lösung zu

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} . \tag{6}$$

Sei etwa $I = (a, b)$ und $\hat{I} = (t_-, t_+)$. Definiere $z : (-t_-, -t_+) \to \mathbb{R}^n$ durch $z(t) := y(-t)$ und $g : (-b, -a) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ durch $g(\tau, w) = -f(-\tau, w)$. Zeigen Sie: g erfüllt eine lokale Lipschitzbedingung und z ist die eindeutige maximale Lösung zu

$$\begin{cases} z'(t) = g(t, z(t)) \\ z(-t_0) = y_0 \end{cases} \tag{7}$$