UNIVERSITÄT LEIPZIG

ÜBUNGSBLATT

Abgabe am:
Montag, 12.12.2022

Marius Müller
Robert Baumgarth
Wintersemester 2022/2023
Punktzahl: 18 Punkte

Gewöhnliche Differentialgleichungen: Blatt 9

1. [2+2+2+1 = 7 Punkte]

(a) Sei (X, d) ein metrischer Raum, $\Phi : X \to X$ eine strikte Kontraktion mit Fixpunkt u_0, d.h. es gibt $q \in [0, 1)$ so, dass

$$\forall u, v \in X : \quad d(\Phi[u], \Phi[v]) \leqslant q d(u, v) \qquad \text{und} \qquad \Phi[u_0] = u_0.$$

Zeigen Sie, dass dann

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall u \in X : \qquad d(\Phi^n[u], u_0) \leqslant \frac{q^n}{1-q} d(\Phi[u], u).$$

HINWEIS. Man behandle den Fall $n = 1$ zuerst.

(b) Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem $y' = (x + y)^2, y(0) = 0$, eine eindeutige Lösung auf $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ besitzt.

(c) Bestimmen Sie diese Lösung bis auf zwei Dezimalstellen genau via Picard-Iteration (d.h., der Fehler sollte kleiner $5 \cdot 10^{-3}$ sein).

(d) Lösen Sie das Anfangswertproblem direkt und vergleichen Sie beide Resultate.
HINWEIS. Geeignete Substitution.

2. [2 Punkte] Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $(g_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset C^0(K; \mathbb{R}^m)$. Zeigen Sie: Konvergiert $g_j \to g$ gleichmäßig für ein $g \in C^0(K; \mathbb{R}^m)$ so gilt $\max_{x\in K} |g_j(x)| \longrightarrow \max_{x\in K} |g(x)| \quad (j \to \infty)$.

3. [1+2 = 3 Punkte] Es sei $(g_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset C^0([a, b]; \mathbb{R}^m)$ mit $g_j \to g$ gleichmäßig für $j \to \infty$. Zeigen Sie, dass g_j punktweise beschränkt und gleichgradig stetig sind, d.h.

(a) Für alle $x \in [a, b]$ gibt es ein $C > 0$ mit $\sup_{j\in\mathbb{N}} |g_j(x)| \leqslant C$.

(b) Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ so, dass

$$x_1, x_2 \in [a, b] : \quad |x_1 - x_2| < \delta \quad \Rightarrow \quad \sup_{j\in\mathbb{N}} |g_j(x_1) - g_j(x_2)| < \varepsilon. \tag{1}$$

4. [1+2+3= 6 Punkte] Im Folgenden sehen wir, dass die Picard-Iteration nicht mehr zwingend eine Kontraktion ist, wenn die rechte Seite keine Lipschitz-Bedingung erfüllt. Dazu betrachten wir

$$\begin{cases} y'(t) = 2\sqrt{|y(t)|} \quad (t \in (-1, 1)) \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Beachte: Die Picard-Iteration ist dann gegeben durch $T : C^0_b((-1, 1); \mathbb{R}) \to C^0_b((-1, 1); \mathbb{R})$ mit

$$T[y](t) := \int_0^t 2\sqrt{|y(s)|}\, \mathrm{d}s \quad (t \in (-1, 1)). \tag{3}$$

Es muss nicht gezeigt werden, dass T wohldefiniert ist, dies folgt bereits aus Prop 92. Es sei $u_1 := 0$ und $u_2(t) := \max(t, 0)$.

(a) Zeigen Sie, dass $T^j[u_1](t) = 0$ für alle $j \in \mathbb{N}$.

(b) Zeigen Sie, dass $T^j[u_2](t) = \prod_{k=0}^{j-1} \left(\frac{2^{k+2}}{2^{k+2}-1}\right)^{\frac{1}{2^{j-1-k}}} \max(t, 0)^{\frac{2^{j+1}-1}{2^j}}$ für alle $j \geqslant 1$.

(c) Zeigen Sie: $T^j[u_1] \to 0$ und $T^j[u_2] \to \max(t, 0)^2$ punktweise. Folgern Sie, dass für kein $n_0 \in \mathbb{N}$ die Abbildung T^{n_0} eine strikte Kontraktionsabbildung sein kann. HINWEIS: Um die Konvergenz des Produktes aus Teilaufgabe (b) zu verstehen, kann es helfen, den Logarithmus zu betrachten.