UNIVERSITÄT LEIPZIG

ÜBUNGSBLATT

Abgabe am:
Dienstag, 11.04.2023

Marius Müller
Bernd Käßemodel
Sommersemester 2023
Punktzahl: 18 Punkte

Funktionentheorie: Blatt 1

1. [1+1+1+2+2 = 7 Punkte]

(a) Bestimmen Sie eine geschlossene Formel für $\frac{3+i}{2-i}$.

(b) Berechnen Sie $|(\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i)^{2023}|$

(c) Geben Sie eine geschlossene Formel für $(1+i)^{2n}$, $n \in \mathbb{N}$ an.

(d) Für $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$ definieren wir $m(z) := i\frac{z-i}{z+i}$.
Zeigen Sie: $m(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |z| = 1$. Zeichnen Sie außerdem $m(B_1(0))$.

(e) Zeigen Sie $|1-\bar{z}w|^2 - |z-w|^2 = (1-|z|^2)(1-|w|^2)$.

2. [1+1= 2 Punkte] Es sei $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $\phi(z) := iz$

(a) Zeigen Sie, dass ϕ $\mathbb{C}$-linear ist.

(b) Wir fassen nun $\mathbb{C}$ als Vektorraum über $\mathbb{R}$ auf, mit Basis $\mathcal{B} := \{1, i\}$. Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\phi)$.

3. [3 Punkte] Berechnen Sie eine geschlossene Formel für

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} (-1)^k.$$

4. [2+2+1+1=6 Punkte] Für $w \in \mathbb{C}$ definieren wir die komplexe Zahl

$$z_w := \begin{cases} \sqrt{|w|}\frac{w+|w|}{|w+|w||} & w \notin \mathbb{R}_{<0} \\ i\sqrt{-w} & w \in \mathbb{R}_{<0} \end{cases}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $z_w^2 = w$. (Mit anderen Worten lässt sich z_w auch als *komplexe Wurzel* von w auffassen. In der Literatur wird auch manchmal die Notation $\sqrt{w} := z_w$ verwendet).

(b) Beweisen Sie, dass alle Lösungen der Gleichung $z^2 = w$ gegeben sind durch $z = \pm z_w$.

(c) Wahr oder falsch? [Mit Begründung oder Gegenbeispiel] Es gilt $z_{\bar{w}} = \overline{z_w}$ für alle $w \in \mathbb{C}$.

(d) Wahr oder falsch? Die komplexe Wurzel $w \mapsto z_w$ ist *multiplikativ*, d.h. für alle $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ gilt $z_{w_1 w_2} = z_{w_1} z_{w_2}$.