ÜBUNGSBLATT

Abgabe am:
Montag 26.06.2023

Marius Müller
Bernd Käßemodel
Sommersemester 2023
Punktzahl: 16 Punkte

Funktionentheorie: Blatt 12

1. [1+1+1+1+1=5 Punkte] Gegeben seien die nachfolgenden Funktionen $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ mit isolierter Singularität $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Geben Sie die Art der Singularität (hebbar, Polstelle, wesentlich) an. Bestimmen sie ferner für jede Polstelle die Ordnung. Für jede hebbare Singularität bestimmen Sie $g(z_0), g'(z_0), g''(z_0)$ (wobei hier mit g die holomorphe Fortsetzung von f aus Satz 215 bezeichnet wird). Für jede wesentliche Singularität bestimmen Sie für alle $\varepsilon > 0$ klein genug das Bild $f(B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\})$

(a) $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{1, 2\}$, $f(z) = \frac{e^z}{z^3-4z^2+5z-2}$, $z_0 = 1$.

(b) $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}, f(z) = \frac{\sinh(z)}{z}$, $z_0 = 0$

(c) $\Omega = B_1(0) \setminus \{0\}, f(z) = \frac{1}{e^z-1}$, $z_0 = 0$.

(d) $\Omega = B_1(0) \setminus \{0\}, f(z) = \frac{z}{e^z-1}$, $z_0 = 0$.

(e) $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}, f(z) = \exp(\frac{1}{z})$, $z_0 = 0$.

2. [1+1+1+1=4 Punkte] Bestimmen Sie für die gegebenen Funktionen eine Laurentreihendarstellung in den gegebenen Kreisringgebieten $A_{r,R}(z_1)$ an in dem die Laurentreihe konvergiert. Besimmen sie im Falle $r = 0$ auch das Residuum $\text{Res}(f, z_1)$.

(a) $f(z) = \frac{1}{2-z}$, $(z \in A_{0,2}(0))$.

(b) $f(z) = \frac{1}{2-z}$, $(z \in A_{2,\infty}(0))$.

(c) $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$, $(z \in A_{1,2}(0))$.

(d) $f(z) = \exp(\frac{2}{z})$, $(z \in A_{0,\infty}(0))$.

3. [3 Punkte] Beweisen Sie Proposition 218.

4. [3 + 1 = 4 Punkte]

(a) Berechnen Sie für $\varepsilon > 0$

$$p.v. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x - i\varepsilon} \, \mathrm{d}x. \tag{1}$$

Hierbei ist er empfehlenswert für das Rechteck $Q_R = \{z \in \mathbb{C} : -R \leqslant \text{Re}(z) \leqslant R, 0 \leqslant \text{Im}(z) \leqslant R\}$ das Integral $\int_{\partial Q_R} \frac{e^{iz}}{z-i\varepsilon} \, \mathrm{d}z$ zu betrachten.

(b) Ist die Funktion in (1) integrierbar?