Uni Freiburg

Abgabe am:
Donnerstag, 04.11.2021

Marius Müller
Saskia Glaffig
Simone Hermann
Wintersemester 2021/2022
Punktzahl: 8+2* Punkte

Gewöhnliche Differentialgleichungen: Blatt 2

1. [Siehe Übung 21, p. 21] Bernoulli'sche Differentialgleichung. (2+2=4 Punkte)
Es seien $a, b \in C^0(\mathbb{R};\mathbb{R})$ und $\gamma > 0, \gamma \notin \mathbb{N}$. Betrachten Sie das AWP

$$\begin{cases} y'(t) = a(t)y(t) + b(t)y(t)^\gamma \quad (t \in \mathbb{R}) \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \tag{1}$$

wobei $t_0 \in \mathbb{R}$ und $y_0 \geq 0$. Beachten Sie, dass $y(t)^\gamma$ nur definiert ist, falls $y(t) \geq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie: Ist

$$|1-\gamma| \int_{\mathbb{R}} |b(t)| \exp\left(-\int_{t_0}^t (1-\gamma)a(s)\ \mathrm{d}s\right)\ \mathrm{d}t < y_0^{1-\gamma} \tag{2}$$

so gibt es eine eindeutige globale Lösung $y \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$.

(b) Kann auf die Vorraussetzung in Gleichung (2) verzichtet werden? Falls nein: Geben Sie sowohl für die Eindeutigkeit als auch für die Globalität Gegenbeispiele an.

2. [Siehe Übung 23, p. 23] Rechenregeln und DGLs in $\mathbb{C}$. (2+2 = 4 Punkte)
Vorab: Wir nennen eine komplexwertige Funktion $f : I \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar wenn sowohl $\mathrm{Re}(f) : I \to \mathbb{R}$ als auch $\mathrm{Im}(f) : I \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen sind. Die Ableitung von f ist dann gegeben durch $f' := \mathrm{Re}(f)' + i\mathrm{Im}(f)'$.

(a) Es sei $g : I \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie: Dann ist auch $e^g : t \mapsto e^{g(t)}, (t \in I)$ eine stetig differenzierbare Funktion und es gilt

$$\frac{d}{dt}e^{g(t)} = g'(t)e^{g(t)}.$$

(b) Nun sei $a \in C^0(I;\mathbb{C})$. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung (als Teilmenge von $C^1(I;\mathbb{C})$) der DGL

$$y'(t) = a(t)y(t) \quad (t \in I)$$

3. [Bonusaufgabe, siehe Übung 24, p. 23] (2 Bonuspunkte)
Betrachten Sie das System

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(t)^2 - y_2(t)^2 \\ 2y_1(t)y_2(t) \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung.