Uni Freiburg

Abgabe am:
Donnerstag, 11.11.2021

Marius Müller
Saskia Glaffig
Simone Hermann
Wintersemester 2021/2022
Punktzahl: 8+2* Punkte

# Gewöhnliche Differentialgleichungen: Blatt 3

**1.** [Siehe Übung 31, p. 30] Lineare DGLs und die Jordan-Normalform. (2+2=4 Punkte)

(a) Finden Sie die allgemeine Lösung zu

$$z'(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} z(t). \tag{1}$$

(b) Finden Sie die allgemeine Lösung zu

$$y'(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} y(t). \tag{2}$$

**2.** [Siehe Übung 38, p. 33 und Übung 43, p.39] Inhomogene Lineare Systeme. (3+1 = 4 Punkte)
Es seien $\alpha, \omega, d \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von

$$y'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} y(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ d\sin(\alpha t) \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}) \tag{3}$$

Zeigen Sie: Falls $\alpha \neq \pm\omega$, so sind alle Lösungen auf $I = \mathbb{R}$ beschränkt. Falls $\alpha = \pm\omega$, so gibt es unbeschänkte Lösungen.

(b) Das System aus Teilaufgabe (a) kann verwendet werden um die allgemeine Lösung einer DGL zweiter Ordnung zu beschreiben. Geben Sie diese DGL an.

**3.** [Bonusaufgabe, siehe Übung 32, p. 30] Systeme in Jordan-Normalform. (2 Bonuspunkte)
Finden und beweisen Sie für allgemeine $d \in \mathbb{N}$ eine Formel für die allgemeine Lösung von

$$z'(t) = (\lambda I + N)z(t) \quad (t \in \mathbb{R}). \tag{4}$$

wobei $I$ die $d \times d$-Einheitsmatrix ist und $N \in \mathbb{C}^{d\times d}$ wie in Gleichung (132) aus dem Skript (p. 27) ist.