UNIVERSITÄT LEIPZIG

ÜBUNGSBLATT

Abgabe am:
Montag, 16.01.2023

Marius Müller
Robert Baumgarth
Wintersemester 2022/2023
Punktzahl: $\leqslant 10*$

Gewöhnliche Differentialgleichungen: Probeklausur

Die erworbenen Punkte dieses Übungsblattes zählen zu einem Zehntel (immer aufgerundet) als zusätzliche Übungspunkte der Zulassungsvoraussetzung.

Die Bearbeitungszeit beträgt 150 Minuten (= 2,5 Stunden). Als Hilfsmittel ist ein handgeschriebenes Blatt (Vorder- und Rückseite) DIN A4 zugelassen. Es wird nur der Stoff bis einschließlich der letzten Vorlesung vor Weihnachten abgefragt. Für den kommenden Stoff werden später Wiederholungsaufgaben bereitgestellt.

1. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL (10 Punkte)

$$ty'(t) + 2y(t) = \sin t.$$

2. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des DGL-Systems (15 Punkte)

$$z'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} z(t).$$

3. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL (15 Punkte)

$$y''(t) - 8y'(t) + 17y(t) = 0.$$

4. Bestimmen Sie die eindeutige maximale Lösung des Anfangswertproblems (15 Punkte)

$$\begin{cases} y'(t) &= 1 + y(t)^2 \\ y(0) &= 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass es sich tatsächlich um die maximale Lösung handelt.

5. Es sei $y \in \mathsf{C}^1(I;\mathbb{R})$ eine Lösung der DGL $y'(t) = y(t)^2$ $(t \in I)$. (10 Punkte)

Wahr oder falsch: Ist $y(t_0) \neq 0$ für ein $t_0 \in I$, so ist $y(t) \neq 0$ für alle $t \in I$.

6. Gegeben Sei die DGL (10 Punkte)

$$ty(t)\,(1 - y'(t)) - y(t)^2 + \frac{y'(t)}{y(t)} = 0.$$

Prüfen Sie, ob die DGL exakt ist. Bestimmen Sie (wenn nötig den integrierenden Faktor und damit) die allgemeine Lösung.

7. Wahr oder falsch (mit Beweis oder Gegenbeispiel): (15 Punkte)

Erfüllt $f \in \mathsf{C}^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ eine globale Lipschitz-Bedingung, dann auch der Betrag $|f|$ von f.

8. Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem (10 Punkte)

$$\begin{cases} y'(t) &= t + \sqrt{1 + y(t)^2} \qquad (t \in \mathbb{R}) \\ y(0) &= 0. \end{cases}$$

eine eindeutige globale Lösung $y \in \mathsf{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ hat.