Übungsblatt

Abgabe am:
Montag 19.06.2023

Marius Müller
Bernd Käßemodel
Sommersemester 2023
Punktzahl: 16 Punkte

UNIVERSITÄT LEIPZIG

Funktionentheorie: Blatt 11

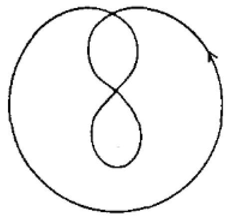
1. [1+1+1+1= 4 Punkte] Es sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ eine geschlossene und stückweise C^1-Kurve.

(a) Zeigen Sie: Es gibt $r > 0$ mit $B_r(0) \cap \gamma([a,b]) = \emptyset$.

(b) Sei $r > 0$ wie in Teilaufgabe (a). Zeigen Sie: Für alle $p \in B_r(0)$ gilt $n(\gamma, p) = n(\gamma, 0)$.

(c) Sei nun $\mathbb{C} \setminus \gamma([a,b]) = D_1 \cup ... \cup D_n$ mit $D_i \subset \mathbb{C}$ offen, zusammenhängend und paarweise disjunkt. (Man sagt D_i sind die *Zusammenhangskomponenten von* $\mathbb{C} \setminus \gamma([a,b])$). Zeigen Sie: Die Abbildung $p \mapsto n(\gamma, p)$ ist konstant auf D_i für alle $i = 1, ..., n$.

(d) Betrachten Sie die folgende Kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$.



Zeichnen Sie D_1, D_2, D_3, D_4 wie aus Teilaufgabe (c) in die Grafik ein und bestimmen Sie $n(\gamma, p)$ für alle $p \in D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$. Begründen Sie Ihre Formeln.

2. [1+2+2+1=6 Punkte] Sei für diese Aufgabe für alle $R > 0$ die Kurve $\gamma^R = \gamma_1^R \oplus \gamma_2^R$ so, dass

$$\gamma_1^R(t) = t, \quad (t \in [-R, R]), \qquad \text{und} \qquad \gamma_2^R(t) = Re^{it}, \quad (t \in [0, \pi]).$$

(a) Zeichnen Sie γ^R in ein Koordinatensystem und zeigen Sie, dass $n(\gamma^R, i) = 1$ für alle $R > 1$.

(b) Berechnen Sie für $R > 1$

$$\int_{\gamma^R} \frac{e^{iz}}{z^2 + 1} \, \mathrm{d}z.$$

(c) Zeigen Sie

$$\lim_{R \to \infty} \int_{\gamma_2^R} \frac{e^{iz}}{z^2 + 1} \, \mathrm{d}z = 0.$$

(d) Betrachten Sie in Teilaufgabe (b) den Grenzwert $R \to \infty$ und berechnen Sie damit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + 1} \, \mathrm{d}x \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^2 + 1} \, \mathrm{d}x.$$

3. [3 Punkte] Berechnen Sie für alle $m \in \mathbb{N}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)^m} \, \mathrm{d}x.$$

4. [3 Punkte] Es sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ eine stückweise C^1-Kurve. Zeigen Sie, dass γ höchstens einen Lift (r, θ) (im Sinne von Definition 191) besitzt.