Uni Freiburg

Abgabe am:
Donnerstag, 23.12.2021

Marius Müller
Saskia Glaffig
Simone Hermann
Wintersemester 2021/2022
Punktzahl: 8+3=11 Punkte

Gewöhnliche Differentialgleichungen: Blatt 9

1. [s. Übung 108, p.115] Die Picard-Iteration. (2+1+2 = 5 Punkte)

(a) Berechnen Sie die ersten zwei Picard-Iterierten z_1, z_2 von

$$\begin{cases} y'(t) = \cos(y(t)) \quad (t \in (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})), \\ y(0) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Verwenden Sie den Startwert $z_0(t) := 0$ für $t \in (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.

(b) Zeigen Sie (ohne die DGL explizit zu lösen), dass der Fehler ihrer zweiten Picard-Iterierten kleinergleich $\frac{1}{32}$ ist, d.h. $d_\infty(z_2, y) \leq \frac{1}{32}$.

(c) Lösen Sie die DGL exakt und zeichnen Sie die Lösung zusammen mit den ersten zwei Picard-Lindelöf-Iterierten in ein Koordinatensystem.

2. [s. Übung 104, p. 109] (Un)vollständigkeit von $(C_b^1(I;\mathbb{R}^n), d_\infty)$. (3 Punkte)
Wir definieren für $n \in \mathbb{N}$ die Menge

$$C_b^1(I;\mathbb{R}^n) := \{f \in C_b^0(I;\mathbb{R}^n) : f \text{ stetig differenzierbar auf } I\}. \tag{2}$$

Zeigen Sie, dass für $n = 1$ und $I = (-1, 1)$ das Paar $(C_b^1(I;\mathbb{R}^n), d_\infty)$ einen metrischen Raum definiert, der nicht vollständig ist.

3. [Bonusaufgabe, s. Übung 110, p.117] Picard-Iteration und Ausschöpfung. (1^*+2^* Punkte)
Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f \in C^0(I \times \mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ eine globale Lipschitz-Bedingung erfüllend. Ferner sei $t_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{R}^n$

(a) Es sei $(a, b) \subset\subset I$ und $z \in C_b^0((a, b);\mathbb{R}^n)$. Es sei $T : C_b^0((a, b);\mathbb{R}^n) \to C_b^0((a, b);\mathbb{R}^n)$ wie in Gleichung (562). Zeigen Sie: Es existieren

$$(Tz)(a) := \lim_{t \downarrow a}(Tz)(t), \quad \text{und} \quad (Tz)(b) := \lim_{t \uparrow b}(Tz)(t). \tag{3}$$

(b) Wählen Sie nun $z_0 := 0 \in C^0(I;\mathbb{R}^n)$ und $(J_k)_{k\in\mathbb{N}_0}, J_0 \subset J_1 \subset J_2 \subset ...$ eine Ausschöpfung von I, gelte etwa $J_k = (a_k, b_k) \subset\subset I$ für $k = 0, 1, ...$ und $t_0 \in J_0$. Es sei T_k gewählt wie in Gleichung (594). Definieren Sie nun für $k \in \mathbb{N}_0$ die rekursive Folge

$$z_{k+1}(t) := \begin{cases} T_k(z_k)(t) & t \in (a_k, b_k), \\ T_k(z_k)(b_k) & t \in I \cap [b_k, \infty), \\ T_k(z_k)(a_k) & t \in I \cap [-\infty, a_k). \end{cases} \tag{4}$$

Zeigen Sie, dass $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $C^0(I;\mathbb{R}^n)$ liegt und punktweise gegen die Lösung des AWP

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \quad (t \in I) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{5}$$

konvergiert.