UNIVERSITÄT LEIPZIG

Klausur

Datum:
Donnerstag, 23.02.2023

Marius Müller
Robert Baumgarth
Wintersemester 2022/2023
Punktzahl: 100 Punkte

Gewöhnliche Differentialgleichungen: Klausur

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten (bzw. 1,5 Stunden). Als Hilfsmittel ist ein handgeschriebenes Blatt (Vorder- und Rückseite) DIN A4 zugelassen.

1. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL (20 Punkte)

$$y'(t) + 2y(t) = e^{-3t}.$$

2. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des DGL-Systems (15 Punkte)

$$z'(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} z(t).$$

3. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL (15 Punkte)

$$y''(t) = 0.$$

4. Gegeben Sei die DGL (10+10=20 Punkte)

$$1 + y(t)^2 + 2ty(t)y'(t) = 0$$

(a) Zeigen Sie, dass Die DGL exakt ist und bestimmen Sie ein Integral der Bewegung.

(b) Zeigen Sie, dass die DGL keine globalen Lösungen besitzen kann.

5. Beweisen Sie die folgende Behauptung: (15 Punkte)

Erfüllt $f \in \mathsf{C}^0(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ eine globale Lipschitz-Bedingung, dann auch $g \in \mathsf{C}^0(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ gegeben durch $g(\tau, z) := f(\tau, |z|e_1)$ (wobei e_1 der erste kanonische Einheitsvektor des $\mathbb{R}^n$).

6. Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem (15 Punkte)

$$\begin{cases} y'(t) &= t + e^{\sin(y(t)^2)} \qquad (t \in \mathbb{R}) \\ y(0) &= 0. \end{cases}$$

eine eindeutige globale Lösung $y \in \mathsf{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ hat.