Klausur

Datum:
Donnerstag, 23.02.2023

Marius Müller
Robert Baumgarth
Wintersemester 2022/2023
Punktzahl: 100 Punkte

Gewöhnliche Differentialgleichungen: Klausur

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten (oder 1,5 Stunden). Als Hilfsmittel ist ein handgeschriebenes Blatt (Vorder- und Rückseite) DIN A4 zugelassen.

1. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL (20 Punkte)

$$y'(t) + 2y(t) = e^{-3t}.$$

Lösung. Formt man die DGL um, so erhält man eine musterhafte lineare inhomogene DGL erster Ordnung:

$$y'(t) = -2y(t) + e^{-3t}.$$

Nach der Lösungsformel aus Satz 20 ist jedes Element der allgemeinen Lösung von der Form

$$y(t) = e(t)\left(c + \int^t \frac{1}{e(s)} e^{-3s}\right)$$

wobei $c \in \mathbb{C}$ und $e(t) = \exp\left(\int^t (-2)\,\mathrm{d}s\right) = e^{-2t}$. Eingesetzt in die vorige Gleichung ergibt sich

$$y(t) = e^{-2t}\left(c + \int^t e^{2s}e^{-3s}\,\mathrm{d}s\right) = e^{-2t}\left(c + \int^t e^{-s}\,\mathrm{d}s\right) = e^{-2t}\left(c - e^{-t}\right).$$

2. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des DGL-Systems (15 Punkte)

$$z'(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} z(t).$$

Lösung. Da die Matrix Blockstruktur hat genügt es, die allgemeine Lösung für jeden 2×2-Block einzeln zu bestimmen. Insbesondere gilt

$$\begin{pmatrix} z_1'(t) \\ z_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} z_3'(t) \\ z_4'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_3(t) \\ z_4(t) \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Somit muss nur die allgmeine Lösung der DGL

$$y'(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} y(t)$$

bestimmt werden. Dazu: Diese Matrix ist bereits ein Jordan-Block mit Eigenwert $\lambda = 2$. Aus Zusammenfassung 31 lernen wir dann, dass

$$y(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{C})$$

Mit (1) folgt die Existenz von Konstanten $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{C}$ mit

$$\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} z_3(t) \\ z_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}.$$

Zusammengesetzt bedeutet das, dass jedes Element der Allgemeinen Lösung von der Form ist

$$z(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \\ z_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}.$$

3. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL (15 Punkte)

$$y''(t) = 0.$$

Lösung. Sicherlich gibt es hier Möglichkeiten, die DGL mit den Methoden der Vorlesung zu lösen. Einfacher ist es aber mit dem Hauptsatz der Differential -und Integralrechnung!

$$\begin{array}{lll} & & y''(t) = 0. \\ \Leftrightarrow & \exists c_1 \in \mathbb{C}: & y'(t) = c_1. \\ \Leftrightarrow & \exists c_1, c_2 \in \mathbb{C}: & y(t) = c_1 t + c_2. \end{array}$$

4. Gegeben Sei die DGL (10+10=20 Punkte)

$$1 + y(t)^2 + 2ty(t)y'(t) = 0$$

(a) Zeigen Sie, dass Die DGL exakt ist und bestimmen Sie ein Integral der Bewegung.

(b) Zeigen Sie, dass die DGL keine globalen Lösungen besitzen kann.

Lösung. *Zur Teilaufgabe (a).* Es sei $p(\tau, z) := 1 + z^2$ und $q(\tau, z) := 2\tau z$. Die DGL hat dann die Form $p(t, y(t)) + q(t, y(t))y'(t) = 0$. Da $\partial_z p = 2z = \partial_\tau q$, ist die DGL exakt und deshalb definiert jede Stammfunktion $\varphi(\tau, z)$ von $(p, q)^T$ ein Integral der Bewegung. Um φ zu finden berechnen wir

$$\varphi(\tau, z) = \int^\tau \partial_\tau \varphi(\tau, z)\, \mathrm{d}\tau + c(z) = \int^\tau p(\tau, z)\, \mathrm{d}\tau + c(z) = (1 + z^2)\tau + c(z) \tag{2}$$

wobei $c(z)$ mithilfe der Gleichung

$$2\tau z = q(\tau, z) = \partial_z \varphi(\tau, z) = 2z\tau + c'(z)$$

bestimmt werden kann. Wir folgern, dass $c'(z) = 0$ und daher $c(z) = c$ für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$. Mögliche Wahl ist $c = 0$ und daher definiert nach (2)

$$\varphi(\tau, z) = \tau(1 + z^2)$$

ein Integral der Bewegung.

Zur Teilaufgabe (b). Es sei $y : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung. Zu zeigen ist $I \subsetneq \mathbb{R}$. Es gilt nach Teilaufgabe (a) $\varphi(t, y(t)) \equiv \text{const.}$. Somit gibt es ein $c \in \mathbb{R}$ mit

$$t(1 + y(t)^2) = c \quad \forall t \in I.$$

Angenommen nun es wäre $I = \mathbb{R}$. Dann wäre

$$c = \lim_{t\to\infty} c = \lim_{t\to\infty} t(1 + y(t)^2) = \lim_{t\to\infty, t\geqslant 0} t\underbrace{(1 + y(t)^2)}_{\geqslant 1} \geqslant \lim_{t\to\infty, t\geqslant 0} t \cdot 1 = \infty.$$

Ein Widerspruch.

5. Beweisen Sie die folgende Behauptung: (15 Punkte)

Erfüllt $f \in \mathsf{C}^0(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ eine globale Lipschitz-Bedingung, dann auch $g \in C^0(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ gegeben durch $g(\tau, z) := f(\tau, |z|e_1)$ (wobei e_1 der erste kanonische Einheitsvektor des $\mathbb{R}^n$).

Lösung. Die Aussage ist wahr. Da f eine globale Lipschitzbedingung erfüllt, gibt es ein $L > 0$ so, dass

$$|f(\tau, z_2) - f(\tau, z_1)| \leqslant L|z_2 - z_1| \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{R}^n\ \forall \tau \in \mathbb{R} \tag{3}$$

Dann gilt für $\tau \in \mathbb{R}$ und $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^n$ auch

$$|g(\tau, z_2) - g(\tau, z_1)| = |f(\tau, |z_2|e_1) - f(\tau, |z_1|e_1)| \underset{(3)}{\leqslant} L\Big|\,|z_2|e_1 - |z_1|e_1\,\Big| = L|(|z_2| - |z_1|)e_1|.$$

Wir benutzen nun, dass $|e_1| = 1$ ist und danach die inverse Dreiecksungleichung um zu erhalten

$$|g(\tau, z_2) - g(\tau, z_1)| \leqslant L\Big|\,|z_2| - |z_1|\,\Big| \leqslant L|z_2 - z_1|.$$

Die globale Lipschitzbedingung für g folgt.

6. Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem (15 Punkte)

$$\begin{cases} y'(t) &=& t + e^{\sin(y(t)^2)} \qquad (t \in \mathbb{R}) \\ y(0) &=& 0. \end{cases}$$

eine eindeutige globale Lösung $y \in \mathsf{C}^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ hat.

Lösung. Wir nutzen das Globalitätskriterium aus Satz 108, i. e. lineares Wachstum. Wir definieren $f(\tau, z) := \tau + e^{\sin(z^2)}$. Zu zeigen ist also, dass f eine lokale Lipschitz-Bedingung und das lineare Wachstumskriterium erfüllt.

Lipschitz-Bedingung. Da die Funktion offensichtlich stetig differenzierbar ist, erfüllt sie auch eine lokale Lipschitzbedingung, siehe Proposition 82.

Lineares Wachstum. Wir schätzen ab

$$|f(\tau, z)| = |\tau + e^{\sin(z^2)}| \leqslant |\tau| + \left|e^{\sin(z^2)}\right| \leqslant |\tau| + e^{\sin(z^2)} \leqslant |\tau| + e^1 \leqslant (|\tau| + e)(1 + |z|).$$

Da $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, c(\tau) := |\tau| + e$ eine stetige Funktion definiert, folgern wir, dass $|f(\tau, z)| \leqslant c(\tau)(1 + |z|)$ für eine stetige Funktion c. Die Aussage folgt.