

# Funktionentheorie – Complex Analysis

Marius Müller

Sommersemester 2022/2023

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Rechnen in <math>\mathbb{C}</math></b>	<b>4</b>
1.1	$\mathbb{C}$ als Körper . . . . .	4
1.2	$\mathbb{C}$ als Vektorraum . . . . .	6
1.3	Konjugation und Absolutbetrag . . . . .	8
1.4	$\mathbb{C}$ als Skalarproduktraum (und metrischer Raum) . . . . .	11
1.5	Potenzreihen . . . . .	15
1.6	Die Exponentialfunktion . . . . .	20
1.7	Kosinus und Sinus . . . . .	23
1.8	Polarkoordinaten . . . . .	27
1.9	Der komplexe Logarithmus . . . . .	31
1.10	(Einheits-)Wurzeln . . . . .	34
1.11	Die Riemann'sche Zahlenkugel . . . . .	38
1.12	Der chordale Abstand . . . . .	43
1.13	Möbiustransformationen . . . . .	48
<b>2</b>	<b>Holomorphe Funktionen</b>	<b>58</b>
2.1	Definition und grundlegende Eigenschaften . . . . .	59
2.2	Beispiele für holomorphe Funktionen . . . . .	63
2.3	Die Cauchy-Riemann-Gleichungen . . . . .	69
2.4	Biholomorphe Abbildungen . . . . .	76
<b>3</b>	<b>Kurvenintegrale</b>	<b>80</b>
3.1	Grundlagen der Integralrechnung über Kurven . . . . .	84
3.2	Der Cauchy'sche Integralsatz . . . . .	90
3.3	Die Cauchy'sche Integralformel . . . . .	101
3.3.1	Der Fundamentalsatz der Algebra . . . . .	105
3.3.2	Der Potenzreihenentwicklungssatz . . . . .	107
3.3.3	Satz von Morera . . . . .	112
3.3.4	Verhalten in der Nähe von Nullstellen . . . . .	114
3.3.5	Identitätssatz und Gebietstreue . . . . .	114
3.4	Umlaufzahl und Homotopie . . . . .	114

<b>4</b>	<b>Isolierte Singularitäten</b>	<b>114</b>
4.1	Klassifikation der Singularitäten . . . . .	114
4.2	Laurentreihen . . . . .	114
<b>5</b>	<b>Residuenkalkül</b>	<b>114</b>
5.1	Die Fouriertransformation . . . . .	114
<b>6</b>	<b>Der Riemann'sche Abbildungssatz</b>	<b>114</b>

# Einführung

In dieser Vorlesung studieren wir Funktionen  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , d.h. Funktionen einer komplexwertigen Veränderlichen. In der reellen Analysis haben wir bereits an einigen Stellen Funktionen von  $\mathbb{R}^2$  nach  $\mathbb{R}^2$  studiert. Aus der Algebra wissen wir nun aber, dass  $\mathbb{R}^2$  und  $\mathbb{C}$  als Vektorräume isomorph sind. Auch sind  $\mathbb{R}^2$  und  $\mathbb{C}$  als metrische Räume ineinander überführbar, d.h. es gilt

$$|(x, y)|_{\mathbb{R}^2} = |x + iy|_{\mathbb{C}} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

wobei  $|\cdot|_{\mathbb{R}^2}$  die Euklidische Norm auf  $\mathbb{R}^2$  und  $|\cdot|_{\mathbb{C}}$  den komplexen Absolutbetrag bezeichnet. *Metrische Begriffe* wie *Stetigkeit*, *Beschränktheit* etc. sollten also dieselbe Bedeutung haben.

Sind Funktionen von  $\mathbb{C}$  nach  $\mathbb{C}$  dann überhaupt etwas anderes als Funktionen von  $\mathbb{R}^2$  nach  $\mathbb{R}^2$ ? Ja, denn es gibt einen strukturellen Unterschied! Auf  $\mathbb{C}$  gibt es (im Gegensatz zu  $\mathbb{R}^2$ ) eine *Multiplikation*. Und die spielt eine ganz entscheidende Rolle beim *Differenzieren*: Wir sagen (für eine offene Teilmenge  $D \subset \mathbb{C}$ ), dass  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  bei  $z_0 \in D$  *komplex differenzierbar* ist, falls

$$f'(z_0) := \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad (2)$$

existiert. Der Grenzwert ist hier in  $\mathbb{C}$  zu verstehen. Dies sieht zunächst unschuldig aus. Wir werden aber sehen, dass komplex differenzierbare Funktionen einige sehr erstaunliche Eigenschaften haben (jedenfalls sofern sie auf einer ganzen offenen Menge  $D \subset \mathbb{C}$  komplex differenzierbar sind). Ein Beispiel: Ist  $f$  auf  $D$  einmal komplex differenzierbar, so ist bereits unendlich oft komplex differenzierbar. Mit den herausgearbeiteten Eigenschaften holomorpher Funktionen werden wir auch in der Lage sein, den *Fundamentalsatz der Algebra* auf eine sehr anschauliche Art und Weise zu beweisen. Damit können wir das Algebra-Curriculum mithilfe von Analysis vervollständigen!

Funktionen, die auf einer offenen Menge  $D \subset \mathbb{C}$  komplex differenzierbar sind, nennen wir auch *holomorph*. Interessant für uns werden vor allem holomorphe Funktionen mit *isolierten Singularitäten* sein, d.h. zum Beispiel  $D = \mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$  für nur endlich viele Punkte  $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ . Wir werden das Verhalten holomorpher Funktionen in einer Umgebung der Singularitäten  $z_i \in \mathbb{C}$  untersuchen.

Unser Wissen werden wir benutzen, um komplexe *Kurvenintegrale* zu berechnen. Für eine Kurve  $\gamma \in C^1([a, b]; D)$  und  $f \in C^0(D; \mathbb{C})$  heißt

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt \in \mathbb{C} \quad (3)$$

das *komplexwertige Kurvenintegral* von  $f$  über  $\gamma$ . Ein zentrales Resultat unserer Vorlesung ist der *Residuensatz*, der eine einfache Formel für Kurvenintegrale von holomorphen Funktionen mit isolierten Singularitäten über geschlossene Kurven gibt. Interessanterweise spielt nur das Verhalten von  $f$  bei den Singularitäten eine Rolle.

Das *Residuenkalkül* erlaubt uns auch, einige reelle Integrale zu berechnen, die mithilfe klassischer Methoden (Stammfunktionen/Substitution/partielle Integration) nicht lösbar sind. Ein gutes Beispiel ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx. \quad (4)$$

Die Funktionentheorie ist bei vielen Studierenden besonders aufgrund ihrer schönen, klaren und wenig technischen Beweismethoden beliebt. Und auch Rechnen kann man in diesem Kurs sehr gut lernen!

## Literaturhinweise

1. Jänich, Klaus. *Funktionentheorie. Eine Einführung*. Springer-Lehrbuch. Springer-Verlag, 1993. ISBN: 3-540-56337-7.
2. Salamon, Dietmar A. *Funktionentheorie*. Birkhäuser Basel. Springer-Verlag, 2012. ISBN: 978-3-0348-0168-3.
3. Freitag, Eberhard; Busam, Rolf. *Funktionentheorie*. Springer-Lehrbuch. Springer-Verlag, 1993. ISBN: 3-540-50618-7

Buch 1 und 2 sind gute “Lesebücher” die im Wesentlichen genau das Material der Vorlesung abbilden. Buch 1 zeichnet sich durch ausführliche Erklärungen aus, Buch 2 durch eine klare Darstellung mit vielen Abbildungen. Buch 3 behandelt neben dem Vorlesungsstoff auch einige weiterführende Themen, mit Querbezügen zu Zahlentheorie und Geometrie.

## 1 Rechnen in $\mathbb{C}$

In diesem Abschnitt wollen wir das Rechnen in den komplexen Zahlen wiederholen bzw. vertiefen. Die Idee der Komplexen Zahlen ist, dass man zusätzlich zu den Reellen Zahlen eine *imaginäre Zahl*  $i$  einführt, die der Gleichung

$$i^2 = -1 \tag{5}$$

genügt.

### 1.1 $\mathbb{C}$ als Körper

In der linearen Algebra haben Sie einige Rechenregeln für komplexe Zahlen kennengelernt und mithilfe der Theorie der *Gruppen und Körper* verstanden. Dies wollen wir hier zunächst kurz wiederholen und später vertiefen.

**Definition 1.** KOMPLEXE ZAHLEN. Eine *komplexe Zahl* ist per Definition ein Ausdruck der Form

$$z = x + iy \quad (x, y \in \mathbb{R}). \tag{6}$$

Hierbei ist die Summation zunächst *formaler Ausdruck* zu verstehen und auch  $i$  ist ein formales Symbol. Mit  $\mathbb{C}$  bezeichnen wir die Menge aller komplexen Zahlen. Eine Zahl  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  heißt *reell*, falls  $y = 0$  bzw. *rein imaginär*, falls  $x = 0$ . Wir bezeichnen die Menge aller reellen Zahlen mit  $\mathbb{R}$  und die Menge aller rein imaginären Zahlen mit  $i\mathbb{R}$ .

Ferner notieren wir für  $z = x + iy \in \mathbb{C}$

$$\operatorname{Re}(z) := x, \quad \text{bzw.} \quad \operatorname{Im}(z) := y \quad (7)$$

und sprechen vom Real -und Imaginärteil von  $z$ . Ferner definieren wir für  $x, y \in \mathbb{R}$  stets  $x := x + i0$  und  $iy := 0 + iy$  und  $i := i1$ .

**Definition 2.** RECHENOPERATIONEN AUF  $\mathbb{C}$ . Für  $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}$  definieren wir

$$z_1 + z_2 := (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \quad (8)$$

und

$$z_1 \cdot z_2 := (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) \quad (9)$$

Wir erinnern uns aus der Algebra, dass  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$  einen *Körper* definiert. Das neutrale Element bezüglich der Addition ist  $0 := 0 + i0$  und das neutrale Element bezüglich der Multiplikation ist  $1 := 1 + i0$ . Ferner gilt für alle  $y \in \mathbb{R}$  stets  $i \cdot y = iy$ , weswegen das Weglassen des Malpunktes keine Verwirrung erzeugen kann und wir die für das Rechnen in Körpern übliche Notation  $z_1z_2 := z_1 \cdot z_2$  einführen können. Wir benutzen von nun an sämtliche bekannte Notationen für das Rechnen in Körpern, wie z.B.  $-z, z^2, z^{-1}, \dots$

Insbesondere gelten für sämtliche  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$

- Kommutativgesetze, d.h.  $(z_1 + z_2 = z_2 + z_1$  sowie  $z_1z_2 = z_2z_1)$ ,
- Assoziativgesetze, d.h.  $(z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3 =: z_1 + z_2 + z_3$  sowie  $(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3) =: z_1z_2z_3)$ ,
- Distributivgesetze, d.h.  $(z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3)$ .

Das multiplikative Inverse von  $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  ist gegeben durch

$$\frac{1}{z} := z^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2}. \quad (10)$$

In der Tat gilt nach (9) für alle  $z = x + iy \in \mathbb{C}$

$$z \cdot \frac{1}{z} = (x + iy) \left( \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) \quad (11)$$

$$= \left[ x \frac{x}{x^2 + y^2} - y \frac{-y}{x^2 + y^2} \right] + i \left[ x \frac{-y}{x^2 + y^2} + y \frac{x}{x^2 + y^2} \right] = 1 + i0 = 1. \quad (12)$$

Durch Einsetzen in (10) findet man leicht raus, dass  $\frac{1}{i} = -i$  und somit  $i^2 = -1$ . Wir definieren noch für  $z_1 \in \mathbb{C}$  und  $z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$\frac{z_1}{z_2} := z_1 \cdot \frac{1}{z_2}. \quad (13)$$

Nun, da wir diese Regeln eingeführt haben, können wir “wie gewohnt” mit komplexen Zahlen rechnen – mit dem einzigen Unterschied, dass  $i^2 = -1$  ist. Insbesondere müssen wir das komplizierte Multiplikationsgesetz (9) nicht auswendig wissen — Es folgt durch direktes Nachrechnen aus den Rechengesetzen und  $i^2 = -1$ :

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 + iy_1)x_2 + (x_1 + iy_1)(iy_2) \quad (14)$$

$$= x_1x_2 + iy_1x_2 + (x_1 + iy_1) \cdot i \cdot y_2 \quad (15)$$

$$= x_1x_2 + iy_1x_2 + i(x_1 + iy_1)y_2 \quad (16)$$

$$= x_1x_2 + iy_1x_2 + i(x_1y_2 + iy_1y_2) \quad (17)$$

$$= x_1x_2 + iy_1x_2 + ix_1y_2 + i^2y_1y_2 \quad (18)$$

$$= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1). \quad (19)$$

Eine Notation sollten wir noch einführen: Schreiben wir ab jetzt “Sei  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ ”, so gehen wir stets implizit davon aus, dass  $x, y \in \mathbb{R}$ , d.h.  $x = \operatorname{Re}(z)$  und  $y = \operatorname{Im}(z)$ . Man spricht davon, dass  $z$  in der *kanonischen Form* dargestellt ist.

## 1.2 $\mathbb{C}$ als Vektorraum

Die komplexen Zahlen bilden auch einen *Vektorraum* — und das gleich auf zwei verschiedene Arten! Einmal als Vektorraum über  $\mathbb{R}$  und einmal als Vektorraum über  $\mathbb{C}$ . Im ersten Fall ist  $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$  und  $\{1, i\}$  bildet eine Basis von  $\mathbb{C}$ . Im zweiten Fall ist  $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$  und  $\{1\}$  bildet bereits eine Basis.

Je nachdem, was für einen Körper man vorschreibt, hat der Begriff einer *linearen Abbildung* eine andere Bedeutung.

**Definition 3.**  $\mathbb{R}$ -LINEARITÄT UND  $\mathbb{C}$ -LINEARITÄT. Eine Abbildung  $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  heißt  $\mathbb{R}$ -linear falls für alle  $z, w \in \mathbb{C}$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt, dass

$$\phi(z + w) = \phi(z) + \phi(w), \quad \phi(\lambda z) = \lambda\phi(z). \quad (20)$$

$\phi$  heißt  $\mathbb{C}$ -linear falls, (20) sogar für alle  $\lambda \in \mathbb{C}$  gilt.

Insbesondere ist jede  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung auch  $\mathbb{R}$ -linear. Jedoch ist nicht jede  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung auch  $\mathbb{C}$ -linear.

**Beispiel 4.** Die Abbildung  $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\phi(z) := \operatorname{Re}(z)$  ist  $\mathbb{R}$ -linear aber nicht  $\mathbb{C}$ -linear.

Beispiel 4 könnte man entweder als Übungsaufgabe von Hand beweisen oder man verwendet die nachfolgende Charakterisierung

**Proposition 5.** Es sei  $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung. Dann ist  $\phi$   $\mathbb{C}$ -linear genau dann wenn es  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  gibt mit

$$\phi(1) = \alpha + i\beta \quad \text{und} \quad \phi(i) = -\beta + i\alpha. \quad (21)$$

**Beweis.** “ $\Rightarrow$ ”. Sei  $\phi$  nun  $\mathbb{C}$ -linear. Definiere  $\alpha := \operatorname{Re}(\phi(1))$  und  $\beta := \operatorname{Im}(\phi(1))$ . Insbesondere gilt schonmal  $\phi(1) = \alpha + \beta i$ . Nun gilt

$$-\alpha - i\beta = -(\alpha + i\beta) = -\phi(1) = \phi(-1) = \phi(i^2) = \phi(i \cdot i) = i\phi(i). \quad (22)$$

Hier haben wir in der letzten Gleichung die  $\mathbb{C}$ -Linearität (d.h. Gleichung (20) mit  $\lambda = i$ ) verwendet. Ist nun  $\phi(i) = x + iy$  so gilt nach der obigen Gleichung

$$-\alpha - i\beta = i(x + iy) = ix - y. \quad (23)$$

Daher gilt

$$x = \operatorname{Im}(ix - y) \stackrel{(23)}{=} \operatorname{Im}(-\alpha - i\beta) = -\beta \quad (24)$$

und

$$y = -\operatorname{Re}(ix - y) \stackrel{(23)}{=} -\operatorname{Re}(-\alpha - i\beta) = \alpha. \quad (25)$$

Somit gilt also  $\phi(i) = x + iy = -\beta + i\alpha$ . Es folgt (21). Nun zu “ $\Leftarrow$ ”. Es sei  $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  nun  $\mathbb{R}$ -linear und es gelte (21) für  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .  $\mathbb{Z}$   $\phi$  ist sogar  $\mathbb{C}$ -linear. Wir stellen zunächst fest, dass  $\phi(i) = i\phi(1)$ , denn

$$i\phi(1) \stackrel{(21)}{=} i(\alpha + i\beta) = i\alpha - \beta \stackrel{(21)}{=} \phi(i). \quad (26)$$

Es sei nun  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  und  $\lambda = u + iv \in \mathbb{C}$ . Dann gilt

$$\phi(\lambda z) = \phi((u + iv)(x + iy)) = \phi(ux - vy + i(vx + uy)) \quad (27)$$

$$\stackrel{\mathbb{R}\text{-Linearität}}{=} (ux - vy)\phi(1) + (vx + uy)\phi(i) \stackrel{(26)}{=} (ux - vy)\phi(1) + (vx + uy)i\phi(1) \quad (28)$$

$$= [(ux - vy) + i(vx + uy)]\phi(1) = (u + iv)(x + iy)\phi(1) = \lambda(x + iy)\phi(1) \quad (29)$$

$$= \lambda[x\phi(1) + yi\phi(1)] \stackrel{(26)}{=} \lambda[x\phi(1) + y\phi(i)] \stackrel{\mathbb{R}\text{-Linearität}}{=} \lambda[\phi(x) + \phi(iy)] = \lambda\phi(x + iy) \quad (30)$$

$$= \lambda\phi(z). \quad (31)$$

Die  $\mathbb{C}$ -Linearität folgt.

**Korollar 6.** Eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung  $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ist genau dann  $\mathbb{C}$ -linear wenn  $\phi(i) = i\phi(1)$ .

**Beweis.** Wir formen um

$$\phi(i) = i\phi(1) \quad (32)$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Re}(\phi(i)) = \operatorname{Re}(i\phi(1)) \quad \text{und} \quad \operatorname{Im}(\phi(i)) = \operatorname{Im}(i\phi(1)), \quad (33)$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Re}(\phi(i)) = -\operatorname{Im}(\phi(1)) \quad \text{und} \quad \operatorname{Im}(\phi(i)) = \operatorname{Re}(\phi(1)). \quad (34)$$

Ist nun  $\phi(1) = \alpha + i\beta$  für  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  so ist die letzte Bedingung äquivalent zu

$$\operatorname{Re}(\phi(i)) = -\beta \quad \text{und} \quad \operatorname{Im}(\phi(i)) = \alpha. \quad (35)$$

Das bedeutet  $\phi(i) = -\beta + i\alpha$ . Mit (21) folgt die Behauptung.

**Beispiel 7.** Wir betrachten nun wieder die  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung  $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  gegeben durch  $\phi(z) = \operatorname{Re}(z)$ . Man sieht, dass  $\phi(1) = 1$  und  $\phi(i) = 0$ . Insbesondere gilt  $\phi(i) \neq i\phi(1)$ . Somit kann  $\phi$  nach dem vorigen Korollar nicht  $\mathbb{C}$ -linear sein.

Man beachte, dass jede  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung durch ihre Werte auf der Basis  $\mathcal{B} := \{1, i\}$  eindeutig bestimmt ist. Somit charakterisiert für gegebenes  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  die Gleichung (21) die Abbildung  $\phi$  eindeutig. Für eine Abbildung  $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  wie in (21) kann man auch die *Darstellungsmatrix* bezüglich der Basis  $\mathcal{B} := \{1, i\}$  bestimmen und erhält

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}. \quad (36)$$

Zum Schluss dieses Abschnittes sollten wir noch erwähnen, dass jede  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung durch die Multiplikation mit einer komplexen Zahl gegeben ist.

**Proposition 8** Eine Abbildung  $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ist genau dann  $\mathbb{C}$ -linear wenn es ein  $w \in \mathbb{C}$  gibt mit  $\phi(z) = wz$  für alle  $z \in \mathbb{C}$

**Beweis.** Wir zeigen nur “ $\Leftarrow$ ”. Für “ $\Rightarrow$ ” verweisen wir auf Übungsblatt 1. Es sei  $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  eine  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung. Dann gilt für  $z \in \mathbb{C}$

$$\phi(z) = \phi(z \cdot 1) \stackrel{\text{C-Linearität}}{=} z\phi(1) = zw. \quad (37)$$

Für  $\phi_w : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto zw$  gilt auch  $\phi_w(1) = w = \operatorname{Re}(w) + i\operatorname{Im}(w)$  und  $\phi_w(i) = iw = -\operatorname{Im}(w) + i\operatorname{Re}(w)$ . Also erfüllt  $\phi$  (21) mit  $\alpha = \operatorname{Re}(w)$  und  $\beta = \operatorname{Im}(w)$ . Wir folgern, dass  $\phi_w$  — also die Multiplikation mit  $w$  — durch die Matrix

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\phi_w) = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(w) & \operatorname{Im}(w) \\ -\operatorname{Im}(w) & \operatorname{Re}(w) \end{pmatrix} \quad (38)$$

dargestellt wird.

### 1.3 Konjugation und Absolutbetrag

Wir werden nun eine weitere Operation auf  $\mathbb{C}$  kennenlernen.



**Definition 9. KOMPLEXE KONJUGATION.** Es sei  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ . Dann nennen wir  $\bar{z} := x - iy$  das *komplex Konjugierte* von  $z$ .

Für diese Operation gibt es einige nützliche Rechenregeln.

**Proposition 10. RECHENREGELN FÜR DIE KOMPLEXE KONJUGATION** Es gilt für  $z, w \in \mathbb{C}$

- (i)  $\operatorname{Re}(\bar{z}) = \operatorname{Re}(z)$ ,  $\operatorname{Im}(\bar{z}) = -\operatorname{Im}(z)$
- (ii)  $\bar{\bar{z}} = z$
- (iii)  $\operatorname{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$ ,  $\operatorname{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$ .
- (iv)  $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$ .
- (v)  $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$ .
- (vi) Falls  $w \neq 0$ , so gilt  $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$ .

**Beweis.** Eigenschaft (i) folgt direkt aus der Definition. Zu (ii). Für  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  gilt  $\bar{z} = x - iy = x + i(-y)$  und somit  $\bar{\bar{z}} = x - i(-y) = x + iy = z$ .

Zu (iii). Es gilt für  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ , dass

$$\frac{z + \bar{z}}{2} = \frac{x + iy + (x - iy)}{2} = \frac{2x}{2} = x = \operatorname{Re}(z). \quad (39)$$

Die andere Gleichung beweist sich analog. Zu (iv). Für  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  und  $w = u + iv \in \mathbb{C}$  gilt

$$\overline{z+w} = \overline{(x+u) + i(y+v)} = x+u - i(y+v) = (x-iy) + (u-iv) = \bar{z} + \bar{w}. \quad (40)$$

Zu (v). Für  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  und  $w = u + iv \in \mathbb{C}$  gilt

$$\overline{zw} = \overline{(x+iy)(u+iv)} = \overline{xu - yv + i(yu + xv)} = xu - yv - i(yu + xv) \quad (41)$$

$$= xu - (-y)(-v) + i((-y)u + x(-v)) = (x-iy)(u-iv) = \bar{z}\bar{w}. \quad (42)$$

Zu (vi). Es gilt für  $z, w \in \mathbb{C}$  mit Regel (v)

$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} \stackrel{(v)}{=} \frac{\bar{z}}{\bar{w}} = \bar{z} \quad (43)$$

Teilt man durch  $\bar{w}$  so ergibt sich (vi).

**Definition 11. KOMPLEXER ABSOLUTBETRAG.** Für  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  definieren wir  $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Der Wert ist stets derselbe wie die Euklidische Norm des Vektors  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Dies erklärt nun Gleichung (1). Auch für den Absolutbetrag gibt es Rechenregeln

**Proposition 12. RECHENREGELN FÜR DEN KOMPLEXEN ABSOLUTBETRAG.** Für  $z, w \in \mathbb{C}$  gilt

- (i)  $z \in \mathbb{R}, |z| \geq 0$  und  $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$ .
- (ii)  $|z + w| \leq |z| + |w|, ||z| - |w|| \leq |z - w|$ .
- (iii)  $-|z| \leq \operatorname{Re}(z) \leq |z|, -|z| \leq \operatorname{Im}(z) \leq |z|$ .
- (iv)  $|z| = |\bar{z}|$ .
- (v)  $|z|^2 = z\bar{z}$ .
- (vi)  $|zw| = |z| |w|$ .
- (vii) Falls  $w \neq 0$  gilt  $|\frac{z}{w}| = \frac{|z|}{|w|}$ .

**Beweis.** (i),(iii) sind klar. (ii) wird bewiesen wie die Dreiecksungleichung (und inverse Dreiecksungleichung) für die Euklidische Norm in  $\mathbb{R}^2$ .

Zu (iv). Für  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  gilt  $|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$  und  $|\bar{z}| = |x - iy| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$ .

Zu (v). Für  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  gilt

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 - i^2y^2 = x^2 + y^2 = \sqrt{x^2 + y^2}^2 = |z|^2. \quad (44)$$

Zu (vi). Es gilt für  $z, w \in \mathbb{C}$

$$|zw|^2 = (zw)\overline{zw} \stackrel{\text{Prop.10(v)}}{=} zw\bar{z}\bar{w} = (z\bar{z})(w\bar{w}) \stackrel{(v)}{=} |z|^2|w|^2. \quad (45)$$

Die Behauptung folgt durch Wurzelziehen.

Zu (vii). Mit (vi) folgt

$$|\frac{z}{w}||w| = |\frac{z}{w}w| = |z|. \quad (46)$$

Die Behauptung folgt durch Teilen durch  $|w|$ .

**Beispiel 13. TEIL1.** Stelle  $\frac{2+3i}{3+2i} \in \mathbb{C}$  in *Normalform*, d.h. als  $x + iy$  für  $x, y \in \mathbb{R}$  dar. Ein guter Trick hierbei ist, mit dem komplex Konjugierten vom Nenner zu erweitern und

Regel (v) in Proposition 12 zu benutzen. Also

$$\frac{2+3i}{3+2i} = \frac{(2+3i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{(2+3i)(3-2i)}{|3+2i|^2} = \frac{12+5i}{3^2+2^2} = \frac{12+5i}{13} = \frac{12}{13} + i\frac{5}{13}. \quad (47)$$

TEIL2. Berechne  $|\frac{2+3i}{3+2i}|$ . Man könnte nun die Darstellung in (47) verwenden. Einfacher geht es aber oft mit Rechenregel (vii) der vorigen Proposition.

$$\left| \frac{2+3i}{3+2i} \right| = \frac{|2+3i|}{|3+2i|} = \frac{\sqrt{2^2+3^2}}{\sqrt{3^2+2^2}} = 1. \quad (48)$$

## 1.4 $\mathbb{C}$ als Skalarproduktraum (und metrischer Raum)

Wir werden nun ein Skalarprodukt auf  $\mathbb{C}$  (aufgefasst als  $\mathbb{R}$ -Vektorraum) definieren und verstehen, dass der komplexe Absolutbetrag eine Norm ist, die von einem Skalarprodukt kommt. Dies ist dank (1) nicht verwunderlich, denn auch die Euklidische Norm  $|\cdot|_{\mathbb{R}^2}$  kommt von einem Skalarprodukt, gegeben durch

$$\langle (x, y), (u, v) \rangle := xu + yv. \quad (49)$$

Nun gilt für  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  und  $w = u + iv \in \mathbb{C}$ , dass

$$\operatorname{Re}(z\bar{w}) = \operatorname{Re}((x + iy)(u - iv)) = \operatorname{Re}(xu + yv + i(yu - xv)) = xu + yv. \quad (50)$$

Dadurch motiviert definieren wir

**Definition 14.** SKALARPRODUKT AUF  $\mathbb{C}$ . Wir definieren für  $z, w \in \mathbb{C}$

$$\langle z, w \rangle := \operatorname{Re}(z\bar{w}). \quad (51)$$

Die Formel in (50) kann man auch ausdrücken durch

$$\langle z, w \rangle = \operatorname{Re}(z\bar{w}) = \operatorname{Re}(z)\operatorname{Re}(w) + \operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w). \quad (52)$$

Wir überzeugen uns nun davon, dass  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  tatsächlich ein Skalarprodukt definiert.

**Proposition 15.** Die Abbildung  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(z, w) \mapsto \langle z, w \rangle$  definiert ein Skalarprodukt auf  $\mathbb{C}$  (aufgefasst als Vektorraum über  $\mathbb{R}$ ). Die durch dieses Skalarprodukt induzierte Norm ist der komplexe Absolutbetrag, d.h.  $|z| = \sqrt{\langle z, z \rangle}$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ .

**Beweis.** Wir prüfen die Skalarproduktaxiome nach. Man überzeugt sich leicht davon, dass  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  eine  $\mathbb{R}$ -bilineare Abbildung ist. Zur Symmetrie. Für  $w, z \in \mathbb{C}$  gilt

$$\langle w, z \rangle = \operatorname{Re}(w\bar{z}) = \operatorname{Re}(\overline{w\bar{z}}) = \operatorname{Re}(\bar{w}z) = \operatorname{Re}(\bar{w}z) = \operatorname{Re}(z\bar{w}) = \langle z, w \rangle. \quad (53)$$

Zur Definitheit. Es gilt

$$\langle z, z \rangle = \operatorname{Re}(z\bar{z}) = \operatorname{Re}(|z|^2) \stackrel{\text{Prop.12(i)}}{=} |z|^2, \quad (54)$$

Nach Proposition 12 (i) gilt  $|z|^2 \geq 0$  und Gleichheit gilt genau dann wenn  $|z| = 0$ . Aus der obigen Gleichung folgt auch sofort, dass  $|z| = \sqrt{\langle z, z \rangle}$ .

Wir folgern:  $\mathbb{C}$  besitzt ein Skalarprodukt und somit auch eine *Norm*. Dies macht  $\mathbb{C}$  auch insbesondere zu einem *metrischen Raum*. Die Metrik ist dabei gegeben durch die *norminduzierte Metrik*  $d_{|\cdot|} : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$d_{|\cdot|}(z, w) := |z - w|. \quad (55)$$

Deswegen kann man *metrische Begriffe* wie z.B. die Folgenkonvergenz auf gewohnte Art und Weise definieren und studieren. Im Folgenden schreiben wir für  $A \subset \mathbb{C}$  stets  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$  falls  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge komplexer Zahlen ist mit  $z_n \in A$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

**Definition 16.** KONVERGENZ IN  $\mathbb{C}$ . Eine Folge komplexer Zahlen  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$  heißt *konvergent* falls es ein  $z \in \mathbb{C}$  gibt mit

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \quad |z_n - z| < \varepsilon \quad \forall n \geq N(\varepsilon). \quad (56)$$

Ein solches  $z \in \mathbb{C}$  heißt *Grenzwert* von  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . [Wie in der Analysis zeigt man, dass eine Folge höchstens einen Grenzwert besitzen kann. Man schreibt auch  $z = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$  oder  $z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z$  oder  $z_n \rightarrow z (n \rightarrow \infty)$ ].

Der so definierte Konvergenzbegriff ist konsistent mit dem Konvergenzbegriff, der von der norminduzierten Metrik  $d_{|\cdot|}$  kommt. Da die Norm auf  $\mathbb{C}$  dieselben Eigenschaften wie die Norm von  $\mathbb{R}^2$  hat, übertragen sich auch die meisten Eigenschaften der Konvergenz. Ein Beispiel dafür ist die *komponentenweise Betrachtungsregel der Konvergenz*

**Proposition 17.** Eine Folge  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$  ist genau dann konvergent wenn die reellen Zahlenfolgen  $(\operatorname{Re}(z_n))_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  und  $(\operatorname{Im}(z_n))_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$  konvergieren.

**Beweis.** Erbt sich von der Folgenkonvergenz in  $\mathbb{R}^2$ .

Als Konsequenz folgt wie in der Analysis der *Satz von Bolzano-Weierstraß*.

**Proposition 18.** SATZ VON BOLZANO-WEIERSTRASS. Jede beschränkte Folge  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$  besitzt eine konvergente Teilfolge, d.h. es gibt eine Folge  $(l_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ ,  $l_{n+1} > l_n$  so, dass  $(z_{l_n})_{n \in \mathbb{N}}$  konvergent ist.

**Beweis.** Erbt sich von der Folgenkonvergenz in  $\mathbb{R}^2$ .

Wiederum eine Konsequenz davon ist die *Vollständigkeit*.

**Proposition 19. VOLLSTÄNDIGKEIT VON  $\mathbb{C}$ .** Eine Folge  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$  ist genau dann konvergent wenn sie das *Cauchy-Kriterium* erfüllt, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : |z_m - z_k| < \varepsilon \quad \forall k, m \geq N(\varepsilon). \quad (57)$$

**Beweis.** Erbt sich von der Folgenkonvergenz in  $\mathbb{R}^2$ .

Eine grundlegende Eigenschaft konvergenter Folgen ist die *Beschränktheit*.

**Proposition 20.** Jede konvergente Folge  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$  ist *beschränkt*, d.h. es gibt ein  $M > 0$  mit  $|z_n| \leq M$  für alle  $n \in \mathbb{N}$

**Beweis.** Erbt sich von der Folgenkonvergenz in  $\mathbb{R}^2$ .

Für Folggrenzwerte in  $\mathbb{C}$  gelten auch einige *Grenzwert-Rechenregeln*, die teilweise nicht direkt etwas mit der Konvergenz in  $\mathbb{R}^2$  zu tun haben.

**Proposition 21. GRENZWERTREGELN IN  $\mathbb{C}$ .** Es seien  $z, w \in \mathbb{C}$  und  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}, (w_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$  Folgen mit  $z_n \rightarrow z, w_n \rightarrow w$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Dann gilt

(i)  $|z_n - z| \rightarrow 0$  und  $|z_n| \rightarrow |z|$  ( $n \rightarrow \infty$ ).

(ii)  $z_n + w_n \rightarrow z + w$  ( $n \rightarrow \infty$ ).

(iii)  $z_n w_n \rightarrow zw$  ( $n \rightarrow \infty$ ).

(iv) Falls  $w \neq 0$  so gilt  $\frac{z_n}{w_n} \rightarrow \frac{z}{w}$  ( $n \rightarrow \infty$ ).

(v)  $\overline{z_n} \rightarrow \overline{z}$  ( $n \rightarrow \infty$ ).

**Beweis.** Eigenschaften (i),(ii) ist den Lesenden als Übungsaufgabe überlassen. Zu (iii).

$$|z_n w_n - zw| = |(z_n - z)w_n + z(w_n - w)| \leq |(z_n - z)w_n| + |z(w_n - w)| = |z_n - z| |w_n| + |z| |w_n - w|. \quad (58)$$

Nun gibt es wegen Proposition 20  $M > 0$  so, dass  $|w_n| \leq M$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Deswegen folgt

$$|z_n w_n - zw| \leq |z_n - z| M + |z| |w_n - w|. \quad (59)$$

Wegen (i) gilt  $|z_n - z| \rightarrow 0$  und  $|w_n - w| \rightarrow 0$  für ( $n \rightarrow \infty$ ). Somit folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n w_n - zw| = 0. \quad (60)$$

Man überzeugt sich leicht, dass aus dieser Gleichung  $z_n w_n \rightarrow zw$  ( $n \rightarrow \infty$ ) folgt. (iv)

kann leicht aus (iii) gefolgert werden. (v) folgt sofort aus

$$|\overline{z_n} - \overline{z}| = |\overline{z_n - z}| = |z_n - z|. \quad (61)$$

Nun wo wir Folggrenzwerte in  $\mathbb{C}$  verstanden haben, können wir auch *Funktionsgrenzwerte* verstehen. Bevor wir das tun müssen wir uns zunächst aber mit ein paar topologischen Begriffen auseinandersetzen.

**Intermezzo: Einige Worte zur Topologie von  $\mathbb{C}$ .**

**Definition 22.** HÄUFUNGSPUNKTE/OFFENHEIT/ABGESCHLOSSENHEIT. Es sei  $A \subset \mathbb{C}$  eine Menge. Ein Punkt  $z_0 \in \mathbb{C}$  heißt *Häufungspunkt* von  $A$ , falls es eine Folge  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$  gibt mit  $z_n \rightarrow z_0$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Die Menge aller Häufungspunkte von  $A$  wird *Abschluss* genannt und mit  $\bar{A}$  bezeichnet. Eine Menge  $A \subset \mathbb{C}$  heißt *abgeschlossen*, falls  $\bar{A} = A$ . Eine Menge  $D \subset \mathbb{C}$  heißt *offen*, falls  $\mathbb{C} \setminus D$  abgeschlossen ist.

Man überzeugt sich leicht, dass die oben definierten Konzepte von Offenheit und Abgeschlossenheit äquivalent zu den Konzepten von Offenheit und Abgeschlossenheit im *metrischen Raum*  $(\mathbb{C}, d_{|\cdot|})$  sind. Dazu dient die folgende

**Proposition 23.** Eine Menge  $D \subset \mathbb{C}$  ist genau dann offen wenn es für alle  $z \in D$  ein  $\varepsilon > 0$  gibt mit

$$d_{|\cdot|}(z, w) < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad w \in D. \quad (62)$$

Definieren wir  $B_\varepsilon(z) := \{w \in \mathbb{C} : d_{|\cdot|}(z, w) < \varepsilon\}$ , so ist (62) äquivalent zu  $B_\varepsilon(z) \subset D$ .

**Beweis.** Ist den Lesenden als Übungsaufgabe überlassen.

**Intermezzo Ende.**

Nun können wir Funktionsgrenzwerte definieren.

**Definition 24.** FUNKTIONSGRENZWERTE IN  $\mathbb{C}$ . Es sei  $A \subset \mathbb{C}$  eine Menge  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  eine Funktion und  $z_0 \in \mathbb{C}$  ein Häufungspunkt von  $A$ . Ferner sei  $\zeta \in \mathbb{C}$ . Wir sagen  $f$  hat für  $z \rightarrow z_0$  den Funktionsgrenzwert  $\zeta$ , im Zeichen

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \zeta \quad \text{oder} \quad f(z) \rightarrow \zeta \quad (z \rightarrow z_0) \quad (63)$$

falls für jede Folge  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$  mit  $z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z_0$  gilt, dass  $f(z_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \zeta$ .

Etliche bekannte Rechenregeln für Funktionsgrenzwerte übertragen sich auf  $\mathbb{C}$ . Wir werden diese Regeln an der Stelle nicht vertiefen und verweisen auf die Analysis-Grundlagenvorlesungen. Haben wir Funktionsgrenzwerte definiert, so können wir auch das wichtige Konzept der *Stetigkeit* einführen.

**Definition 25.** STETIGKEIT IN  $\mathbb{C}$ . Es sei  $D \subset \mathbb{C}$  eine (hier beliebige, aber in der Praxis meist offene) Menge und  $z_0 \in D$ . Dann heißt  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  stetig in  $z_0$  falls gilt

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0). \quad (64)$$

Ferner heißt  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  stetig auf  $D$  falls  $f$  in jedem Punkt  $z_0 \in D$  stetig ist.

Auch dieser Stetigkeitsbegriff stimmt mit dem Konzept der Stetigkeit im metrischen Raum  $(\mathbb{C}, d_{|\cdot|})$  überein.

**Proposition 26.** Es sei  $D \subset \mathbb{C}$  offen und  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  gegeben. Dann ist  $f$  stetig auf  $D$  genau dann wenn für alle offenen Teilmengen  $U \subset \mathbb{C}$  gilt, dass  $f^{-1}(U) \subset D$  offen ist.

**Beweis.** Ist den Lesenden als Übungsaufgabe überlassen.

**Beispiel 27.** Die Funktion  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  gegeben durch  $f(z) = |z|$  ist stetig (auf  $\mathbb{C}$ ). In der Tat: Für alle  $z_0 \in \mathbb{C}$  und alle Folgen  $z_n \rightarrow z_0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) folgt mit Proposition 21 (i)

$$f(z_n) = |z_n| \rightarrow |z_0| = f(z_0) \quad (n \rightarrow \infty). \quad (65)$$

Mit Definition 25 folgt die Stetigkeit. Für alle  $U \subset \mathbb{C}$  ist also das Urbild  $f^{-1}(U)$  offen. Man beachte: Das Bild  $f(U)$  ist nicht zwingend offen, z.B. gilt für die offene(!) Menge  $U = B_1(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$

$$f(B_1(0)) = [0, 1) := \{w \in \mathbb{C} : w \in \mathbb{R} \ \& \ 0 \leq w < 1\}. \quad (66)$$

## 1.5 Potenzreihen

Wir werden nun einige Funktionen auf  $\mathbb{C}$  über *Potenzreihen* einführen. Hierfür müssen wir zunächst wiederholen, was Konvergenz von Reihen bedeutet.

**Definition 28.** REIHENKONVERGENZ. Es sei  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{C}$  eine Folge. Wir nennen für  $m \in \mathbb{N}_0$

$$s_m := \sum_{n=0}^m z_n \in \mathbb{C} \quad (67)$$

die  $m$ -te Partialsumme von  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ . Wir sagen, dass die *unendliche Reihe*  $\sum_{n \geq 0} z_n$  konvergent ist, falls  $(s_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$  eine konvergente Folge in  $\mathbb{C}$  ist. Andernfalls sagen wir, dass die unendliche Reihe  $\sum_{n \geq 0} z_n$  divergiert. Im Fall, dass  $\sum_{n \geq 0} z_n$  konvergiert, nennen wir

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n := \lim_{m \rightarrow \infty} s_m = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m z_n \quad (68)$$

den Wert der Reihe. Wir sagen, dass die Reihe  $\sum_{n \geq 0} z_n$  *absolut konvergent* ist wenn die Reihe  $\sum_{n \geq 0} |z_n|$  konvergent ist.

Wir haben in der Analysis gesehen, dass jede absolut konvergente Reihe in  $\mathbb{C}$  auch konvergent ist. Hierbei geht die *Vollständigkeit* von  $\mathbb{C}$  (siehe 19) massiv ein. Wir wiederholen das Argument zur Unterstützung der Lesenden.

**Proposition 29.** Jede absolut konvergente Reihe  $\sum_{n \geq 0} z_n$  ist auch konvergent.

**Beweis.** Es sei  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  so, dass  $\sum_{n \geq 0} z_n$  absolut konvergiert. Wir definieren für  $m \in \mathbb{N}_0$

$$s_m := \sum_{n=0}^m z_n \quad (69)$$

die  $m$ -te Partialsumme bezüglich  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  und

$$\tilde{s}_m := \sum_{n=0}^m |z_n| \quad (70)$$

die  $m$ -te Partialsumme bezüglich  $(|z_n|)_{n \in \mathbb{N}_0}$ . Berechne für  $m, k \in \mathbb{N}_0$ , etwa  $m \geq k$ ,

$$|s_m - s_k| = \left| \sum_{n=k+1}^m z_n \right| \leq \sum_{n=k+1}^m |z_n| = |\tilde{s}_m - \tilde{s}_k|. \quad (71)$$

Dieselbe Abschätzung gilt (wie man leicht nachrechnet) auch für  $k \geq m$ . Da nun wegen der absoluten Konvergenz die Folge  $(\tilde{s}_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$  in  $\mathbb{C}$  konvergiert, erfüllt sie auch das Cauchy-Kriterium, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : |\tilde{s}_m - \tilde{s}_k| < \varepsilon \quad \forall m, k \geq N(\varepsilon). \quad (72)$$

Mit (71) folgt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : |s_m - s_k| < \varepsilon \quad \forall m, k \geq N(\varepsilon). \quad (73)$$

Somit erfüllt  $(s_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$  auch das Cauchy-Kriterium. Proposition 19 impliziert daher die Konvergenz von der Folge der Partialsummen  $(s_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ . Wir folgern die Konvergenz der Reihe  $\sum_{n \geq 0} z_n$  (siehe Definition 28).

Man beachte an dieser Stelle, dass nicht jede konvergente Reihe auch absolut konvergent ist. Ein gutes Beispiel dafür ist

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1}. \quad (74)$$

Auch hier verweisen wir für Details auf die Analysis-Vorlesung. Wir wiederholen nun zwei *Konvergenzkriterien* aus der Analysis



**Satz 30. NOTWENDIGES NULLFOLGENKRITERIUM.** Es sei  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{C}$  eine Folge. Falls  $\sum_{n \geq 0} z_n$  konvergiert, so gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$ .

**Beweis.** Es sei  $\sum_{n \geq 0} z_n$  konvergent. Definiere  $s_m := \sum_{k=0}^m z_k$ . Insbesondere ist für  $n \in \mathbb{N}$

$$s_n - s_{n-1} = \sum_{k=n}^n z_k = z_n. \quad (75)$$

Wegen der Konvergenz der Reihe gibt es ein  $s \in \mathbb{C}$  mit  $s_m \rightarrow s$  ( $m \rightarrow \infty$ ). Dann gilt

$$0 = s - s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n. \quad (76)$$

Die Behauptung folgt.

**Satz 31. WURZELKRITERIUM.** Es sei  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{C}$  eine Folge. Man definiere  $q := \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|}$ . Ist  $q < 1$ , so ist  $\sum_{n \geq 0} z_n$  absolut konvergent. Ist  $q > 1$  so ist  $\sum_{n \geq 0} z_n$  divergent.

**Beweis.** Siehe Analysis.

Desweiteren wird für uns das *Cauchy-Produkt* aus der Analysis wichtig sein.

**Satz 32. CAUCHY-PRODUKT.** Es seien  $(z_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$  und  $(w_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}_0}$  so, dass  $\sum_{j \geq 0} z_j$  und  $\sum_{\ell \geq 0} w_\ell$  absolut konvergent sind. Dann konvergiert auch  $\sum_{n \geq 0} (\sum_{k=0}^n z_k w_{n-k})$  absolut und es gilt

$$\left( \sum_{j=0}^{\infty} z_j \right) \left( \sum_{\ell=0}^{\infty} w_\ell \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n z_k w_{n-k} \right). \quad (77)$$

**Beweis.** Siehe Otto Forster, Analysis 1. Satz 3 in § 8.

**Definition 33. POTENZREIHE.** Es sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{C}$  eine Folge und  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Wir nennen für beliebiges  $z \in \mathbb{C}$  den Ausdruck

$$P(z) := \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n \quad (78)$$

*Potenzreihe* bezüglich  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  um den *Referenzpunkt*  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Wir definieren die *Konvergenzbereiche von P* durch

$$D_A := \{z \in \mathbb{C} : P(z) \text{ konvergiert absolut}\} \quad \text{und} \quad D_B := \{z \in \mathbb{C} : P(z) \text{ konvergiert}\}. \quad (79)$$

Die Abbildung  $f_P : D_B \rightarrow \mathbb{C}$  gegeben durch

$$f_P(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (z \in D_B) \quad (80)$$

heißt *Wertefunktion der Potenzreihe P*.

Man beachte insbesondere, dass nach Proposition 29 gilt  $D_A \subset D_B$ .

**Beispiel 34.** Es sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0} = (1)_{n \in \mathbb{N}_0}$  und  $z_0 = 0$ . Dann ist

$$P(z) = \sum_{n \geq 0} z^n \quad (81)$$

stets eine *geometrische Reihe*. Aus der Analysis<sup>a</sup> wissen wir, dass für alle  $m \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{n=0}^m z^n = \begin{cases} \frac{1-z^{m+1}}{1-z} & z \neq 1 \\ m & z = 1 \end{cases} \quad (82)$$

Falls  $|z| < 1$  so folgert man die Konvergenz von  $P(z)$  leicht aus der obigen Formel. Falls  $|z| \geq 1$  so ist das notwendige Nullfolgenkriterium (vgl. Satz 30) nicht erfüllt, weswegen  $P(z)$  divergiert. Somit ist  $D_B = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} = B_1(0)$ . Ferner gilt

$$f_P(z) = \frac{1}{1-z} \quad \forall z \in B_1(0). \quad (83)$$

Man beachte auch

$$\sum_{n=0}^m |z^n| = \sum_{n=0}^m |z|^n = \begin{cases} \frac{1-|z|^{m+1}}{1-|z|} & |z| \neq 1 \\ m & |z| = 1 \end{cases}. \quad (84)$$

Somit konvergiert  $\sum_{n \geq 0} |z^n|$  auch genau dann wenn  $|z| < 1$ . Wir folgern  $D_A = D_B = B_1(0)$ .

<sup>a</sup>Zur Erinnerung: Die Formel für die geometrische Summe in (82) kommt aus folgender Beobachtung:

$$(1-z) \sum_{n=0}^m z^n = \sum_{n=0}^m (1-z)z^n = \sum_{n=0}^m (z^n - z^{n+1}) \stackrel{(*)}{=} z^0 - z^{m+1} = 1 - z^{m+1}. \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^m z^n = \frac{1-z^{m+1}}{1-z}.$$

Wir haben in (\*) die Teleskopsummenformel verwendet.

**Proposition 35.** Es sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{C}$  eine Folge,  $z_0 \in \mathbb{C}$  und

$$P(z) := \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n \quad (85)$$

gegeben. Definiere

$$R := \begin{cases} \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} & \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in (0, \infty) \\ \infty & \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \\ 0 & \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty \end{cases}. \quad (86)$$

Dann gilt

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\} \subset D_A \subset D_B \subset \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq R\}. \quad (87)$$

**Beweis.**  $D_A \subset D_B$  ist stets erfüllt (weil absolut konvergente Reihen stets konvergent sind). Wir wenden das Wurzelkriterium (Satz 31) an. FALL 1.  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in (0, \infty)$ . Wir berechnen für  $z_n := a_n(z - z_0)^n$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n| |z - z_0|^n} \quad (88)$$

$$= \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} |z - z_0| \begin{cases} < 1 & |z - z_0| < \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \\ > 1 & |z - z_0| > \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \end{cases}. \quad (89)$$

Satz 31 besagt dann, dass

$$P(z) = \sum_{n \geq 0} z_n \begin{cases} \text{ist absolut konvergent} & |z - z_0| < \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \\ \text{ist divergent} & |z - z_0| > \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \end{cases} \quad (90)$$

Mit anderen Worten (und der Definition von  $R$  in (86))

$$P(z) = \sum_{n \geq 0} z_n \begin{cases} \text{ist absolut konvergent} & |z - z_0| < R \\ \text{ist divergent} & |z - z_0| > R \end{cases}. \quad (91)$$

Der obere Fall beweist  $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\} \subset D_A$  und der untere Fall beweist  $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq R\}^C \subset D_B^C$  (was nichts anderes bedeutet als  $D_B \subset \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq R\}$ ). Die Behauptung im Fall 1 ist gezeigt. Die anderen Fälle  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$  und  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$  gehen analog.

**Definition 36.** KONVERGENZRADIUS. Der Wert  $R = R_P \in [0, \infty]$  aus der vorigen Proposition heißt *Konvergenzradius* der Potenzreihe  $P$ .

**Beispiel 37.** Man kann nachrechnen, dass im Fall von

$$P(z) := \sum_{n \geq 0} z^n, \quad (92)$$

gilt  $R_P = 1$ . In der Tat: Es ist  $a_n = 1$  für alle  $n$  und somit gibt (86)

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|1|}} = 1. \quad (93)$$

In diesem Beispiel gilt auch  $D_A = D_B = B_1(0)$ , vgl. Beispiel 34. Es gibt aber auch Beispiele, wo  $D_A \neq D_B$ , z.B.

$$\tilde{P}(z) := \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n+1} \quad (94)$$

Sie können als Übungsaufgabe nachrechnen, dass  $R_{\tilde{P}} = 1$  und  $D_A = B_1(0)$ . Sie werden aber mit dem Leibniz-Kriterium aus der Analysis zeigen können, dass  $-1 \in D_B$  (also insbesondere  $-1 \in D_B \setminus D_A$ ). Man kann sogar beweisen, dass  $D_B = \overline{B_1(0)} \setminus \{1\}$ .

## 1.6 Die Exponentialfunktion

Nun werden wir die *komplexe Exponentialfunktion* einführen. Dazu betrachten wir eine ganz bestimmte Potenzreihe.

**Proposition 38.** Gegeben sei

$$P(z) := \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} z^n \quad (95)$$

Dann gilt  $R_P = \infty$ , d.h.  $P(z)$  konvergiert für alle  $z \in \mathbb{C}$ .

**Beweis.** Es ist  $a_n = \frac{1}{n!}$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ . Wir definieren (nur für diesen Beweis) für  $\alpha \in \mathbb{R}$  die *Gauss-Klammer*  $[\alpha] := \max\{k \in \mathbb{N} : k \leq \alpha\}$ . Man beachte, dass stets  $[\alpha] \leq \alpha \leq [\alpha] + 1$ . Somit gilt auch für alle  $n \in \mathbb{N}$

$$n - \left[\frac{n}{2}\right] \geq n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2}. \quad (96)$$

Nun berechnen wir für  $n \geq 2$

$$\sqrt[n]{n!} \geq \sqrt[n]{n(n-1) \cdots \left(\left[\frac{n}{2}\right] + 1\right) \cdot 1 \cdots 1} \geq \sqrt[n]{\left(\left[\frac{n}{2}\right] + 1\right)^{(n - [\frac{n}{2}]})} \stackrel{(96)}{\geq} \sqrt[n]{\left(\left[\frac{n}{2}\right] + 1\right)^{\frac{n}{2}}} \quad (97)$$

$$= \left(\left[\frac{n}{2}\right] + 1\right)^{\frac{1}{2}} \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty). \quad (98)$$

Wir folgern  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$  und damit (mit (86))  $R_P = \infty$ .

**Definition 39.** EXPONENTIALFUNKTION. Wir definieren die Abbildung  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

durch

$$\exp(z) := e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \quad (99)$$

(Diese Abbildung ist wohldefiniert nach Proposition 38)

**Proposition 40.** EIGENSCHAFTEN DER EXPONENTIALFUNKTION. Es seien  $z, w \in \mathbb{C}$ .

- (i)  $e^0 = 1$ .
- (ii)  $e^{z+w} = e^z e^w$ . Insbesondere gilt für  $n \in \mathbb{N}$ , dass  $(e^z)^n = e^{nz}$ .
- (iii) Es gilt  $e^z \neq 0$  und  $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$ .
- (iv)  $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$ , insbesondere  $e^x \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R}$ . Ferner gilt  $e^x > 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  und  $x \mapsto e^x$  ist streng monoton auf  $\mathbb{R}$ .
- (v)  $|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}$ . Insbesondere  $|e^{iy}| = 1$  für alle  $y \in \mathbb{R}$ .

**Beweis.** Zu (i).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} 0^n = \frac{0^0}{0!} + \frac{0^1}{1!} + \dots = 1 + 0 + \dots = 1. \quad (100)$$

Zu (ii). Es gilt

$$e^z e^w = \left( \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} z^j \right) \left( \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} w^\ell \right) \stackrel{(77)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} z^k \frac{1}{(n-k)!} w^{n-k} \right) \quad (101)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} z^k w^{n-k} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k w^{n-k} \right) \quad (102)$$

$$\stackrel{\text{Bin. Lehrsatz}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z+w)^n = e^{z+w}. \quad (103)$$

Nun gilt auch

$$(e^z)^n = \underbrace{e^z \cdot \dots \cdot e^z}_{n\text{-mal}} = e^{z+\dots+z} = e^{nz}, \quad (104)$$

wobei wir im vorletzten Schritt die Funktionalgleichung  $e^z e^w = e^{z+w}$  n-mal induktiv verwendet haben. Zu (iii). Es gilt

$$e^z e^{-z} = e^{z+(-z)} = e^0 = 1. \quad (105)$$

Daher besitzt  $e^z$  ein multiplikatives Inverses und ist deswegen ungleich Null. Die Behauptung

tung  $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$  folgt auch. Zu (iv).

$$\overline{e^z} = \overline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n} = \lim_{m \rightarrow \infty} \overline{\sum_{n=0}^m \frac{1}{n!} z^n} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m \overline{\frac{1}{n!} z^n} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m \frac{1}{n!} \overline{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \overline{z^n} = e^{\overline{z}}. \quad (106)$$

Für  $x \in \mathbb{R}$  gilt  $\bar{x} = x$  und

$$\operatorname{Im}(e^x) = \frac{e^x - \overline{e^x}}{2i} = \frac{e^x - e^{\bar{x}}}{2i} = \frac{e^x - e^x}{2i} = 0. \quad (107)$$

Dass  $e^x > 0$  liest man für positive  $x > 0$  direkt aus (99) ab. Für negative  $x$  folgt es aus  $e^x = \frac{1}{e^{-x}} > 0$ . Die strenge Monotonie kann man für positive  $x$  auch wieder direkt aus (99) ablesen und für negative  $x$  folgt es aus  $e^x = \frac{1}{e^{-x}}$ . Zu (v)

$$|e^z|^2 = e^z \overline{e^z} \stackrel{(iv)}{=} e^z e^{\overline{z}} = e^{z+\overline{z}} = e^{2\operatorname{Re}(z)} = (e^{\operatorname{Re}(z)})^2 \quad (108)$$

Die Behauptung folgt durch Wurzelziehen (und Benutzung von  $e^x > 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ ). Als direkte Folgerung erhält man für  $y \in \mathbb{R}$

$$|e^{iy}| = e^{\operatorname{Re}(iy)} = e^0 = 1. \quad (109)$$

Wir besprechen als nächstes ein Resultat, welches klärt, wie gut die Exponentialfunktion durch ihre Partialsummen approximiert wird.

**Proposition 41.** APPROXIMATION DER EXPONENTIALFUNKTION. Für alle  $z \in \mathbb{C}$  gilt

$$\left| e^z - \sum_{n=0}^N \frac{z^n}{n!} \right| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right| \leq \frac{|z|^{N+1} e^{|z|}}{(N+1)!}. \quad (110)$$

Der Term auf der rechten Seite von (110) strebt für alle festen  $z \in \mathbb{C}$  gegen 0 für  $N \rightarrow \infty$ .

**Beweis.** Die erste Gleichheit ist einsichtig mit der Definition der Exponentialfunktion. Zur zweiten Ungleichung

$$\left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^{n+N+1}}{(n+N+1)!} = |z|^{N+1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{(n+N+1)!} \quad (111)$$

Nun schätzen wir für  $n \in \mathbb{N}_0$  ab

$$(n + N + 1)! = (1 \cdot \dots \cdot (N + 1))((N + 2) \cdot \dots \cdot (n + N + 1)) = (N + 1)! \left( \prod_{k=1}^n (k + N + 1) \right) \quad (112)$$

$$\geq (N + 1)! \left( \prod_{k=1}^n k \right) = (N + 1)! n!. \quad (113)$$

Wir erhalten mit (111)

$$\left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right| \leq |z|^{N+1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{(N+1)!n!} = \frac{|z|^{N+1}}{(N+1)!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} = \frac{|z|^{N+1}}{(N+1)!} e^{|z|}. \quad (114)$$

Eine zweite wichtige Abschätzung ist

**Proposition 42.** Es sei  $e := e^1$  die *Euler'sche Zahl*. Dann gilt  $2 < e^1 \leq 3$ .

**Beweis.** Zur ersten Ungleichung

$$e^1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots \geq 2. \quad (115)$$

Für die zweite Ungleichung überzeugt man sich zunächst leicht mit Induktion davon, dass  $k! \geq 2^{k-1}$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Dann gilt

$$e^1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + e^1 = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \leq 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3. \quad (116)$$

## 1.7 Kosinus und Sinus

**Definition 43. KOSINUS UND SINUS (HYPERBOLICUS).** Wir definieren für  $z \in \mathbb{C}$

$$\cos(z) := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \sin(z) := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad (117)$$

sowie

$$\cosh(z) := \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad \sinh(z) := \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad (118)$$

Man beachte, dass insbesondere gilt, dass

$$\cos(z) + i \sin(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} + i \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = e^{iz}. \quad (119)$$

Eine nützliche Konsequenz ist die *Formel von De Moivre*

**Proposition 44.** FORMEL VON DE MOIVRE. Für alle  $z \in \mathbb{C}$  und  $n \in \mathbb{N}_0$  gilt

$$(\cos(z) + i \sin(z))^n = \cos(nz) + i \sin(nz). \quad (120)$$

**Beweis.** Mit (119) gilt

$$(\cos(z) + i \sin(z))^n \stackrel{(119)}{=} (e^{iz})^n = e^{inz} = e^{i(nz)} \stackrel{(119)}{=} \cos(nz) + i \sin(nz). \quad (121)$$

Mit der gewählten Definition ergeben sich auch leicht die bekannten *Additionstheoreme*.

**Proposition 45.** ADDITIONSTHEOREME. Es gilt für  $z, w \in \mathbb{C}$

(i)  $\cos(z + w) = \cos(z) \cos(w) - \sin(z) \sin(w).$

(ii)  $\sin(z + w) = \sin(z) \cos(w) + \cos(z) \sin(w).$

(iii)  $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1.$

**Beweis.** Wir beweisen nur (i) und (iii). Den Rest überlassen wir den Lesenden als Übungsaufgabe. Zu (i).

$$\cos(z) \cos(w) - \sin(z) \sin(w) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} - \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} \quad (122)$$

$$\stackrel{i^2=-1}{=} \frac{(e^{iz} + e^{-iz})(e^{iw} + e^{-iw}) + (e^{iz} - e^{-iz})(e^{iw} - e^{-iw})}{4} \quad (123)$$

$$= \frac{e^{i(z+w)} + e^{i(z-w)} + e^{i(w-z)} + e^{-i(z+w)} + e^{i(z+w)} - e^{i(z-w)} - e^{i(w-z)} + e^{-i(z+w)}}{4} \quad (124)$$

$$= \frac{2(e^{i(z+w)} + e^{-i(z+w)})}{4} = \frac{e^{i(z+w)} + e^{-i(z+w)}}{2} = \cos(z + w). \quad (125)$$

Zu (iii).

$$\cos^2(z) + \sin^2(z) = \left( \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right)^2 + \left( \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right)^2 \quad (126)$$

$$= \frac{e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}}{4} - \frac{e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}}{4} = \frac{4}{4} = 1. \quad (127)$$

Für  $\theta \in \mathbb{R}$  haben wir

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{e^{i\theta} + e^{\overline{i\theta}}}{2} = \frac{e^{i\theta} + \overline{e^{i\theta}}}{2} = \operatorname{Re}(e^{i\theta}) \quad (128)$$



und analog

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{e^{i\theta} - e^{i\bar{\theta}}}{2i} = \frac{e^{i\theta} - \overline{e^{i\theta}}}{2i} = \operatorname{Im}(e^{i\theta}). \quad (129)$$

Insbesondere gilt  $\cos(\theta), \sin(\theta) \in \mathbb{R}$  für alle  $\theta \in \mathbb{R}$ . Dies ist jedoch nicht der Fall wenn man komplexwertige Argumente von  $\theta$  zulässt.

Wir widmen uns nun den *Potenzreihendarstellungen* für Kosinus und Sinus.

**Proposition 46.** POTENZREIHENDARSTELLUNGEN. Für alle  $z \in \mathbb{C}$  gilt

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \quad \text{und} \quad \sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \quad (130)$$

**Beweis.** Wir zeigen nur die Reihendarstellung für den Kosinus. Die andere Reihendarstellung überlassen wir den Lesenden als Übungsaufgabe.

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [(iz)^n + (-iz)^n] = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (iz)^n [1 + (-1)^n]. \quad (131)$$

Mit

$$1 + (-1)^n = \begin{cases} 2 & n \text{ gerade} \\ 0 & n \text{ ungerade} \end{cases} \quad (132)$$

gilt

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} (iz)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}. \quad (133)$$

Wir folgern insbesondere  $\cos(0) = 1, \sin(0) = 0$ . Aus der Analysis wissen wir (auch als Konsequenz der Potenzreihendarstellungen), dass

$$\cos'(\theta) = -\sin(\theta) \quad \text{und} \quad \sin'(\theta) = \cos(\theta) \quad \forall \theta \in \mathbb{R}. \quad (134)$$

Wir werden das Differenzieren von Potenzreihen später nochmal an anderer Stelle aufgreifen. An dieser Stelle überspringen wir den Beweis von (134).

**Proposition 47.** Die Abbildung  $(0, 2) \ni \theta \mapsto \cos(\theta)$  ist auf  $(0, 2)$  streng monoton fallend (und somit injektiv auf  $[0, 2]$ ). Ferner gibt es ein eindeutiges  $\theta_0 \in (0, 2)$  mit  $\cos(\theta_0) = 0$ . Desweiteren gilt  $\sin(\theta_0) = 1$  und  $\sin(\theta) > 0$  für alle  $\theta \in (0, 2)$ .

**Beweis. Schritt 1.**  $\sin(\theta) > 0$  für alle  $\theta \in (0, 2)$ . Dazu sei  $\theta \in (0, 2)$

$$\frac{\sin \theta}{\theta} \stackrel{(130)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \theta^{2n} = 1 - \frac{\theta^2}{3!} + \frac{\theta^4}{5!} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \theta^{2n} \quad (135)$$

Nun gilt für  $\theta \in (0, 2)$

$$\left| \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \theta^{2n} \right| \leq \sum_{n=3}^{\infty} \frac{|\theta|^{2n}}{(2n+1)!} \leq \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2^{2n}}{(2n+1)!} = \frac{1}{2} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (136)$$

Und mit Proposition 41

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!} \leq \sum_{m=7}^{\infty} \frac{2^m}{m!} \leq \frac{2^8 e^2}{8!} \stackrel{\text{Prop 42}}{\leq} 9 \frac{2^8}{8!}. \quad (137)$$

Wir folgern für alle  $\theta \in (0, 2)$

$$\left| \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \theta^{2n} \right| \leq \frac{9 \cdot 2^8}{2 \cdot 8!}. \quad (138)$$

Beachte, dass  $8 \cdot 4 \cdot 2 = 2^7$  und deswegen gilt  $2 \cdot 8! \geq 2^8 \cdot 7 \cdot 6$ . Man folgert

$$\left| \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \theta^{2n} \right| \leq \frac{9 \cdot 2^8}{2 \cdot 8!} \leq \frac{9}{42} = \frac{3}{14}. \quad (139)$$

Mit (135) ergibt sich nun für  $\theta \in (0, 2)$

$$\frac{\sin \theta}{\theta} \geq 1 - \frac{\theta^2}{3!} - \frac{3}{14} \geq 1 - \frac{4}{6} - \frac{3}{14} = \frac{1}{3} - \frac{3}{14} = \frac{5}{42} > 0. \quad (140)$$

Das bedeutet, dass  $\sin(\theta) > 0$  für alle  $\theta \in (0, 2)$  und daher  $\cos'(\theta) = -\sin(\theta) < 0$  für alle  $\theta \in (0, 2)$ . Deswegen ist  $\cos$  auf  $(0, 2)$  streng monoton fallend und somit injektiv.

**Schritt 2.** Aus der Potenzreihendarstellung (130) folgt sofort, dass  $\cos(0) = 0$ . Ferner

$$\cos 2 = 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \frac{2^6}{6!} + \sum_{k=4}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k}}{(2k)!}. \quad (141)$$

Nun gilt

$$\sum_{k=4}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k}}{(2k)!} \leq \sum_{k=4}^{\infty} \frac{2^{2k}}{(2k)!} \leq \sum_{m=8}^{\infty} \frac{2^m}{m!} \leq \frac{2^8 e^2}{8!} = 9 \frac{2^8}{8!}. \quad (142)$$

Nun ist  $8 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3 \geq 8 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 = 2^8$  und daher

$$9 \frac{2^8}{8!} \leq 9 \frac{1}{7 \cdot 6} = \frac{9}{42} = \frac{3}{14}. \quad (143)$$

Mit dieser Abschätzung und (141) ergibt sich

$$\cos 2 = 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \frac{2^6}{6!} + \sum_{k=4}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k}}{(2k)!} \leq 1 - 2 + \frac{16}{24} + \frac{3}{14} = -\frac{1}{3} + \frac{3}{14} = -\frac{5}{42} < 0. \quad (144)$$

Nach dem Zwischenwertsatz hat  $\cos$  nun eine Nullstelle in  $(0, 2)$  und wegen der Injektivität ist diese auch eindeutig. Wir nennen sie im Folgenden  $\theta_0$

**Schritt 3.**  $\sin(\theta_0) = 1$ . Es gilt wegen Schritt 1, dass  $\sin(\theta_0) > 0$ . Ferner gilt mit Schritt 2

$$\sin^2(\theta_0) = \sin^2(\theta_0) + 0 = \sin^2(\theta_0) + \cos^2(\theta_0) = 1. \quad (145)$$

Die Behauptung folgt durch Wurzelziehen (mit positivem Vorzeichen, da  $\sin(\theta_0) > 0$ ).

**Definition 48.** Die Zahl  $\theta_0 \in (0, 2)$  aus der vorigen Proposition nennen wir  $\frac{\pi}{2}$  und definieren somit auch die *Kreiszahl*  $\pi$  (als  $2\theta_0$ ).

Beachte, dass nun gilt

$$\sin \pi = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0 \quad (146)$$

und

$$\cos \pi = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1. \quad (147)$$

Außerdem gelten die folgenden (*Anti-*)*Periodizitäten*

**Proposition 49.** Für alle  $z \in \mathbb{C}$  gilt

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + z\right) = -\sin(z) \quad \text{und} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + z\right) = \cos(z), \quad (148)$$

$$\cos(\pi + z) = -\cos(z) \quad \text{und} \quad \sin(\pi + z) = -\sin(z), \quad (149)$$

$$\cos(2\pi + z) = \cos(z) \quad \text{und} \quad \sin(2\pi + z) = \sin(z). \quad (150)$$

**Beweis.** Folgt sofort mit Proposition 45. Für etwas mehr Details siehe auch Übungsblatt 2.

**Korollar 50.** Die Funktion Abbildung  $\mathbb{R} \ni \theta \mapsto e^{i\theta} \in \mathbb{C}$  ist  $2\pi$ -periodisch.

**Beweis.** Mit dem vorigen Korollar haben wir für alle  $\theta \in \mathbb{R}$

$$e^{i(2\pi+\theta)} \stackrel{(119)}{=} \cos(2\pi + \theta) + i \sin(2\pi + \theta) = \cos(\theta) + i \sin(\theta) = e^{i\theta}. \quad (151)$$

## 1.8 Polarkoordinaten

In diesem Abschnitt werden wir sehen, dass wir jede Zahl  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  eindeutig als  $z = re^{i\theta}$  für ein  $r > 0$  und ein  $\theta \in (-\pi, \pi]$  darstellen können. Diese *Polarkoordinatendarstellung* ist besonders nützlich beim Multiplizieren komplexer Zahlen. In der Tat ist die Rechnung

$$(r_1 e^{i\theta_1})(r_2 e^{i\theta_2}) = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \quad (152)$$

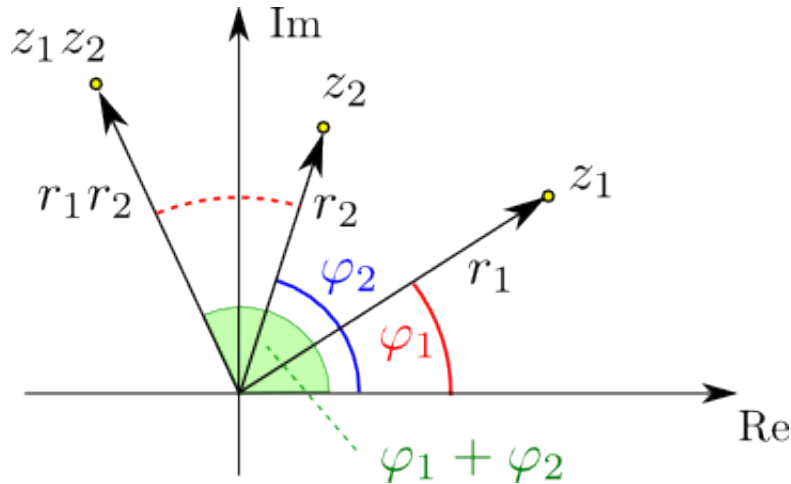


Abbildung 1: Multiplikation komplexer Zahlen grafisch dargestellt

wesentlich einfacher als das Ausmultiplizieren in (14) ff. und hat sogar eine geometrische Interpretation

Um Existenz und Eindeutigkeit dieser Darstellung zu zeigen, benötigen wir zunächst ein wenig Vorbereitung.

**Korollar 51.** Es sei  $\mathbb{S}^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} = 1\}$ . Dann ist die Abbildung

$$b : (-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{S}^1 \quad b(\theta) := (\cos(\theta), \sin(\theta)) \quad (153)$$

bijektiv.

**Beweis.** Da  $b$  wegen Proposition 49  $2\pi$ -periodisch ist, können wir genausogut zeigen, dass  $b : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{S}^1, b(\theta) := (\cos(\theta), \sin(\theta))$  bijektiv ist.

**Schritt 1.** Wir definieren den *ersten Quadranten*  $Q_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0\}$  und zeigen zunächst, dass  $b : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{S}^1 \cap Q_1$  bijektiv ist. Da  $\theta \mapsto \cos(\theta)$  auf  $[0, \frac{\pi}{2}]$  injektiv ist (s. 47), ist auch  $b$  injektiv. Nun zur Surjektivität. Sei  $x, y \in \mathbb{S}^1 \cap Q_1$ , d.h.  $x, y \geq 0$  und  $x^2 + y^2 = 1$ . Insbesondere gilt  $0 \leq x \leq \sqrt{x^2 + y^2} = 1$ . Da  $\cos(0) = 1 \geq x \geq 0 = \cos(\frac{\pi}{2})$  gibt es ein  $\xi \in [0, \frac{\pi}{2}]$  mit  $\cos(\xi) = x$ . Ferner gilt

$$y = \sqrt{y^2} = \sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 - \cos^2(\xi)} = \sqrt{\sin^2(\xi)} = \sin(\xi), \quad (154)$$

wobei wir in der letzten Gleichung verwendet haben, dass nach Proposition 47 gilt  $\sin(\xi) \geq 0$ , da  $\xi \in [0, \frac{\pi}{2}] \subset [0, 2]$ . Wir haben hergeleitet, dass  $(x, y) = (\cos(\xi), \sin(\xi))$ . Die Bijektivität von  $b : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{S}^1 \cap Q_1$  folgt.

**Schritt 2.** Wir definieren nun den *zweiten Quadranten*  $Q_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0, y \geq 0\}$ . Beachte:  $T_{1,2} : \mathbb{S}^1 \cap Q_1 \rightarrow \mathbb{S}^1 \cap Q_2$  gegeben durch  $(x, y) \mapsto (-x, y)$  ist bijektiv. Aus Proposition 49 folgt, dass

$$b(\frac{\pi}{2} + \theta) = T_{1,2}(b(\theta)) \quad \forall \theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \quad (155)$$

Da  $b : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{S}^1 \cap Q_1$  bijektiv ist, ist auch  $T_{1,2} \circ b : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{S}^1 \cap Q_2$  bijektiv. Somit ist nach (155) auch  $b(\cdot + \frac{\pi}{2}) : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{S}^1 \cap Q_2$  bijektiv. Man folgert leicht, dass  $b : [\frac{\pi}{2}, \pi] \rightarrow \mathbb{S}^1 \cap Q_2$  bijektiv ist. Da sich  $(\mathbb{S}^1 \cap Q_1)$  und  $(\mathbb{S}^1 \cap Q_2)$  nur bei  $(0, 1) = b(\frac{\pi}{2})$  schneiden, folgern wir daraus auch, dass  $b : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{S}^1 \cap (Q_1 \cup Q_2)$  bijektiv ist.

**Schritt 3.** Wir definieren  $Q_3 \cup Q_4 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 0\}$ , und definieren  $T_{(1,2),(3,4)} : \mathbb{S}^1 \cap (Q_1 \cup Q_2) \rightarrow \mathbb{S}^1 \cap (Q_3 \cup Q_4)$  durch  $(x, y) \mapsto (-x, -y)$ . Wieder folgern wir mit Proposition 49, dass

$$b(\pi + \theta) = T_{(1,2),(3,4)}(b(\theta)) \quad \forall \theta \in [0, \pi]. \quad (156)$$

Mit dieser Gleichung folgert man leicht wie in Schritt 2 die Bijektivität von  $b : [\pi, 2\pi] \rightarrow \mathbb{S}^1 \cap (Q_3 \cup Q_4)$ . Ab hier überlassen wir den Lesenden die Details als Übungsaufgabe.

**Korollar 52.** Es sei hier  $\mathbb{S}^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ . Die Abbildung  $\tilde{b} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$  gegeben durch  $\tilde{b}(\theta) := e^{i\theta}$  ist  $2\pi$ -periodisch und  $\tilde{b}|_{(-\pi, \pi]} : (-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{S}^1$  ist bijektiv. Es gilt sogar noch mehr: Für jedes Intervall der Form  $I = (a, b]$  oder  $I = [a, b)$  mit  $b - a = 2\pi$  ist  $\tilde{b}|_I : I \rightarrow \mathbb{S}^1$  bijektiv.

**Beweis.** Es sei  $b$  wie aus Korollar 51. Es gilt mit (119), dass  $\tilde{b}(\theta) = e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$  und somit ist  $b(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta)) = (\operatorname{Re}(\tilde{b}(\theta)), \operatorname{Im}(\tilde{b}(\theta)))$ . Nun folgert man die Aussage leicht aus den Eigenschaften von  $b$ . Die Details sind den Lesenden als Übungsaufgabe überlassen.

**Definition 53.** ARGUMENT. Die Umkehrabbildung  $a : \mathbb{S}^1 \rightarrow (-\pi, \pi]$  von  $\tilde{b}|_{(-\pi, \pi]}$  (definiert wie im vorigen Korollar) nennen wir *Polarwinkelabbildung*. Für  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  definieren wir außerdem das *Argument*

$$\arg(z) := a\left(\frac{z}{|z|}\right) \quad (157)$$

(Beachte:  $a(\frac{z}{|z|})$  ist wohldefiniert, da  $\frac{z}{|z|} \in \mathbb{S}^1$ .)

**Satz 54.** POLARKOORDINATENDARSTELLUNG. Es sei  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Dann gibt es ein eindeutiges  $r \in (0, \infty)$  und  $\theta \in (-\pi, \pi]$  mit

$$z = r e^{i\theta}. \quad (158)$$

Ferner ist  $r = |z|$  und  $\theta = \arg(z)$ .

**Beweis. Schritt 1.** Existenz. Sei  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  gegeben. Definiere nun

$$\theta := \arg(z) \in (-\pi, \pi], \quad (159)$$

wobei  $a$  wie in Definition 53 ist. Es gilt für  $\tilde{b}$  wie in Korollar 52

$$e^{i\theta} = \tilde{b}(\theta) = \tilde{b}(a(\frac{z}{|z|})) = \frac{z}{|z|} \quad (160)$$

Umgestellt gilt  $z = |z|e^{i\theta}$  und mit  $r := |z| > 0$  findet man  $z = re^{i\theta}$ .

**Schritt 2.** Eindeutigkeit. Angenommen es gibt  $r_1, r_2 \in (0, \infty)$  und  $\theta_1, \theta_2 \in (-\pi, \pi]$  so, dass  $z = r_1e^{i\theta_1} = r_2e^{i\theta_2}$ . Es folgt

$$|z| = |r_1e^{i\theta_1}| = |r_1| |e^{i\theta_1}| = |r_1| = r_1 \quad (161)$$

und analog

$$|z| = |r_2e^{i\theta_2}| = |r_2| |e^{i\theta_2}| = |r_2| = r_2. \quad (162)$$

Wir schließen daraus dass  $r_1 = r_2 = |z|$ . Wegen  $z = r_1e^{i\theta_1} = r_2e^{i\theta_2}$  folgt

$$z = |z|e^{i\theta_1} = |z|e^{i\theta_2}. \quad \Rightarrow e^{i\theta_1} = e^{i\theta_2}. \quad (163)$$

Mit anderen Worten  $\tilde{b}(\theta_1) = \tilde{b}(\theta_2)$ . Da  $\theta_1, \theta_2 \in (-\pi, \pi]$  folgt aus der Bijektivität von  $\tilde{b}$ , dass  $\theta_1 = \theta_2$ .

**Beispiel 55.** Wir stellen  $z = 1 + i$  in Polarkoordinaten dar, d.h. wir wollen schreiben  $1 + i = re^{i\theta}$  für  $r = |z|$  und  $\theta = \arg(z) \in (-\pi, \pi]$ . Zuerst berechnen wir  $r$ .

$$r = |z| = |1 + i| = |1 + 1 \cdot i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \quad (164)$$

Wir suchen somit  $\theta = \arg(z) \in (-\pi, \pi]$  mit  $1 + i = \sqrt{2}e^{i\theta}$ . Es gilt also insbesondere

$$e^{i\theta} = \frac{1 + i}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (165)$$

d.h.

$$\cos(\theta) + i \sin(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (166)$$

Wir folgern, dass

$$\cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (167)$$

**Lösungsweg 1.** Mit Benutzung von Resultaten aus der reellen Analysis (nicht Gegenstand dieser Vorlesung, darf aber in den Übungsaufgaben verwendet werden). Es gilt

$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{1/\sqrt{2}}{1/\sqrt{2}} = 1. \quad \Rightarrow \theta = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}. \quad (168)$$

Wir folgern  $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$  und daher  $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ .

**Lösungsweg 2.** Ohne Benutzung von Resultaten der reellen Analysis. Es gilt

$$0 = \cos(\frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}) = \cos^2(\frac{\pi}{4}) - \sin^2(\frac{\pi}{4}) = 1 - 2\sin^2(\frac{\pi}{4}) \quad \Rightarrow \quad \sin^2(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2} \quad (169)$$

Nach Proposition 47 gilt  $\sin \frac{\pi}{4} > 0$  und deswegen

$$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (170)$$

Beachte nun, dass wegen Proposition 47  $\cos(\frac{\pi}{4}) > \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ . Somit gilt

$$\cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{\cos^2 \frac{\pi}{4}} = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\pi}{4}} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (171)$$

Man folgert, dass (167) von  $\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$  gelöst wird.

## 1.9 Der komplexe Logarithmus

Mithilfe der Polarkoordinatendarstellung können wir das Bild der Exponentialfunktion beschreiben. Wir erinnern uns aus der reellen Analysis daran, dass

$$\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty) \quad (172)$$

bijektiv ist. Die Umkehrfunktion ist der *reelle natürliche Logarithmus*

$$\log_{\mathbb{R}} : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}. \quad (173)$$

### Satz 56. BILD DER EXPONENTIALFUNKTION

(i)  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  ist surjektiv.

(ii) Für  $z, w \in \mathbb{C}$  gilt

$$e^z = e^w \iff z - w \in 2\pi i\mathbb{Z} = \{2\pi ik : k \in \mathbb{Z}\} \quad (174)$$

(iii)  $\exp : \{w \in \mathbb{C} : \text{Im}(w) \in (-\pi, \pi)\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  ist bijektiv mit Umkehrabbildung  $z \mapsto \log_{\mathbb{R}} |z| + i \arg(z)$ .

(iv)  $\exp : \{w \in \mathbb{C} : \text{Im}(w) \in (-\pi, \pi)\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$  ist bijektiv.

**Beweis.** Zu (i). Es sei  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Dann gilt

$$z = |z|e^{i \arg(z)} = e^{\log_{\mathbb{R}} |z|} e^{i \arg(z)} = e^{\log_{\mathbb{R}} |z| + i \arg(z)}. \quad (175)$$

Für  $w := \log_{\mathbb{R}} |z| + i \arg(z)$  gilt also  $e^w = z$ .

Zu (ii). Falls  $e^z = e^w$  so gilt

$$1 = \frac{e^z}{e^w} = e^z e^{-w} = e^{z-w}. \quad (176)$$

Wir folgern

$$1 = |1| = |e^{z-w}| = e^{\text{Re}(z-w)}. \quad (177)$$

Wenden wir  $\log_{\mathbb{R}}$  auf beiden Seiten an, so folgern wir

$$0 = \log_{\mathbb{R}}(1) = \log_{\mathbb{R}}(e^{\operatorname{Re}(z-w)}) = \operatorname{Re}(z-w). \quad (178)$$

Somit gilt  $z-w = iy$  für ein  $y \in \mathbb{R}$ . Setzen wir dies in (176) ein so erhalten wir

$$1 = e^{iy}. \quad (179)$$

Wähle nun  $k \in \mathbb{Z}$  so, dass  $2k\pi - \pi < y \leq 2k\pi + \pi$ . Beachte, dass wegen der  $2\pi$ -Periodizität (siehe Proposition 49) gilt, dass  $e^{\pm i2k\pi} = e^{i \cdot 0} = 1$ . Es gilt ferner  $y - 2k\pi \in (-\pi, \pi]$  und auch

$$1 = e^{iy} = e^{iy} e^{-i2k\pi} = e^{i(y-2k\pi)} = \tilde{b}(y-2k\pi), \quad (180)$$

wobei  $\tilde{b}$  wie in Proposition 49 ist. Mit  $1 = \tilde{b}(0)$  folgern wir aus der vorigen Gleichung  $\tilde{b}(y-2k\pi) = \tilde{b}(0)$ . Da  $\tilde{b}$  auf  $(-\pi, \pi]$  injektiv ist (vgl wiederum Proposition 49) folgt

$$y - 2k\pi = 0. \quad \Rightarrow \quad y = 2k\pi. \quad (181)$$

und somit  $z-w = iy = i(2k\pi) \in 2\pi i\mathbb{Z}$ .

Zu (iii). Es sei  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  beliebig. In (175) haben wir bereits gesehen, dass  $z = e^w$  für  $w = \log_{\mathbb{R}}(z) + i \arg(z)$ . Beachte, dass  $\operatorname{Im}(w) = \arg(z) \in (-\pi, \pi]$ . Somit folgt die Surjektivität. Zur Injektivität. Seien  $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Im}(w_1), \operatorname{Im}(w_2) \in (-\pi, \pi]$  und  $e^{w_1} = e^{w_2}$ . Aus Punkt (ii) lernen wir, dass

$$w_2 - w_1 = 2k\pi i \quad \text{für ein } k \in \mathbb{Z}. \quad (182)$$

Insbesondere gilt für dieses  $k$

$$\operatorname{Im}(w_2) = \operatorname{Im}(w_1) + 2k\pi. \quad (183)$$

Da nun  $\operatorname{Im}(w_1) \in (-\pi, \pi]$  gilt nach (183)

$$\operatorname{Im}(w_2) \in (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi]. \quad (184)$$

Da nun aber auch  $\operatorname{Im}(w_2) \in (-\pi, \pi]$  haben wir  $(-\pi, \pi] \cap (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi] \neq \emptyset$ . Dies geht nur wenn  $k = 0$  ist. Setzen wir diese Zusatzinformation in (182) ein so folgern wir  $w_2 = w_1$ . Die Injektivität ist gezeigt. Die Formel für die Umkehrabbildung haben wir im Surjektivitätsbeweis bereits gesehen.

Zu (iv). Dies ist einsichtig mit (iii) und der Tatsache, dass  $\{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(w) = \pi\}$  von  $\exp$  auf  $\mathbb{R}_{<0}$  abgebildet wird. In der Tat: Für  $x \in \mathbb{R}$  gilt

$$e^{x+i\pi} = e^x e^{i\pi} = e^x (\cos(\pi) + i \sin(\pi)) \stackrel{(147)}{=} e^x (-1 + 0i) = -e^x, \quad (185)$$

weswegen

$$\{e^{x+i\pi} : x \in \mathbb{R}\} = \{-e^x : x \in \mathbb{R}\} = \{-r : r \in (0, \infty)\} = (-\infty, 0). \quad (186)$$

Die Behauptung folgt.



**Definition 57.** Wir definieren den (*Hauptzweig des*) *komplexen Logarithmus* durch  $\log : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$\log z := \log_{\mathbb{R}} |z| + i \arg(z). \quad (187)$$

**Proposition 58.** Es gilt für alle  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , dass

$$\exp(\log(z)) = z. \quad (188)$$

Ferner gilt für alle  $z \in \mathbb{C}$ , dass

$$\log(\exp(z)) = z - 2k\pi i \quad \text{für ein } k \in \mathbb{Z}. \quad (189)$$

Die Zahl  $k \in \mathbb{Z}$  aus der vorigen Gleichung ist eindeutig charakterisiert durch die Gleichung  $2k\pi - \pi < \text{Im}(z) \leq 2k\pi + \pi$ .

**Beweis.** Zu (188) gehen wir genauso vor wie in (175). Es gilt für  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$z = |z|e^{i \arg(z)} = e^{\log_{\mathbb{R}}(z)} e^{i \arg(z)} = e^{\log_{\mathbb{R}}(z) + i \arg(z)} = e^{\log(z)}. \quad (190)$$

Zu (189). Falls  $2k\pi - \pi < \text{Im}(z) \leq 2k\pi + \pi$  so gilt, dass  $z - 2k\pi i \in \{w \in \mathbb{C} : \text{Im}(w) \in (-\pi, \pi]\}$ . Da (nach Satz 56 (iii))  $\exp$  auf dieser Menge bijektiv ist  $\log$  die Umkehrabbildung ist, gilt

$$\log(\exp(z - 2k\pi i)) = z - 2k\pi i. \quad (191)$$

Es folgt

$$z - 2k\pi i = \log(\exp(z - 2k\pi i)) = \log(\exp(z) \underbrace{\exp(-2k\pi i)}_{=1}) = \log(\exp(z)). \quad (192)$$

Dies motiviert die Definition der *Nebenzweige*.

**Definition 59.** Für  $k \in \mathbb{Z}$  definieren wir den *k-ten Nebenzweig des komplexen Logarithmus* durch

$$\log^{[k]}(z) := \log(z) + 2k\pi i. \quad (193)$$

Man überzeugt sich leicht mit Proposition 58, dass

$$\exp(\log^{[k]}(z)) = z \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad (194)$$

und umgekehrt

$$\log^{[k]}(\exp(z)) = z \quad \forall z \in \mathbb{C} : \quad 2k\pi - \pi < \text{Im}(z) \leq 2k\pi + \pi. \quad (195)$$

Nun können wir auch Potenzen definieren.

**Definition 60.** Für  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  und  $w \in \mathbb{C}$  definieren wir

$$z^w := \exp(w \log(z)). \quad (196)$$

## 1.10 (Einheits-)Wurzeln

In diesem Abschnitt suchen wir für gegebenes  $w \in \mathbb{C}$  und  $n \in \mathbb{N}$  alle Lösungen der Gleichung

$$z^n = w. \quad (197)$$

Wir fragen uns zunächst wie viele Lösungen es geben kann. Hierfür benutzen wir die nachfolgende Erkenntnisse aus der (linearen) Algebra über Nullstellen von *nichttrivialen  $\mathbb{C}$ -Polynomen*, d.h. Polynomen der Form

$$p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k \quad \text{mit } n \in \mathbb{N}_0, a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}, a_n \neq 0 \quad (198)$$

Die höchste auftretende Potenz  $n \in \mathbb{N}_0$  heißt hierbei *Grad* des Polynoms  $p$ . Wir erinnern daran, dass wir in der Algebra zwei Polynome *gleich* nennen, wenn sie dieselben Koeffizienten haben. Außerdem wissen wir, dass Summen und Produkte von Polynomen wieder Polynome sind.

**Satz 61. POLYNOMDIVISION.** Besitzt ein nichttriviales  $\mathbb{C}$ -Polynom  $p$  vom Grade  $n \in \mathbb{N}$  eine Nullstelle  $z_0 \in \mathbb{C}$ , so gibt es ein nichttriviales  $\mathbb{C}$ -Polynom  $q$  vom Grade  $n - 1$  mit

$$p(z) = (z - z_0)q(z) \quad (199)$$

**Beweis.** Siehe (lineare) Algebra.

Eine wichtige daraus resultierende Folgerung ist

**Korollar 62.** Ein nichttriviales  $\mathbb{C}$ -Polynom  $p$  vom Grade  $n \in \mathbb{N}_0$  besitzt höchstens  $n$  Nullstellen.

**Beweis.** Induktion nach  $n \in \mathbb{N}_0$ . Für  $n = 0$  ist die Behauptung klar, weil  $p$  dann laut (198) ein konstantes Polynom  $p(z) = a_0 \neq 0$  ist. Somit kann es keine Nullstellen geben. Es gelte nun für ein  $n \in \mathbb{N}_0$ , dass jedes Polynom vom Grade  $n$  höchstens  $n$  Nullstellen hat. **ZZ** : Jedes Polynom vom Grade  $n + 1$  hat höchstens  $n + 1$  Nullstellen. Angenommen es gäbe ein Polynom  $p^*$  vom Grade  $n + 1$  mit mehr als  $n + 1$  Nullstellen. Sei  $z^*$  eine solche Nullstelle. Mit der Polynomdivision finden wir ein Polynom  $q^*$  vom Grade  $n$ , so, dass

$$p^*(z) = (z - z^*)q^*(z) \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad (200)$$

Nun hat  $q^*$  nach Induktionshypothese maximal  $n$  Nullstellen, seien diese etwa gegeben durch  $z_1, \dots, z_k$  für ein  $k \in \mathbb{N}_0, k \leq n$ . Nun folgt mit (200) (und der Körpereigenschaft von

©)

$$p^*(z) = 0 \Leftrightarrow (z - z^*) = 0 \text{ oder } q^*(z) = 0. \quad (201)$$

Wir folgern  $p^*(z) = 0$  genau dann wenn  $z = z^*$  oder  $z \in \{z_1, \dots, z_k\}$ . Dies ergibt dann aber höchstens  $k + 1 \leq n + 1$  Nullstellen. Ein Widerspruch.

Deswegen hat auch das  $\mathbb{C}$ -Polynom  $p(z) := z^n - w$  höchstens  $n$  Nullstellen. Somit kann (197) auch nur höchstens  $n$  Lösungen besitzen.

Wir beschäftigen uns nun zunächst kurz mit dem Spezialfall  $w = 1$ . Hierzu definieren wir zunächst die  $n$ -ten Einheitswurzeln

**Definition 63.** Für  $n \in \mathbb{N}$  definieren wir die  $n$ -ten Einheitswurzeln

$$\zeta_{k,n} := \exp\left(\frac{2\pi i k}{n}\right) \quad k = 0, \dots, (n-1). \quad (202)$$

Falls  $n$  aus dem Kontext ersichtlich ist so schreiben wir nur  $\zeta_k$ .

Wir halten nun zunächst ein paar Eigenschaften der Einheitswurzeln fest

**Proposition 64.** Seien  $n \in \mathbb{N}$  gegeben und  $\zeta_0, \dots, \zeta_{n-1}$  die  $n$ -ten Einheitswurzeln. Dann gilt

- (i)  $\zeta_0 = 1$  und  $\zeta_0, \dots, \zeta_{n-1}$  sind alle paarweise verschieden.
- (ii)  $\zeta_k = \zeta_1^k$  für alle  $k = 0, \dots, n-1$ .
- (iii)  $\zeta_k^n = 1$  für alle  $k = 0, \dots, n-1$ .
- (iv) Es gilt  $z^n = 1 \Leftrightarrow z \in \{\zeta_0, \dots, \zeta_{n-1}\}$ .
- (v)  $z^n - 1 = (z - \zeta_0) \cdot \dots \cdot (z - \zeta_{n-1})$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ .

**Beweis.** Zu (i).  $\zeta_0 = e^{\frac{2\pi i \cdot 0}{n}} = e^0 = 1$ . Zur paarweise Verschiedenheit: Sei  $\zeta_k = \zeta_j$  für  $k, j \in \{0, \dots, n-1\}$ . Dann ist  $e^{\frac{2k\pi i}{n}} = e^{\frac{2j\pi i}{n}}$ . Nach Satz 56 können kann  $e^z = e^w$  jedoch nur gelten, wenn  $z - w \in 2\pi i\mathbb{Z}$ . Es gilt also

$$2\pi i\mathbb{Z} \ni \frac{2k\pi i}{n} - \frac{2j\pi i}{n} = \frac{2(k-j)\pi i}{n} = 2\pi i \frac{k-j}{n}. \quad (203)$$

Wir folgern, dass  $\frac{k-j}{n} \in \mathbb{Z}$ . Da  $k, j \in \{0, \dots, n-1\}$  gilt  $-(n-1) \leq k-j \leq n-1$ . Somit haben wir  $\frac{-(n-1)}{n} \leq \frac{k-j}{n} \leq \frac{n-1}{n}$ . Da die einzige ganze Zahl in  $[\frac{-(n-1)}{n}, \frac{(n-1)}{n}]$  die Null ist, gilt  $\frac{k-j}{n} = 0$  und somit  $k = j$ .

Zu (ii).

$$\zeta_k = e^{\frac{2k\pi i}{n}} = \left(e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)^k = \zeta_1^k. \quad (204)$$

Zu (iii). Es gilt zunächst für  $k = 1$

$$\zeta_1^n = \left(e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)^n = e^{2\pi i} = e^0 = 1. \quad (205)$$

Für beliebiges  $k \in \{0, \dots, n-1\}$  erhalten wir nun mit (ii)

$$\zeta_k^n = [(\zeta_1)^k]^n = \zeta_1^{kn} = [\zeta_1^n]^k = 1^k = 1. \quad (206)$$

Zu (iv). “ $\Leftarrow$ ” folgt bereits mit (iii). Für “ $\Rightarrow$ ” muss gezeigt werden, dass es keine weiteren Lösungen als  $\zeta_0, \dots, \zeta_{n-1}$  gibt. Da das Polynom  $p(z) = z^n - 1$  jedoch nach Korollar 62 nur höchstens  $n$  Nullstellen hat folgt die Behauptung.

(Man hätte “ $\Rightarrow$ ” auch ohne Polynomdivision begründen können. In der Tat: Erfüllt eine Zahl  $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  die Gleichung  $z^n = 1$ , so gilt  $r^n e^{in\theta} = 1$ . Man folgert  $r = 1$  und  $n\theta = 2k\pi i$  für ein  $k \in \mathbb{Z}$ , d.h.  $\theta = \frac{2k\pi i}{n}$  für ein  $k \in \mathbb{Z}$ . Man überlegt sich leicht wegen der  $2\pi$ -Periodizität von  $\theta \mapsto e^{i\theta}$ , dass es genügt,  $k \in \{0, \dots, n-1\}$  zu betrachten, weil sich danach die Werte wiederholen)

Zu (v). Aus (iv) wissen wir, dass die Nullstellen von  $p(z) = z^n - 1$  gerade durch  $\zeta_0, \dots, \zeta_{n-1}$  gegeben sind. Mit der Polynomdivision (Satz 61) lassen sich die  $n$  Linearfaktoren  $(z - \zeta_i), i = 0, \dots, n-1$  sukzessive abspalten und wir erhalten nach  $n$ -maliger Anwendung von Satz 61

$$z^n - 1 = p(z) = (z - \zeta_0) \cdot \dots \cdot (z - \zeta_n)q(z), \quad (207)$$

wobei  $q$  ein Polynom vom Grade 0 ist. Da jedes Polynom vom Grade Null konstant (und nicht verschwindend) ist, gibt es ein  $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  mit  $q(z) = a$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ . Wir folgern

$$z^n - 1 = a(z - \zeta_0) \cdot \dots \cdot (z - \zeta_n). \quad (208)$$

Nun machen wir einen Koeffizientenvergleich. Der führende Koeffizient (vor  $z^n$ ) auf der linken Seite ist 1, wohingegen man durch Ausmultiplizieren der rechten Seite sieht, dass

$$a(z - \zeta_0) \cdot \dots \cdot (z - \zeta_n) = az^n + \dots \quad (209)$$

Wir folgern, dass  $a = 1$ . Die Behauptung ist gezeigt.

**Beispiel 65.** Es gilt

$$\prod_{k=0}^{n-1} \zeta_k = (-1)^{n-1} \quad (210)$$

Dies kann man auf zwei Arten einsehen.

LÖSUNGSWEG 1. Direktes Nachrechnen

$$\prod_{k=0}^{n-1} \zeta_k \stackrel{\text{Gauß'sche Summenformel}}{=} \prod_{k=1}^{n-1} \zeta_k = \prod_{k=1}^{n-1} e^{\frac{2k\pi i}{n}} = \exp\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{2k\pi i}{n}\right) = \exp\left(\frac{2\pi i}{n} \sum_{k=1}^{n-1} k\right) \quad (211)$$

$$\stackrel{\text{Gauß'sche Summenformel}}{=} \exp\left(\frac{2\pi i}{n} \frac{(n-1)n}{2}\right) = e^{i\pi(n-1)} = (e^{i\pi})^{n-1} = (-1)^{n-1}. \quad (212)$$

LÖSUNGSWEG 2. Es gilt  $z^n - 1 = (z - \zeta_0) \cdot \dots \cdot (z - \zeta_{n-1})$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ . Setzen wir  $z = 0$  ein so gilt

$$-1 = 0^n - 1 = (0 - \zeta_0) \cdot \dots \cdot (0 - \zeta_{n-1}) = (-1)^n \zeta_0 \cdot \dots \cdot \zeta_{n-1}. \quad (213)$$

Die Behauptung folgt durch Multiplikation beider Seiten mit  $(-1)^{n-2}$ .

Nun können wir die komplexe  $n$ -te Wurzel auch für  $w \neq 1$  einführen.

**Proposition 66.** Es sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , etwa  $w = re^{i\theta}$  für  $r = |w| \in (0, \infty)$  und  $\theta = \arg(w) \in (-\pi, \pi]$ . Konsistent mit Definition 60 setzen wir

$$\sqrt[n]{w} := w^{1/n} = e^{\frac{1}{n} \log(w)}. \quad (214)$$

Dann gilt

- (i)  $\sqrt[n]{w} = r^{1/n} e^{i\frac{\theta}{n}} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,
- (ii)  $(\sqrt[n]{w})^n = w$ ,
- (iii)  $z^n = w \Leftrightarrow z \in \{\sqrt[n]{w}\zeta_0, \dots, \sqrt[n]{w}\zeta_{n-1}\}$  (mit  $\zeta_0, \dots, \zeta_{n-1}$  die  $n$ -ten Einheitswurzeln).

**Beweis.** Sei  $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  wie in der Aussage und  $r = |w|$  sowie  $\theta = \arg(w)$ . Zuerst zeigen wir (i), d.h., dass  $\sqrt[n]{w} = r^{1/n} e^{i\frac{\theta}{n}}$ . Dazu berechnen wir  $\log(w) = \log_{\mathbb{R}} |w| + i \arg(w) = \log(r) + i\theta$ . Somit gilt

$$\sqrt[n]{w} = e^{\frac{1}{n} \log(w)} = e^{\frac{\log(r) + i\theta}{n}} = e^{\frac{\log(r)}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}} = r^{1/n} e^{i\frac{\theta}{n}}. \quad (215)$$

Nun zu (iii). Für “ $\Leftarrow$ ” berechnen wir, dass für alle  $k \in \{0, \dots, n-1\}$

$$(\sqrt[n]{w}\zeta_k)^n = (\sqrt[n]{w})^n \zeta_k^n \stackrel{\text{Prop. 64 (iii)}}{=} (\sqrt[n]{w})^n \cdot 1 = (e^{\frac{1}{n} \log(w)})^n = e^{\log(w)} \stackrel{(188)}{=} w. \quad (216)$$

Wir entnehmen insbesondere aus dem Spezialfall  $k = 0$ , dass  $(\sqrt[n]{w})^n = (\sqrt[n]{w}\zeta_0)^n = w$ , woraus (ii) bereits folgt. Einen Beweis von (ii) müssen wir also nicht mehr liefern. Für “ $\Rightarrow$ ” könnten wir wiederum damit argumentieren, dass das Polynom  $p(z) = z^n - w$  höchstens  $n$  Nullstellen hat. Alternativ könnten wir aber auch wie folgt vorgehen. Sei  $z \in \mathbb{C}$  so, dass  $z^n = w$ . Dann gilt

$$\left(\frac{z}{\sqrt[n]{w}}\right)^n = \frac{z^n}{(\sqrt[n]{w})^n} = \frac{z^n}{w} = 1. \quad (217)$$

Somit muss nach Proposition 64  $\frac{z}{\sqrt[n]{w}}$  eine  $n$ -te Einheitswurzel sein, d.h.  $\frac{z}{\sqrt[n]{w}} \in \{\zeta_0, \dots, \zeta_{n-1}\}$ . Die Behauptung folgt durch Multiplizieren mit  $\sqrt[n]{w}$ .

**Definition 67.** Wir nennen für  $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  und  $n \in \mathbb{N}$  die komplexe Zahl  $\sqrt[n]{w}$  *Hauptzweig* der  $n$ -ten Wurzel und für  $k = 1, \dots, n-1$  heißt  $\sqrt[n]{w}\zeta_k$  der  $k$ -te *Nebenzweig* der  $n$ -ten Wurzel.

**Bemerkung 68.** Man stellt zwischen den Nebenzweigen der  $n$ -ten Wurzel und den Nebenzweigen des Logarithmus folgenden Zusammenhang fest: Es gilt für alle  $k = 0, \dots, n-1$  und alle  $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$\sqrt[n]{w}\zeta_k = e^{\frac{1}{n} \log^{[k]}(w)}. \quad (218)$$

**Beispiel 69.** Wir bestimmen alle Zahlen  $z \in \mathbb{C}$  mit  $z^4 = 1 + i$ . In Beispiel 55 haben wir bereits gesehen, dass  $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ . Nach Proposition 66 gilt dann

$$\sqrt[4]{1+i} = (\sqrt{2})^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{\pi}{16}} = 2^{1/8} e^{i\frac{\pi}{16}}. \quad (219)$$

Ferner erhalten wir alle weiteren Lösungen durch Multiplikation mit den 4-ten Einheitswurzeln. Diese sind  $\zeta_0 = 1$ ,

$$\zeta_1 = e^{\frac{2\pi i}{4}} = e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = i \quad (220)$$

sowie

$$\zeta_2 = \zeta_1^2 = i^2 = -1, \quad \zeta_3 = \zeta_1^3 = i^3 = -i. \quad (221)$$

Die Lösungen von  $z^4 = 1 + i$  sind also gegeben durch

$$z_0 = 2^{1/8} e^{i\frac{\pi}{16}}, \quad z_1 = iz_0, \quad z_2 = -z_0, \quad z_3 = -iz_0. \quad (222)$$

## 1.11 Die Riemann'sche Zahlenkugel

In Folgenden definieren wir die *Riemann'sche Zahlenkugel* – ein gutes Modell um die komplexen Zahlen zu erweitern und für uns auch der erste Kontakt mit einer *Riemann'schen Fläche*.

**Definition 70.** Die *Riemann'sche Zahlenkugel* (oder auch *Riemann-Sphäre*) ist eine zweidimensionale Sphäre in  $\mathbb{R}^3$ , gegeben durch

$$\mathbb{S}_{Rm}^2 := \{(\eta_1, \eta_2, \eta_3) \in \mathbb{R}^3 : \eta_1^2 + \eta_2^2 + (\eta_3 - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}\}. \quad (223)$$

Der Punkt  $N = (0, 0, 1) \in \mathbb{S}_{Rm}^2$  heißt *Nordpol* von  $\mathbb{S}_{Rm}^2$  und  $S = (0, 0, 0) \in \mathbb{S}_{Rm}^2$  heißt *Südpol*.

Wie erweitert die Riemann'sche Zahlenkugel unsere Sicht auf die komplexe Zahlenebene?

**Gedankenexperiment 71.** Für  $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) \in \mathbb{S}_{Rm}^2 \setminus \{N\}$  definieren wir die Gerade

$$L := \overline{N\eta} := \{\eta + t(N - \eta) : t \in \mathbb{R}\} \quad (224)$$

durch den Nordpol  $N$  und  $\eta$ . Wir untersuchen nun wo  $L$  sich mit der Ebene  $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$  schneidet. Dazu beobachte

$$\eta + t(N - \eta) = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) + t((0, 0, 1) - (\eta_1, \eta_2, \eta_3)) = ((1 - t)\eta_1, (1 - t)\eta_2, \eta_3 + t(1 - \eta_3)). \quad (225)$$

Damit  $\eta + t^*(N - \eta)$  in  $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$  ist muss also gelten  $\eta_3 + t^*(1 - \eta_3) = 0$ . Da  $\eta_3 \neq 1$  (weil  $\eta \neq N$ ) können wir nach  $t^*$  auflösen und erhalten

$$t^* = \frac{-\eta_3}{1 - \eta_3}. \quad (226)$$

Insbesondere gilt

$$1 - t^* = 1 + \frac{\eta_3}{1 - \eta_3} = \frac{1 - \eta_3}{1 - \eta_3} + \frac{\eta_3}{1 - \eta_3} = \frac{1}{1 - \eta_3}. \quad (227)$$

Somit haben wir herausgefunden, dass der einzige Schnittpunkt von  $L$  und  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  gegeben ist durch

$$\eta + t^*(N - \eta) \stackrel{(225)}{=} ((1 - t^*)\eta_1, (1 - t^*)\eta_2, 0) = \left(\frac{\eta_1}{1 - \eta_3}, \frac{\eta_2}{1 - \eta_3}, 0\right). \quad (228)$$

Identifiziert man nun  $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$  mit  $\mathbb{C}$  durch  $(x, y, 0) \equiv x + iy$ , so wird die rechte Seite von (228) mit

$$\psi(\eta_1, \eta_2, \eta_3) := \frac{\eta_1 + i\eta_2}{1 - \eta_3} \quad (229)$$

identifiziert. Diese Formel charakterisiert also den eindeutigen Schnittpunkt zwischen der Gerade  $L = \overline{N\eta}$  und der Ebene.

Wir werden später zeigen (eventuell ist es geometrisch schon anschaulich) dass  $\mathbb{S}_{Rm}^2 \setminus \{N\}$  durch  $\psi(\eta_1, \eta_2, \eta_3) := \frac{\eta_1 + i\eta_2}{1 - \eta_3}$  bijektiv auf  $\mathbb{C}$  abgebildet wird. Somit kann  $\mathbb{C}$  mit  $\mathbb{S}_{Rm}^2 \setminus \{N\}$  identifiziert werden. Jetzt sehen wir auch wie  $\mathbb{C}$  erweitert werden kann:  $\mathbb{S}_{Rm}^2 \setminus \{N\}$  kann leicht durch  $N$  ergänzt werden und wir erhalten die gesamte Riemann-Sphäre. Dadurch wird  $\mathbb{C}$  um einen Punkt erweitert. Wir fassen diesen Punkt oft als *Punkt im Unendlichen* auf und schreiben  $\mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . Aus Abbildung 2 wird eventuell klar warum wir diesen Punkt als Punkt im Unendlichen sehen: Punkte in  $\mathbb{S}_{Rm}^2$  die "nah" am Nordpol  $N$  sind, werden durch  $\psi$  auf komplexe Zahlen mit sehr großer Norm abgebildet!

**Definition 72. STEREOGRAPHISCHE PROJEKTION** Wir definieren die *stereographische*

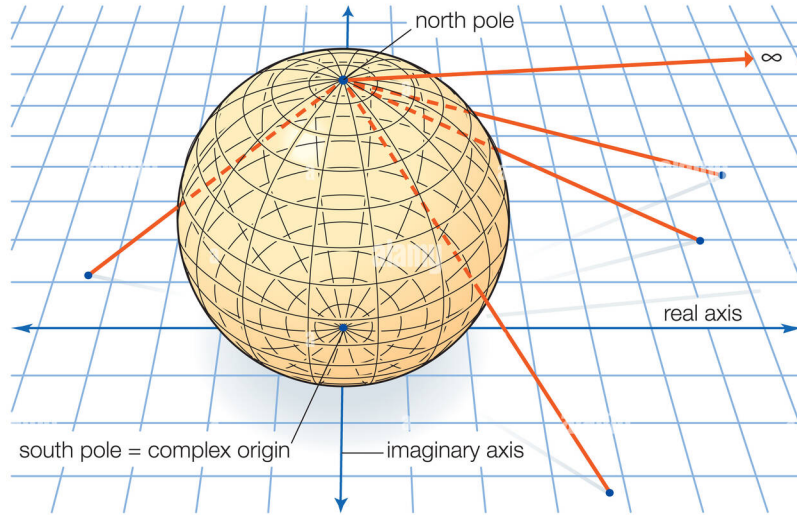


Abbildung 2: Die Riemann-Sphäre und die stereographische Projektion

Projektion  $\psi : \mathbb{S}_{Rm}^2 \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  durch

$$\psi(\eta_1, \eta_2, \eta_3) := \begin{cases} \frac{\eta_1 + i\eta_2}{1 - \eta_3} & \eta_3 \neq 1 \\ \infty & \eta_3 = 1 \end{cases} \quad (230)$$

Die stereographische Projektion erlaubt uns eine neue sichtweise auf die komplexen Zahlen – jedenfalls sofern wir gezeigt haben, dass die bijektiv ist

**Proposition 73.** Die stereographische Projektion  $\psi : \mathbb{S}_{Rm}^2 \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  ist bijektiv. Ihre Umkehrabbildung ist gegeben durch  $\psi^{-1} : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{S}_{Rm}^2$  mit

$$\psi^{-1}(z) := \begin{cases} \left( \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|^2+1}, \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2}{|z|^2+1} \right) & z \in \mathbb{C} \\ N & z = \infty \end{cases} \quad (231)$$

**Beweis.** Der schnellste Weg, die obige Proposition zu beweisen wäre, durch direktes Nachrechnen zu zeigen, dass die Abbildung in (231) die Umkehrabbildung ist. Wir wollen dies an der Stelle aber etwas konstruktiver machen.

**Zur Surjektivität.** Es sei  $z \in \mathbb{C}_\infty$ . Falls  $z = \infty$  so gilt  $z = \psi(N)$  und somit brauchen wir diesen Fall nicht mehr zu betrachten. Sei also  $z \in \mathbb{C}$ . Wir suchen nun ein  $\eta \in \mathbb{S}_{Rm}^2 \setminus \{N\}$  mit  $\psi(\eta) = z$ . Für ein solches  $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$  muss gelten

$$\frac{\eta_1 + i\eta_2}{1 - \eta_3} = z. \quad (232)$$

Wir folgern

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{\eta_1}{1 - \eta_3}, \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{\eta_2}{1 - \eta_3} \quad (233)$$



und

$$|z|^2 = \frac{|\eta_1 + i\eta_2|^2}{(1 - \eta_3)^2} = \frac{\eta_1^2 + \eta_2^2}{(1 - \eta_3)^2}. \quad (234)$$

Mit der Gleichung der Riemann'schen Zahlenkugel (223) gilt  $\eta_1^2 + \eta_2^2 = \frac{1}{4} - (\eta_3 - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} - (\eta_3^2 - \eta_3 - \frac{1}{4}) = \eta_3 - \eta_3^2$ . Dies in (234) eingesetzt ergibt

$$|z|^2 = \frac{\eta_3 - \eta_3^2}{(1 - \eta_3)^2} = \frac{\eta_3(1 - \eta_3)}{(1 - \eta_3)^2} = \frac{\eta_3}{1 - \eta_3}. \quad (235)$$

Wir lösen diese Gleichung nach  $\eta_3$  auf:

$$|z|^2 = \frac{\eta_3}{1 - \eta_3} \Leftrightarrow (1 - \eta_3)|z|^2 = \eta_3 \Leftrightarrow |z|^2 = \eta_3(1 + |z|^2). \quad (236)$$

Somit folgt

$$\eta_3 = \frac{|z|^2}{1 + |z|^2}. \quad (237)$$

Insbesondere gilt auch

$$1 - \eta_3 = 1 - \frac{|z|^2}{1 + |z|^2} = \frac{1}{1 + |z|^2}. \quad (238)$$

Diese Information in (233) eingesetzt liefert

$$\eta_1 = (1 - \eta_3)\operatorname{Re}(z) = \frac{\operatorname{Re}(z)}{1 + |z|^2} \quad (239)$$

sowie

$$\eta_2 = (1 - \eta_3)\operatorname{Im}(z) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{1 + |z|^2}. \quad (240)$$

Es folgt, dass

$$\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) = \left( \frac{\operatorname{Re}(z)}{1 + |z|^2}, \frac{\operatorname{Im}(z)}{1 + |z|^2}, \frac{|z|^2}{1 + |z|^2} \right). \quad (241)$$

das Gewünschte leistet.

**Zur Injektivität.** Diese ist den Lesenden als Übungsaufgabe überlassen. Dadurch, dass wir die Umkehrabbildung bereits mit (241) konstruiert haben, sollte das Nachrechnen kein Problem sein.

Anstatt der komplexen Zahlenebene  $\mathbb{C}$  haben wir nun eine neue Anschauung der komplexen Zahlen als  $\mathbb{S}_{Rm}^2 \setminus \{N\}$ . Warum benötigen wir überhaupt eine neue Anschauung? Reicht uns die Betrachtung als Zahlenebene nicht? Eventuell überzeugt Sie das nachfolgende Beispiel: Viele Abbildungen  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  (oder auch  $f : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ ) sind auf der Riemann'schen Zahlenkugel viel leichter zu verstehen. Das bedeutet konkret: Die Abbildung  $\tilde{f} := \psi^{-1} \circ f \circ \psi : \mathbb{S}_{Rm}^2 \rightarrow \mathbb{S}_{Rm}^2$  hat eventuell eine viel einfachere Gestalt!

**Beispiel 74.** Wir betrachten  $f : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  gegeben durch

$$f(z) := \begin{cases} \frac{1}{z} & z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ \infty & z = 0 \\ 0 & z = \infty \end{cases} \quad (242)$$

und definieren  $\tilde{f} := \psi^{-1} \circ f \circ \psi : \mathbb{S}_{Rm}^2 \rightarrow \mathbb{S}_{Rm}^2$ .

**Behauptung.**

$$\tilde{f}(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = (\eta_1, -\eta_2, 1 - \eta_3) \quad \forall \eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) \in \mathbb{S}_{Rm}^2. \quad (243)$$

Bevor wir diese Behauptung zeigen, überlegen wir zunächst, was das bedeutet. Wir definieren die *Spielgelungen*  $\sigma_i : \mathbb{S}_{Rm}^2 \rightarrow \mathbb{S}_{Rm}^2$ ,  $i = 1, 2, 3$  durch

$$\sigma_1(\eta_1, \eta_2, \eta_3) := (-\eta_1, \eta_2, \eta_3), \quad (244)$$

$$\sigma_2(\eta_1, \eta_2, \eta_3) := (\eta_1, -\eta_2, \eta_3), \quad (245)$$

und

$$\sigma_3(\eta_1, \eta_2, \eta_3) := (\eta_1, \eta_2, 1 - \eta_3). \quad (246)$$

Man überzeugt sich leicht davon, dass  $\sigma_i : \mathbb{S}_{Rm}^2 \rightarrow \mathbb{S}_{Rm}^2$  wohldefiniert sind und, dass  $\sigma_1$  die Spiegelung an der  $\eta_2\eta_3$ -Achse ist,  $\sigma_2$  die Spiegelung an der  $\eta_1\eta_3$ -Achse und  $\sigma_3$  die Spiegelung an der  $\eta_1\eta_2$ -Achse. Man sieht nun leicht, dass  $f = \sigma_2 \circ \sigma_3$ . Das komplexe Dividieren ist also auf der Riemann-Sphäre nichts anderes als ein Paar Spiegelungen. Dadurch bekommt das komplexe Dividieren eine völlig neue, elementargeometrische Interpretation.

**Beweis der Behauptung.** Wir berechnen nun zunächst für  $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) \in \mathbb{S}_{Rm}^2 \setminus \{N\}$

$$(f \circ \psi)(\eta) = f\left(\frac{\eta_1 + i\eta_2}{1 - \eta_3}\right) = \begin{cases} \frac{1 - \eta_3}{\eta_1 + i\eta_2} & \eta_1 + i\eta_2 \neq 0 \\ \infty & \eta_1 + i\eta_2 = 0 \end{cases} \quad (247)$$

Wir zeigen betrachten ab hier nur den ersten Fall  $\eta_1 + i\eta_2 \neq 0$  und überlassen den anderen Fall den Lesenden als Übungsaufgabe. Es gilt falls  $\eta_1 + i\eta_2 \neq 0$

$$(f \circ \psi)(\eta) = \frac{1 - \eta_3}{\eta_1 + i\eta_2} = \frac{(1 - \eta_3)(\eta_1 - i\eta_2)}{|\eta_1 + i\eta_2|^2} = \frac{(1 - \eta_3)}{\eta_1^2 + \eta_2^2}(\eta_1 - i\eta_2). \quad (248)$$

Wiederum mit der Gleichung der Riemann-Sphäre (223) erhalten wir

$$\eta_1^2 + \eta_2^2 = \frac{1}{4} - \left(\eta_3 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - \left(\eta_3^2 - \eta_3 - \frac{1}{4}\right) = \eta_3 - \eta_3^2 = \eta_3(1 - \eta_3). \quad (249)$$

Dies in (248) eingesetzt liefert uns

$$(f \circ \psi)(\eta) = \frac{1 - \eta_3}{\eta_3(1 - \eta_3)}(\eta_1 - i\eta_2) = \frac{\eta_1 - i\eta_2}{\eta_3} \quad (250)$$

Um nun  $\tilde{f} = \psi^{-1} \circ f \circ \psi$  zu berechnen, könnte man nun die Formel in (231) berechnen. Um uns etwas Schreibarbeit zu sparen werden wir einen Trick anwenden. Wir beobachten zunächst

$$(f \circ \psi)(\eta) = \frac{\eta_1 - i\eta_2}{\eta_3} = \frac{\eta_1 + i(-\eta_2)}{1 - (1 - \eta_3)}. \quad (251)$$

Nun ist (wie man als leichte Übungsaufgabe zeigt)  $(\eta_1, -\eta_2, 1 - \eta_3) \in \mathbb{S}_{Rm}^2$  und es gilt

$$\psi(\eta_1, -\eta_2, 1 - \eta_3) = \frac{\eta_1 + i(-\eta_2)}{1 - (1 - \eta_3)} \stackrel{(251)}{=} (f \circ \psi)(\eta). \quad (252)$$

Verketten wir diese Gleichung mit  $\psi^{-1}$  so folgt die Behauptung.

## 1.12 Der chordale Abstand

Nun haben wir durch die stereographische Projektion die Mengen  $\mathbb{C}_\infty$  und  $\mathbb{S}_{Rm}^2$  miteinander identifizieren können. Die Zahlenebene  $\mathbb{C}$  war für uns aber immer viel mehr als nur eine Menge: Es war zB ein *Körper*, ein *Vektorraum* und ein *vollständiger metrischer Raum*! Dass wir die Körperstruktur und Vektorraumstruktur verlieren, wenn wir uns einfach einen Punkt  $\infty$  *dazuerrfinden*, ist eventuell einsichtig. Wir sind nun noch daran interessiert, ob wir  $\mathbb{C}_\infty$  immerhin noch die Struktur eines metrischen Raumes geben können. Dazu überlegen wir uns zunächst, dass wir auf  $\mathbb{S}_{Rm}^2$  bereits eine Metrik haben: Als Teilmenge von  $\mathbb{R}^3$  können wir es stets mit dem *Euklidischen Abstand* ausstatten, d.h.

$$d_{euc}((\eta_1, \eta_2, \eta_3), (\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2, \tilde{\eta}_3)) := \sqrt{(\eta_1 - \tilde{\eta}_1)^2 + (\eta_2 - \tilde{\eta}_2)^2 + (\eta_3 - \tilde{\eta}_3)^2}. \quad (253)$$

**Definition 75.** CHORDALER ABSTAND. Für  $z, w \in \mathbb{C}_\infty$  definieren wir den *chordalen Abstand*

$$\chi(z, w) := d_{euc}(\psi^{-1}(z), \psi^{-1}(w)). \quad (254)$$

**Proposition 76.** Der Raum  $(\mathbb{C}_\infty, \chi)$  ist ein metrischer Raum

**Beweis.** Wir müssen nachrechnen, dass  $\chi$  die Axiome einer Metrik erfüllt. Seien hierzu  $z, w \in \mathbb{C}$  beliebig.

ZUR DEFINITHEIT. Dass  $\chi(z, w) \geq 0$  folgt sofort aus der Tatsache, dass  $d_{euc} \geq 0$ . Außerdem gilt wegen der Definitheit von  $d_{euc}$  und der Bijektivität von  $\psi^{-1}$

$$\chi(z, w) = 0 \Leftrightarrow d_{euc}(\psi^{-1}(z), \psi^{-1}(w)) = 0 \Leftrightarrow \psi^{-1}(z) = \psi^{-1}(w) \Leftrightarrow z = w. \quad (255)$$

ZUR SYMMETRIE. Diese erbt sich von der Symmetrie von  $d_{euc}$ . Es gilt

$$\chi(w, z) = d_{euc}(\psi^{-1}(w), \psi^{-1}(z)) = d_{euc}(\psi^{-1}(z), \psi^{-1}(w)) = \chi(z, w). \quad (256)$$

ZUR DREIECKSUNGLEICHUNG. Diese überlassen wir den Lesenden als Übungsaufgabe. (Sie erbt sich auch von der Dreiecksungleichung für  $d_{euc}$ ).

Der chordale Abstand auf  $\mathbb{C}_\infty$  ist nicht dasselbe wie unsere bereits bekannte Metrik  $d := d_{|\cdot|}$  auf  $\mathbb{C}$ . Insbesondere eine Eigenschaft ist anders:

**Proposition 77.** Der metrische Raum  $(\mathbb{C}_\infty, \chi)$  ist *kompakt*, d.h. jede Folge in  $(\mathbb{C}_\infty, \chi)$  besitzt eine bezüglich  $\chi$  konvergente Teilfolge.

**Beweis.** Folgt direkt aus der Kompaktheit von  $(\mathbb{S}_{Rm}^2, d_{euc})$  (welche wiederum daraus folgt, dass  $\mathbb{S}_{Rm}^2$  eine kompakte Teilmenge von  $\mathbb{R}^3$  ist).

Beachte, dass  $(\mathbb{C}, d)$  nicht kompakt ist. Zum Beispiel besitzt die Folge  $(n^2)_{n \in \mathbb{N}}$  keine konvergente Teilfolge. Wir werden später sehen, dass diese Folge in  $(\mathbb{C}_\infty, \chi)$  gegen  $\infty$  konvergiert.

Obwohl die Metriken  $d$  und  $\chi$  nicht dieselben sind, sind sie auf beschränkten Teilmengen von  $\mathbb{C}$  miteinander *vergleichbar*, wie wir an den expliziten Formeln (281) sehen können.

Somit haben  $(\mathbb{C}_\infty, \chi)$  und  $(\mathbb{C}, d)$  “weit weg von  $\infty$ ” ähnliche Eigenschaften. Und doch stellt die Hinzunahme des Punktes  $\infty$  eine zusätzliche Eigenschaft her: Die *Kompaktheit*.

Man nennt  $\mathbb{C}_\infty$  daher auch *Ein-Punkt-Kompaktifizierung* von  $\mathbb{C}$ . Mit ein wenig mehr Topologie könnten wir den Begriff auch noch abstrakter fassen. Wir sparen das an dieser Stelle aus.

**Proposition 78.**

(i) Für  $z, w \in \mathbb{C}$  gilt

$$\chi(z, w) = \frac{|z - w|}{\sqrt{1 + |z|^2} \sqrt{1 + |w|^2}} = \frac{d(z, w)}{\sqrt{1 + |z|^2} \sqrt{1 + |w|^2}}. \quad (257)$$

(ii) Für  $z \in \mathbb{C}$  gilt

$$\chi(z, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1 + |z|^2}}. \quad (258)$$

**Beweis.** Zu (i). Wir verwenden die Formel (231). Es gilt für alle  $z \in \mathbb{C}$

$$\psi^{-1}(z) = \left( \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|^2+1}, \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2}{|z|^2+1} \right) \in \mathbb{S}_{Rm}^2 \quad (259)$$

Wir definieren nun  $\eta_1(z) := \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|^2+1}$ ,  $\eta_2(z) := \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|^2+1}$  und  $\eta_3(z) := \frac{|z|^2}{|z|^2+1}$  und lernen aus (259) und (223), dass

$$\eta_1(z)^2 + \eta_2(z)^2 + \left(\eta_3(z) - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}. \quad (260)$$

Nun gilt

$$\chi(z, w)^2 = d_{euc}((\eta_1(z), \eta_2(z), \eta_3(z)), (\eta_1(w), \eta_2(w), \eta_3(w)))^2 \quad (261)$$

$$= (\eta_1(z) - \eta_1(w))^2 + (\eta_2(z) - \eta_2(w))^2 + (\eta_3(z) - \eta_3(w))^2 \quad (262)$$

$$= (\eta_1(z) - \eta_1(w))^2 + (\eta_2(z) - \eta_2(w))^2 + ((\eta_3(z) - \frac{1}{2}) - (\eta_3(w) - \frac{1}{2}))^2 \quad (263)$$

$$= \underbrace{\eta_1(z)^2 + \eta_2(z)^2 + (\eta_3(z) - \frac{1}{2})^2}_{=1/4 \text{ wegen (260)}} + \underbrace{\eta_1(w)^2 + \eta_2(w)^2 + (\eta_3(w) - \frac{1}{2})^2}_{=1/4 \text{ wegen (260)}} \quad (264)$$

$$- 2\eta_1(z)\eta_1(w) - 2\eta_2(z)\eta_2(w) - 2(\eta_3(z) - \frac{1}{2})(\eta_3(w) - \frac{1}{2}) \quad (265)$$

$$= \frac{1}{2} - 2(\eta_1(z)\eta_1(w) + \eta_2(z)\eta_2(w)) - 2(\eta_3(z) - \frac{1}{2})(\eta_3(w) - \frac{1}{2}). \quad (266)$$

Nun gilt mit der Definition von  $\eta_1, \eta_2$

$$\eta_1(z)\eta_1(w) + \eta_2(z)\eta_2(w) = \frac{\operatorname{Re}(z)\operatorname{Re}(w)}{(|z|^2 + 1)(|w|^2 + 1)} + \frac{\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)}{(|z|^2 + 1)(|w|^2 + 1)}. \quad (267)$$

$$= \frac{\operatorname{Re}(z)\operatorname{Re}(w) + \operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)}{(|z|^2 + 1)(|w|^2 + 1)}. \quad (268)$$

Mit (52) lernen wir

$$\eta_1(z)\eta_1(w) + \eta_2(z)\eta_2(w) = \frac{\langle z, w \rangle}{(1 + |z|^2)(1 + |w|^2)}. \quad (269)$$

Nun beachte, dass  $\eta_3(z) - \frac{1}{2} = \frac{|z|^2}{|z|^2 + 1} - \frac{1}{2} = \frac{2|z|^2 - (|z|^2 + 1)}{2(|z|^2 + 1)} = \frac{|z|^2 - 1}{2(|z|^2 + 1)}$ . Wir folgern

$$(\eta_3(z) - \frac{1}{2})(\eta_3(w) - \frac{1}{2}) = \frac{(|z|^2 - 1)(|w|^2 - 1)}{4(|z|^2 + 1)(|w|^2 + 1)} = \frac{1 - |z|^2 - |w|^2 + |z|^2|w|^2}{4(|z|^2 + 1)(|w|^2 + 1)} \quad (270)$$

$$= \frac{1 + |z|^2 + |w|^2 + |z|^2|w|^2 - 2(|z|^2 + |w|^2)}{4(|z|^2 + 1)(|w|^2 + 1)} = \frac{(1 + |z|^2)(1 + |w|^2) - 2(|z|^2 + |w|^2)}{4(1 + |z|^2)(1 + |w|^2)} \quad (271)$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \frac{|z|^2 + |w|^2}{(1 + |z|^2)(1 + |w|^2)}. \quad (272)$$

Eingesetzt in (266) erhalten wir

$$\chi(z, w)^2 = \frac{1}{2} - \frac{2\langle z, w \rangle}{(1 + |z|^2)(1 + |w|^2)} - 2 \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \frac{|z|^2 + |w|^2}{(1 + |z|^2)(1 + |w|^2)} \right) \quad (273)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{2\langle z, w \rangle}{(1 + |z|^2)(1 + |w|^2)} - \frac{1}{2} + \frac{|z|^2 + |w|^2}{(1 + |z|^2)(1 + |w|^2)} \quad (274)$$

$$= \frac{|z|^2 - 2\langle z, w \rangle + |w|^2}{(1 + |z|^2)(1 + |w|^2)} = \frac{|z - w|^2}{(1 + |z|^2)(1 + |w|^2)}. \quad (275)$$

Hierbei haben wir im letzten Schritt verwendet, dass

$$|z - w|^2 = \langle z - w, z - w \rangle = \langle z, z \rangle - 2\langle z, w \rangle + \langle w, w \rangle = |z|^2 - 2\langle z, w \rangle + |w|^2. \quad (276)$$

Ziehen wir die Wurzel, so folgt die Behauptung aus (275).

Zu (ii). Wir berechnen mit  $\psi^{-1}(\infty) = N = (0, 0, 1)$

$$\chi(z, \infty)^2 = d_{\text{euc}}(\psi^{-1}(z), \psi^{-1}(\infty))^2 = d_{\text{euc}}\left(\left(\frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|^2+1}, \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2}{|z|^2+1}\right), (0, 0, 1)\right)^2 \quad (277)$$

$$= \frac{\operatorname{Re}(z)^2}{(|z|^2+1)^2} + \frac{\operatorname{Im}(z)^2}{(|z|^2+1)^2} + \left(\frac{|z|^2}{|z|^2+1} - 1\right)^2 \quad (278)$$

$$= \frac{\operatorname{Re}(z)^2}{(|z|^2+1)^2} + \frac{\operatorname{Im}(z)^2}{(|z|^2+1)^2} + \left(\frac{-1}{|z|^2+1}\right)^2 \quad (279)$$

$$= \frac{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2 + 1}{(|z|^2+1)^2} = \frac{|z|^2+1}{(|z|^2+1)^2} = \frac{1}{1+|z|^2}. \quad (280)$$

Die Behauptung folgt wiederum durch Wurzelziehen.

Nun können wir  $\chi : \mathbb{C}_\infty \times \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  als Abbildungsvorschrift hinschreiben.

**Korollar 79.** Es gilt für  $z, w \in \mathbb{C}$

$$\chi(z, w) = \begin{cases} \frac{|z-w|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|w|^2}} & z, w \in \mathbb{C} \\ \frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}} & z \in \mathbb{C}, w = \infty \\ \frac{1}{\sqrt{1+|w|^2}} & w \in \mathbb{C}, z = \infty \\ 0 & z = w = \infty. \end{cases} \quad (281)$$

**Beweis.** Folgt sofort aus der vorigen Proposition.

Mit dieser Formel können wir Konvergenz und Topologie von  $\mathbb{C}_\infty$  besser verstehen.

**Beispiel 80.**

BEHAUPTUNG. Die Folge  $(n^2)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert in  $(\mathbb{C}_\infty, \chi)$  gegen  $\infty$ .

BEWEIS DER BEHAUPTUNG.

$$\chi(n^2, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1+n^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+n^4}} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \quad (282)$$

Wir klären nun abschließend den Zusammenhang zwischen der Konvergenz  $(\mathbb{C}, d_{|\cdot|})$  und in  $(\mathbb{C}_\infty, \chi)$

**Proposition 81.** Es sei  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$  eine Folge

- (i) Konvergiert  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $(\mathbb{C}, d)$  gegen ein  $z \in \mathbb{C}$ , so konvergiert  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auch in  $(\mathbb{C}_\infty, \chi)$  gegen  $z$ .
- (ii) Konvergiert  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $(\mathbb{C}_\infty, \chi)$  gegen ein  $z \in \mathbb{C}_\infty$ , so tritt einer der zwei folgenden Fälle ein.
  - FALL 1.  $(|z_n|)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  ist beschränkt (in  $\mathbb{R}$ ). Dann ist  $z \in \mathbb{C}$  und es konvergiert  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $(\mathbb{C}, d)$  gegen  $z$ .
  - FALL 2.  $(|z_n|)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  ist unbeschränkt. Dann ist  $z = \infty$  und es gilt  $|z_n| \rightarrow \infty$  (in  $\mathbb{R}$ ).

**Beweis.** Zu (i). Es konvergiere  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$  in  $(\mathbb{C}, d)$  gegen  $z$ , d.h.  $|z_n - z| \rightarrow 0$ ,  $(n \rightarrow \infty)$ . Dann gilt

$$\chi(z_n, z) = \frac{|z_n - z|}{\sqrt{(1 + |z_n|^2)(1 + |z|^2)}} \leq \frac{|z_n - z|}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{1}} = |z_n - z| = d(z_n, z) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \quad (283)$$

Zu (ii). Es konvergiere  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$  in  $(\mathbb{C}_\infty, \chi)$  gegen  $z \in \mathbb{C}_\infty$ , d.h.  $\chi(z_n, z) \rightarrow 0$ ,  $(n \rightarrow \infty)$ . ZU FALL 1. Falls  $(|z_n|)_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt ist, so gibt es ein  $L > 0$  so, dass  $|z_n| \leq L$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Insbesondere gilt

$$d(z_n, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1 + |z_n|^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{1 + L^2}} \not\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \quad (284)$$

Das bedeutet  $z \neq \infty$ , d.h.  $z \in \mathbb{C}$ . Deswegen können wir den ersten Fall in (281) verwenden und folgern

$$|z_n - z| = \chi(z_n, z) \sqrt{1 + |z|^2} \sqrt{1 + |z_n|^2} \quad (285)$$

$$\leq \chi(z_n, z) \sqrt{1 + |z|^2} \sqrt{1 + L^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \cdot \sqrt{1 + |z|^2} \sqrt{1 + L^2} = 0. \quad (286)$$

ZU FALL 2. Falls  $(|z_n|)_{n \in \mathbb{N}}$  unbeschränkt ist, gibt es eine Teilfolge  $(l_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$  mit  $|z_{l_n}| \rightarrow \infty$   $(n \rightarrow \infty)$ . Da Teilfolgen konvergenter Folgen stets gegen denselben Grenzwert konvergent sind, gilt auch  $\chi(z_{l_n}, z) \rightarrow 0$  für  $z \rightarrow \infty$ . Wir beobachten nun

$$\chi(z_{l_n}, \infty) \stackrel{(281)}{=} \frac{1}{\sqrt{1 + |z_{l_n}|^2}} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \quad (287)$$

Somit gilt

$$\chi(z, \infty) \leq \chi(z, z_{l_n}) + \chi(z_{l_n}, \infty) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad (288)$$

und es folgt  $z = \infty$ . Noch  $\mathbf{Z}$ :  $|z_n| \rightarrow \infty$ . Dies folgt direkt aus

$$0 \stackrel{\leftarrow}{\underset{n \rightarrow \infty}{\lim}} \chi(z_n, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1 + |z_n|^2}}. \quad (289)$$

Jetzt wo wir die Folgenkonvergenz in  $(\mathbb{C}_\infty, \chi)$  verstanden haben können wir auch abgeschlossene/offene Mengen in  $\mathbb{C}_\infty$  verstehen.

**Proposition 82.** Eine Menge  $A \subset (\mathbb{C}_\infty, \chi)$  ist abgeschlossen genau dann wenn eine der folgenden Bedingungen zutrifft

- (1)  $A \subset \mathbb{C}$  ist abgeschlossen und beschränkt in  $(\mathbb{C}, d)$ .
- (2)  $A = \mathbb{C}_\infty \setminus U$  wobei  $U \subset \mathbb{C}$  eine offene Menge in  $(\mathbb{C}, d)$  ist.

**Beweis.** “ $\Rightarrow$ ”. Es sei  $A \subset (\mathbb{C}_\infty, \chi)$  abgeschlossen. Wir zeigen, dass Bedingung (1) oder (2) erfüllt sein muss.

FALL 1.  $\infty \notin A$ . Wir behaupten, dass dann  $A$  beschränkt in  $(\mathbb{C}, d)$  ist. In der Tat: Wäre  $A$  nicht beschränkt in  $(\mathbb{C}, d)$ , so gäbe es eine Folge  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$  mit  $|z_n| \rightarrow \infty$ . Dann würde aber auch gelten

$$\chi(z_n, \infty) \stackrel{(281)}{=} \frac{1}{\sqrt{1 + |z_n|^2}} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \quad (290)$$

Deswegen hat man  $z_n \rightarrow \infty$  in  $(\mathbb{C}_\infty, \chi)$ . Da  $A$  aber abgeschlossen in  $(\mathbb{C}_\infty, \chi)$  ist (und  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ ), folgt  $\infty \in A$ . Noch  $\mathbf{Z}$ :  $A$  abgeschlossen in  $(\mathbb{C}, d)$ . Es sei dazu  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$  eine Folge mit  $z_n \rightarrow z$  in  $(\mathbb{C}, d)$ .  $\mathbf{Z}$ :  $z \in A$ . Wegen Proposition 81 (i) gilt auch  $\chi(z_n, z) \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Da nun  $A$  aber in  $(\mathbb{C}_\infty, \chi)$  abgeschlossen ist, folgt  $z \in A$ , was zu zeigen war.

FALL 2.  $\infty \in A$ . Definiere  $U := \mathbb{C}_\infty \setminus A$ . Sicherlich gilt dann  $U \subset \mathbb{C}$ .  $\mathbf{Z}$ :  $U$  ist offen in  $(\mathbb{C}, d)$ . Angenommen nun  $U$  ist nicht offen in  $(\mathbb{C}, d)$ . Dann gibt es ein  $z \in U$  und eine Folge  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C} \setminus U$  mit  $z_n \rightarrow z$  in  $(\mathbb{C}, d)$ . Beachte, dass  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C} \setminus U \subset A$  und nach Proposition 81 (i) gilt auch  $z_n \rightarrow z$  in  $(\mathbb{C}_\infty, \chi)$ . Aus der Abgeschlossenheit von  $A$  in  $(\mathbb{C}_\infty, \chi)$  folgt dann  $z \in A$ , was  $z \in U = \mathbb{C} \setminus A$  widerspricht.

“ $\Leftarrow$ ” überlassen wir den Lesenden als Übungsaufgabe (siehe Übungsblatt 4).

Wir wissen also nun explizit, was abgeschlossene (und somit auch offene) Teilmengen von  $(\mathbb{C}_\infty, \chi)$  sind. Man sagt, wir haben die *Topologie* von  $(\mathbb{C}_\infty, \chi)$  verstanden.

### 1.13 Möbiustransformationen

Im folgenden lernen wir die *Möbiustransformationen* kennen. Sie bilden eine wichtige Klasse von Abbildungen auf  $\mathbb{C}_\infty$ .

**Definition 83.** MÖBIUSTRANSFORMATIONEN. Für komplexe Zahlen  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  mit  $ad - bc \neq 0$  definieren wir die zu  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$  assoziierte *Möbiustransformation*  $T$  :



$\mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  durch

$$\text{Fall 1: } c \neq 0. \quad T(z) := \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & z \in \mathbb{C}, cz+d \neq 0 \\ \infty & z \in \mathbb{C} : cz+d = 0 \\ \frac{a}{c} & z = \infty. \end{cases} \quad (291)$$

$$\text{Fall 2: } c = 0. \quad T(z) := \begin{cases} \frac{az+b}{d} & z \in \mathbb{C} \\ \infty & z = \infty. \end{cases} \quad (292)$$

(Man beachte, dass im zweiten Fall das Teilen durch  $d$  wohldefiniert ist weil aus  $c = d = 0$  folgen würde, dass  $ad - bc = 0$ ). Wir bezeichnen die Menge aller Möbiustransformationen mit  $\text{Moeb}(\mathbb{C}_\infty)$ .

Die Forderung  $ad - bc \neq 0$  hat eine spannende Parallele zur linearen Algebra. Es gilt nämlich dann

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc \neq 0, \quad (293)$$

d.h. die Matrix ist invertierbar in  $\mathbb{C}^{2 \times 2}$ . Somit gibt es einen Zusammenhang zwischen den invertierbaren  $2 \times 2$ -Matrizen und den Möbiustransformationen. Um uns ein wenig Arbeit zu sparen schreiben wir für die zu  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  assoziierte Möbiustransformation auch oft kurz  $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ , d.h. wir schreiben die Funktionsvorschrift für  $T(\infty)$  nicht explizit hin (und ignorieren auch den Fall  $cz+d=0$ ). Man sollte aber stets beachten, dass  $T(\infty)$  eigentlich stets gemäß (291)f. definiert ist.

**Beispiel 84.** Wichtige Möbiustransformationen sind:

1. Die *Translation*, d.h.  $T(z) = z + b$  für ein  $b \in \mathbb{C}$ , assoziiert zu  $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
2. Die *Drehstreckung*, d.h.  $T(z) = az$  für ein  $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , assoziiert zu  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
3. Die *Möbius-Inversion*, d.h.  $T(z) = \frac{1}{z}$ , assoziiert zu  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Dass die zweite Klasse von Möbiustransformationen eine *Drehstreckung* ist, kann wie folgt gesehen werden. Schreibt man in Polarkoordinaten  $a = re^{i\theta}$  für ein  $r \in (0, \infty)$  und  $\theta \in (-\pi, \pi]$  so gilt

$$az = e^{i\theta}(rz) \quad \forall z \in \mathbb{C}. \quad (294)$$

Nun ist  $z \mapsto rz$  stets eine Streckung mit *Streckfaktor*  $r$  und  $w \mapsto e^{i\theta}w$  eine Drehung mit *Drehwinkel*  $\theta$ , siehe Abbildung 1.

Wir werden später sehen, dass sich jede Möbiustransformation als Verkettung der oben genannten drei Typen schreiben lässt. Eine wichtige Erkenntnis auf dem Weg dorthin ist die folgende Proposition

**Proposition 85.** Es sei  $T_1 : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  die zu  $M_1 := \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$  assoziierte Möbiustransformation sowie  $T_2 : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  die zu  $M_2 := \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$  assoziierte Möbiustransformation. Dann ist  $T_1 \circ T_2$  auch eine Möbiustransformation, assoziiert zum Matrixprodukt der beiden Matrizen  $M_1 M_2$ .

**Beweis.** Es seien  $T_1, T_2 : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  und die Matrizen  $M_1 := \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, M_2 := \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$  wie in der Aussage. Wir berechnen zunächst das Matrixprodukt

$$M_1 M_2 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 + b_1 c_2 & a_1 b_2 + b_1 d_2 \\ c_1 a_2 + d_1 c_2 & c_1 b_2 + d_1 d_2 \end{pmatrix} =: M_3. \quad (295)$$

Es sei nun  $T_3$  die zu  $M_3$  assoziierte Möbiustransformation. **Z:**  $T_1(T_2(z)) = T_3(z)$  für alle  $z \in \mathbb{C}_\infty$ . Wir werden diese Behauptung nur im Spezialfall  $z \in \mathbb{C} : c_2 z + d_2 \neq 0, c_1 T_2(z) + d_1 \neq 0$  beweisen. Die Verifikation der anderen Fälle überlassen wir den Lesenden als Übungsaufgabe. In dem oben genannten Spezialfall gilt

$$T_1(T_2(z)) = T_1 \left( \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} \right) = \frac{a_1 \left( \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} \right) + b_1}{c_1 \left( \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} \right) + d_1} = \frac{a_1(a_2 z + b_2) + b_1(c_2 z + d_2)}{c_1(a_2 z + b_2) + d_1(c_2 z + d_2)} \quad (296)$$

$$= \frac{(a_1 a_2 + b_1 c_2)z + (a_1 b_2 + b_1 d_2)}{(c_1 a_2 + d_1 c_2)z + (c_1 b_2 + d_1 d_2)} = T_3(z). \quad (297)$$

Die Behauptung ist (im oben genannten Spezialfall) gezeigt.

Eine besonders wichtige Konsequenz ist die folgende Beobachtung

**Korollar 86.** Jede Möbiustransformation ist bijektiv auf  $\mathbb{C}_\infty$ . Konkreter: Ist  $T : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  die zu  $M \in GL_2(\mathbb{C})$  assoziierte Möbiustransformation, so ist die zu  $M^{-1}$  assoziierte Möbiustransformation die Umkehrabbildung von  $T$ .

**Beweis.** Es sei  $T$  die zu  $M$  assoziierte Möbiustransformation und  $\tilde{T}$  die zu  $M^{-1}$  assoziierte Möbiustransformation. Dann ist  $T \circ \tilde{T}$  die zu  $M M^{-1} = I_2$  assoziierte Möbiustransformation. Diese ist gegeben durch

$$(T \circ \tilde{T})(z) = \frac{1 \cdot z + 0}{0 \cdot z + 1} = z, \quad (298)$$

das bedeutet  $T \circ \tilde{T} = \text{id}_{\mathbb{C}_\infty}$ . Analog zeigt man  $\tilde{T} \circ T = \text{id}_{\mathbb{C}_\infty}$ .

Wir wiederholen an dieser Stelle nochmal, dass sich für  $M \in GL_2(\mathbb{C})$  die inverse Matrix  $M^{-1}$  sehr dankbar berechnen lässt, mithilfe der folgenden Formel

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \quad (299)$$

Algebraisch haben wir hier gerade folgendes beobachtet: die Menge aller Möbiustransformationen  $\text{Moeb}(\mathbb{C}_\infty)$  bildet eine *Untergruppe* der Gruppe aller Bijektionen auf  $\mathbb{C}_\infty$  (d.h. von  $\text{Bij}(\mathbb{C}_\infty, \mathbb{C}_\infty)$ , welche eine Gruppe bezüglich der Verkettung  $\circ$  von Abbildungen ist).

Proposition 85 zeigt, dass es einen *Gruppenhomomorphismus* zwischen  $GL_2(\mathbb{C}) := \{M \in \mathbb{C}^{2 \times 2} : M \text{ invertierbar}\}$  und  $\text{Moeb}(\mathbb{C}_\infty)$  gibt. Dieser ist gegeben durch  $\Phi : GL_2(\mathbb{C}) \rightarrow \text{Moeb}(\mathbb{C}_\infty)$ ,

$$\Phi(M) := \text{die zu } M \text{ assoziierte Möbiustransformation.} \quad (300)$$

Unsere Behauptung, dass jede Möbiustransformation aus einer Verkettung der drei Typen aus Beispiel 84 erzeugt werden kann, lässt sich nun auf ein reines Problem aus der linearen Algebra zurückführen: Die Zerlegung einer invertierbaren Matrix als *Produkt von Elementarmatrizen*.

**Proposition 87.** Es sei  $M \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$  eine invertierbare Matrix. Dann gibt es endlich viele invertierbare Matrizen  $S_1, \dots, S_N \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$  mit  $M = S_N \cdot S_{N-1} \cdot \dots \cdot S_1$  und jede Matrix  $S_i$  ist entweder gegeben durch  $S_i = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  für ein  $b \in \mathbb{C}$  oder  $S_i = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  für ein  $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  oder  $S_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

**Beweis.** Wir wissen aus der linearen Algebra, dass sich jede invertierbare Matrix  $M \in GL_2(\mathbb{C})$  aus der Einheitsmatrix  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  durch das Ausführen endlich vieler *elementarer Zeilenoperationen* erhalten lässt. Elementare Zeilenoperationen sind

1. Addieren eines beliebigen Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile.
2. Multiplizieren einer Zeile mit einem Faktor ungleich Null.
3. Vertauschen zweier Zeilen.

Da wir aufgrund der dritten Operation alle Zeilen immer vertauschen dürfen, würden es auch genügen, die Operationen von Typ 1 und 2 nur auf der ersten Zeile zuzulassen. Das bedeutet es genügen auch folgende Operationen

- 1'. Addieren eines beliebigen Vielfachen der zweiten Zeile zur ersten Zeile.
- 2'. Multiplizieren der ersten Zeile mit einem Faktor ungleich Null.
- 3'. Vertauschen der beiden Zeilen.

Die Operation 1' entspricht nun der Multiplikation mit der Matrix  $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  (von links) für ein  $b \in \mathbb{C}$ . In der Tat:

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ w_3 & w_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 + bw_3 & w_2 + bw_4 \\ w_2 & w_4 \end{pmatrix} \quad (301)$$

entspricht der Addition des  $b$ -fachen der zweiten Zeile zur ersten Zeile. Die Operation 2' wiederum entspricht der Multiplikation mit  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  (von links) für ein  $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . In der Tat:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ w_3 & w_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aw_1 & aw_2 \\ w_2 & w_4 \end{pmatrix} \quad (302)$$

entspricht dem Multiplizieren der ersten Zeile mit dem Faktor  $a \neq 0$ . Die Operation 3' entspricht der Multiplikation mit  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  (von links). In der Tat:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ w_3 & w_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_3 & w_4 \\ w_1 & w_2 \end{pmatrix} \quad (303)$$

entspricht dem Vertauschen der beiden Zeilen. Man nehme nun die Einheitsmatrix  $I_2$  und führe  $N \in \mathbb{N}$  Operationen der Form 1', 2', 3' aus bis man  $M$  erhält. Zu jeder dieser Operationen ist eine Matrix  $S_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) wie in der Aussage assoziiert. Dann gilt

$$M = S_N \cdot S_{N-1} \cdot \dots \cdot S_1 \cdot I = S_N \cdot \dots \cdot S_1. \quad (304)$$

Die Behauptung folgt.

**Korollar 88.** Jede Möbiustransformation  $T : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  ist Verkettung endlich vieler *Translationen*, *Drehstreckungen* und *Möbiusinversionen* (im Sinne von Beispiel 84).

**Beweis.** Es sei  $T : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  eine Möbiustransformation, assoziiert zu  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ . Aus der vorigen Proposition wissen wir, dass  $M = S_N \cdot \dots \cdot S_1$ , wobei jede der Matrizen  $S_i$  von der Form  $S_i = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  für ein  $b \in \mathbb{C}$  oder  $S_i = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  für ein  $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  oder  $S_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  ist. Es sei nun  $T_i : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  die zu  $S_i$  assoziierte Möbiustransformation ( $i = 1, \dots, N$ ). Nach Beispiel 84 ist jedes der  $T_i$  entweder eine Translation, Drehstreckung oder Möbius-Inversion. Mit Proposition 85 (sukzessive angewendet) folgt aus  $M = S_N \cdot \dots \cdot S_1$  die Gleichung

$$T = T_N \circ \dots \circ T_1 \quad (305)$$

und somit die Behauptung.

Als nächstes werden wir zeigen, dass jede Möbiustransformation durch ihren Wert auf drei verschiedenen Punkten  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}_\infty$  eindeutig bestimmt ist. Dazu zunächst folgendes Beispiel

**Beispiel 89.** Es seien drei verschiedene Zahlen  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$  gegeben. Wir werden nun eine Möbiustransformation  $T : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  konstruieren mit

$$T(z_1) = 0, T(z_2) = 1 \text{ und } T(z_3) = \infty. \quad (306)$$

Um  $T(z_1) = 0$  und  $T(z_3) = \infty$  zu bewerkstelligen, ist es sinnvoll, den Quotienten  $\frac{z-z_1}{z-z_3}$  vorkommen zu lassen. Unser Ansatz ist also

$$T(z) \stackrel{!}{=} \xi \frac{z - z_1}{z - z_3} \quad \text{für ein festes } \xi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \quad (307)$$

Nun wird  $\xi$  so bestimmt dass  $T(z_2) = 1$ . Das bedeutet

$$1 \stackrel{!}{=} T(z_2) = \xi \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3}. \quad \Rightarrow \quad \xi = \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}. \quad (308)$$

Wir erhalten

$$T(z) = \frac{(z_2 - z_3)(z - z_1)}{(z_2 - z_1)(z - z_3)} = \frac{(z_2 - z_3)z - (z_2 - z_3)z_1}{(z_2 - z_1)z - (z_2 - z_1)z_3}. \quad (309)$$

Dies definiert Möbiustransformation mit assoziierter Matrix

$$M := \begin{pmatrix} z_2 - z_3 & -(z_2 - z_3)z_1 \\ z_2 - z_1 & (z_2 - z_1)z_3 \end{pmatrix} \quad (310)$$

**Beispiel 90.** Nun ist es auch möglich für alle verschiedenen  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$  und alle verschiedenen  $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}$  eine Möbiustransformation  $T^* : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  zu konstruieren mit  $T^*(z_1) = w_1$ ,  $T^*(z_2) = w_2$  und  $T^*(z_3) = w_3$ . In der Tat: Nach dem vorigen Beispiel finden wir Möbiustransformationen  $T, \tilde{T} : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  mit

$$T(z_1) = 0, \quad T(z_2) = 1, \quad T(z_3) = \infty \quad (311)$$

$$\tilde{T}(w_1) = 0, \quad \tilde{T}(w_2) = 1, \quad \tilde{T}(w_3) = \infty. \quad (312)$$

Vorschriften für  $T$  und  $\tilde{T}$  lassen sich leicht explizit angeben mit (309). Seien  $M$  und  $\tilde{M}$  die assoziierten Matrizen (vgl. (310)). Definiere nun  $T^* := \tilde{T}^{-1} \circ T : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ . Dass  $T^*$  eine Möbiustransformation ist, folgt aus Proposition 86. Ferner gilt

$$T^*(z_1) = \tilde{T}^{-1}(T(z_1)) = \tilde{T}^{-1}(0) = w_1, \quad (313)$$

$$T^*(z_2) = \tilde{T}^{-1}(T(z_2)) = \tilde{T}^{-1}(1) = w_2, \quad (314)$$

$$T^*(z_3) = \tilde{T}^{-1}(T(z_3)) = \tilde{T}^{-1}(\infty) = w_3, \quad (315)$$

Die assoziierte Matrix ist dann  $M^* := \tilde{M}^{-1}M$ . Mithilfe dieser Formel kann man  $M^*$  explizit bestimmen und damit auch eine Vorschrift für  $T^*$  explizit angeben.

Nun, wo wir einige Spezialfälle diskutiert haben, können wir die folgende allgemeine Proposition beweisen

**Proposition 91.** Es seien drei verschiedene  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}_\infty$  und drei verschiedene  $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}_\infty$  gegeben. Dann gibt es genau eine Möbiustransformation  $T : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  mit  $T(z_1) = w_1, T(z_2) = w_2, T(z_3) = w_3$ .

**Beweis. Schritt 1. Existenz.** Es genügt, die Behauptung im Spezialfall  $w_1 = 0, w_2 = 1$  und  $w_3 = \infty$  zu zeigen. Denn dann können wir wie in Beispiel 90 vorgehen und erhalten die Behauptung für alle paarweise verschiedenen  $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}_\infty$ . Wir suchen nun also für paarweise verschiedene  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}_\infty$  eine Möbiustransformation  $T : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  mit

$$T(z_1) = 0, \quad T(z_2) = 1, \quad T(z_3) = \infty \quad (316)$$

FALL 1.  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ . Diesen Spezialfall haben wir bereits in Beispiel 89 studiert.

FALL 2.  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}, z_3 = \infty$ . Da in dem Fall  $T(\infty) = \infty$  machen wir den Ansatz  $T(z) \stackrel{!}{=} az + b$ . Mit  $T(z_1) = 0, T(z_2) = 1$  erhalten wir

$$\begin{cases} az_1 + b = 0 & \text{(I)} \\ az_2 + b = 1 & \text{(II)} \end{cases} \xrightarrow{\text{(II)-(I)}} \begin{cases} az_1 + b = 0 \\ a(z_2 - z_1) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} az_1 + b = 0 \\ a = \frac{1}{z_2 - z_1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -\frac{z_1}{z_2 - z_1} \\ a = \frac{1}{z_2 - z_1} \end{cases} \quad (317)$$

Somit leistet  $T(z) := \frac{1}{z_2 - z_1}z + \frac{-z_1}{z_2 - z_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$  das Gewünschte, auch  $T(\infty) = \infty$ !

FALL 3.  $z_3 \in \mathbb{C}, \infty \in \{z_1, z_2\}$ . Betrachte die Möbiustransformation  $F(z) = \frac{1}{z - z_3}$ . Diese erfüllt  $F(z_3) = \infty$  und  $F(z_1), F(z_2) \in \mathbb{C}$ . Nach Fall 2 gibt es dann eine Möbiustransformation  $\tilde{T} : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  mit  $\tilde{T}(F(z_1)) = 0, \tilde{T}(F(z_2)) = 1$  und  $\tilde{T}(F(z_3)) = \infty$ . Nun ist aber auch  $T := \tilde{T} \circ F : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  eine Möbiustransformation. Diese leistet das Gewünschte, denn  $T(z_1) = \tilde{T}(F(z_1)) = 0$  und analog  $T(z_2) = \tilde{T}(F(z_2)) = 1, T(z_3) = \tilde{T}(F(z_3)) = \infty$ .

**Schritt 2. Eindeutigkeit.** Seien  $T, \tilde{T} : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  Möbiustransformationen mit

$$T(z_1) = w_1, \quad T(z_2) = w_2, \quad T(z_3) = w_3, \quad (318)$$

$$\tilde{T}(z_1) = w_1, \quad \tilde{T}(z_2) = w_2, \quad \tilde{T}(z_3) = w_3. \quad (319)$$

Definiere  $\hat{T} := T \circ \tilde{T}^{-1}$ , was nach Proposition 85 und Korollar 86 wiederum eine Möbiustransformation ist. Diese erfüllt  $\hat{T}(w_1) = w_1, \hat{T}(w_2) = w_2$  und  $\hat{T}(w_3) = w_3$ . Sei  $\hat{T}$  etwa assoziiert zu  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ .

FALL 1.  $\infty \in \{w_1, w_2, w_3\}$ . Wir nehmen an, dass  $w_3 = \infty, w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ . Die anderen Fälle sind analog. In diesem Fall gilt  $c = 0$ , da  $\hat{T}(\infty) = \infty$ , siehe Definition 83. Somit gibt es  $a, b, d \in \mathbb{C}, ad \neq 0$  mit  $\hat{T}(w) = \frac{a}{d}w + \frac{b}{d}$ . Nun gilt  $\hat{T}(w_i) = w_i$  für alle  $i = 1, 2$  und daher

$$\frac{a}{d}w_i + \frac{b}{d} = w_i \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{a}{d} - 1\right)w_i - \frac{b}{d} = 0 \quad \forall i = 1, 2. \quad (320)$$

Somit hat das  $\mathbb{C}$ -Polynom  $p(z) = \left(\frac{a}{d} - 1\right)z + \frac{b}{d}$  zwei verschiedene Nullstellen  $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ . Nun kann  $p$  also kein nichttriviales  $\mathbb{C}$ -Polynom sein, denn dann wäre  $p$  vom Grade höchstens 1

und hätte damit höchstens eine Nullstelle. Wir folgern  $p \equiv 0$  und somit  $\frac{a}{d} = 1$  und  $\frac{b}{d} = 0$ . Es gilt dann

$$\hat{T}(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = z \quad \forall z \in \mathbb{C}. \quad (321)$$

Somit gilt  $\hat{T} = \text{id}_{\mathbb{C}_\infty}$ , d.h.  $T \circ \tilde{T}^{-1} = \text{id}_{\mathbb{C}_\infty}$ . Verketteten wir beide Seiten von rechts mit  $\tilde{T}$  so folgern wir  $T = \tilde{T}$ .

FALL 2.  $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}$ . In dem Fall folgt aus  $\hat{T}(w_i) = w_i$  für alle  $i = 1, 2, 3$ , dass

$$\frac{aw_i + b}{cw_i + d} = w_i \quad \forall i = 1, 2, 3. \quad (322)$$

Beachte, dass  $cw_i + d \neq 0$  für alle  $i$ , denn andernfalls wäre  $w_i = \hat{T}(w_i) = \infty$ . Wir folgern für  $i = 1, 2, 3$

$$aw_i + b = w_i(cw_i + d). \quad \Rightarrow \quad cw_i^2 + (d - a)w_i - b = 0. \quad (323)$$

Somit hat das  $\mathbb{C}$ -Polynom  $q(z) := cz^2 + (d - a)z - b$  drei Nullstellen  $w_1, w_2, w_3$ . Wäre nun  $p$  ein nichttriviales  $\mathbb{C}$ -Polynom, so könnte es aufgrund seines Grades wiederum nur maximal 2 Nullstellen haben. Es folgt  $q \equiv 0$  und somit  $c = b = 0$  und  $a = d$ . Wir folgern

$$\hat{T}(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{az + 0}{0z + a} = z. \quad (324)$$

Es folgt wiederum  $\text{id}_{\mathbb{C}_\infty} = \hat{T} = T \circ \tilde{T}^{-1}$  und daher  $T = \tilde{T}$ . Die Eindeutigkeit ist bewiesen.

Zum Schluss zeigen wir noch, dass jede Möbiustransformation Geraden (oder Kreise) auf Geraden oder Kreise abbildet. Man spricht bei Geraden oder Kreisen auch von *verallgemeinerten Kreisen* und nennt diese Eigenschaft daher *Kreistreue*.

**Proposition 92. KREISTREUE.** Es sei  $T : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  eine Möbiustransformation und sei  $A \subset \mathbb{C}_\infty$  entweder eine Gerade oder ein Kreis. Dann ist das Bild  $T(A)$  entweder eine Gerade oder ein Kreis. Hierbei ist eine *Gerade* stets eine Menge der Form

$$L := L(w_1, w_2) := \{w_1 + tw_2 : t \in \mathbb{R}\} \cup \{\infty\} \quad w_1, w_2 \in \mathbb{C}, w_2 \neq 0, \quad (325)$$

und ein *Kreis* stets eine Menge der Form

$$C := C(a, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a| = r\} \quad a \in \mathbb{C}, r > 0. \quad (326)$$

**Beweis.** Es genügt wegen Korollar 88 die Behauptung unter der Annahme zu zeigen, dass  $T$  eine Translation, Drehstreckung oder Möbius-Inversion ist. Ist  $T$  eine Translation oder eine Drehstreckung, so ist die Behauptung anschaulich klar. Wir überlassen den Lesenden die Details als Übungsaufgabe. Spannender ist es bei der Möbius-Inversion. Wir

wiederholen nochmal, dass diese nach (251) gegeben ist durch  $I : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$

$$I(z) := \begin{cases} \frac{1}{z} & z \in \mathbb{C}, z \neq 0 \\ \infty & z = 0 \\ 0 & z = \infty \end{cases} \quad (327)$$

Beachte, dass  $I \circ I = \text{id}_{\mathbb{C}_\infty}$ , d.h.  $I = I^{-1}$ .

**Schritt 1.** Wir zeigen, dass für alle Geraden  $L$  und alle Kreise  $C$  gilt, dass  $I(L)$  und  $I(C)$  eine Teilmenge einer Gerade oder eines Kreises ist.

**Schritt 1.1** Es sei zuerst  $L = L(w_1, w_2)$  eine Gerade.

FALL 1.  $0 \in L$ . Dann kann  $w_1 = 0$  gewählt werden und insbesondere gilt  $L = \{tw : t \in \mathbb{R}\} \cup \{\infty\}$ . Wir behaupten nun, dass  $I(L) \subset \{uw^{-1} : u \in \mathbb{R}\} \cup \{\infty\}$ . In der Tat: Sei  $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Dann gilt für  $u := \frac{1}{t}$ .

$$I(tw) = \frac{1}{tw} = \frac{1}{t} \frac{1}{w} = uw^{-1}. \quad (328)$$

Da außerdem  $I(0) = \infty$  und  $I(\infty) = 0$  folgt die Behauptung.

FALL 2.  $0 \notin L$ . In diesem Fall ist es möglich,  $w_1 \neq 0$  so zu wählen, dass  $w_1 \perp w_2$  bezüglich  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}}$ . Wir verweisen hier auf die lineare Algebra (für das entsprechende Resultat in  $\mathbb{R}^2$ ). Dann gilt für alle  $t \in \mathbb{R}$  und  $a := \frac{1}{2w_1}$ , dass

$$\left| \frac{1}{w_1 + tw_2} - \frac{1}{2w_1} \right|^2 = \left| \frac{2w_1 - (w_1 + tw_2)}{(w_1 + tw_2)(2w_1)} \right|^2 = \left| \frac{w_1 - tw_2}{(w_1 + tw_2)2w_1} \right|^2 = \frac{1}{2|w_1|} \frac{|w_1 - tw_2|^2}{|w_1 + tw_2|^2}. \quad (329)$$

Nun gilt wegen den Linearitätseigenschaften des Skalarproduktes

$$|w_1 \pm tw_2|^2 = \langle w_1 \pm tw_2, w_1 \pm tw_2 \rangle = \langle w_1, w_1 \rangle \pm 2t \langle w_1, w_2 \rangle + t^2 \langle w_2, w_2 \rangle. \quad (330)$$

Da  $\langle w_1, w_2 \rangle = 0$  fällt der Term mit “ $\pm$ ” weg und man hat

$$|w_1 + tw_2|^2 = |w_1 - tw_2|^2. \quad (331)$$

Es folgt, dass die linke Seite von (329) unabhängig von  $t$  (und gleich  $\frac{1}{2|w_1|}$ ) ist. Wir haben gezeigt, dass

$$|I(w_1 + tw_2) - \frac{1}{2w_1}| = \frac{1}{2|w_1|}. \quad (332)$$

Somit ist  $I(L) \subset C(\frac{1}{2w_1}, \frac{1}{2|w_1|})$

**Schritt 1.2.** Sei nun  $C = C(a, r)$  für  $a \in \mathbb{C}$  und  $r > 0$  ein Kreis. Für alle  $z \in C(a, r)$  folgt aus  $|z - a|^2 = r^2$

$$r^2 = |z - a|^2 = |z|^2 + |a|^2 - 2\langle z, a \rangle = |z|^2 + |a|^2 - 2\text{Re}(a\bar{z}). \quad (333)$$

FALL 1.  $0 \notin C$ . In diesem Fall gilt insbesondere  $|a|^2 \neq r^2$ . Wir betrachten nun für



$z \in C(a, r)$  (insbesondere  $z \neq 0$ )

$$\left| I(z) - \frac{\bar{a}}{|a|^2 - r^2} \right|^2 = \left| \frac{1}{z} - \frac{\bar{a}}{|a|^2 - r^2} \right|^2 = \left| \frac{|a|^2 - r^2 - \bar{a}z}{z(|a|^2 - r^2)} \right|^2 = \frac{1}{|z|^2 |a|^2 - r^2|^2} |a|^2 - r^2 - \bar{a}z|^2 \quad (334)$$

$$= \frac{1}{|z|^2 |a|^2 - r^2|^2} [(|a|^2 - r^2)^2 - 2(|a|^2 - r^2)\operatorname{Re}(a\bar{z}) + |a|^2|z|^2] \quad (335)$$

Nach (333) gilt nun  $2\operatorname{Re}(a\bar{z}) = |a|^2 - r^2 + |z|^2$ . Dies eingesetzt in (335) ergibt

$$\left| I(z) - \frac{\bar{a}}{|a|^2 - r^2} \right|^2 = \frac{1}{|z|^2 |a|^2 - r^2|^2} [(|a|^2 - r^2)^2 - (|a|^2 - r^2)(|a|^2 - r^2 + |z|^2) + |a|^2|z|^2] \quad (336)$$

$$= \frac{1}{|z|^2 |a|^2 - r^2|^2} (r^2|z|^2) = \frac{r^2}{||a|^2 - r^2|^2}. \quad (337)$$

Wir finden also  $|I(z) - \frac{\bar{a}}{|a|^2 - r^2}| = \frac{r}{||a|^2 - r^2|}$  und somit

$$I(C(a, r)) \subset C\left(\frac{\bar{a}}{|a|^2 - r^2}, \frac{r}{||a|^2 - r^2|}\right). \quad (338)$$

FALL 2.  $0 \in C$ . Dann gilt  $|a| = r$ , etwa  $a = re^{i\theta}$  für ein  $\theta \in (-\pi, \pi]$ . Sei nun  $z \in C(a, r) \setminus \{0\}$ . Dann ist  $\frac{z-a}{r} \in C(0, 1) = \mathbb{S}^1$ . Somit gibt es ein  $\varphi \in (\theta - \pi, \theta + \pi]$  mit  $\frac{z-a}{r} = e^{i\varphi}$ , d.h.  $z = a + re^{i\varphi}$  für ein  $\varphi \in (-\theta - \pi, \theta + \pi]$ . (Normalerweise hätte man jetzt  $\varphi \in (-\pi, \pi]$  erwartet, aber wegen der  $2\pi$ -Periodizität können wir genausogut  $\varphi \in (-\theta - \pi, \theta + \pi]$  eindeutig wählen). Mit der Polarkoordinatendarstellung von  $a$  gilt  $z = r(e^{i\theta} + e^{i\varphi})$ . Da  $z \neq 0$  angenommen wurde, folgern wir daher auch  $e^{i\varphi} \neq -e^{i\theta}$ , d.h.  $\varphi \neq \theta + \pi$  und somit  $\varphi \in (\theta - \pi, \theta + \pi)$ . Somit gilt für  $z \in C(a, r) \setminus \{0\}$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r e^{i\theta} + e^{i\varphi}} = \frac{1}{r} \frac{e^{-i\frac{\theta+\varphi}{2}}}{e^{i\frac{\theta-\varphi}{2}} + e^{i\frac{\varphi-\theta}{2}}} = \frac{1}{r} \frac{e^{-i\frac{\theta+\varphi}{2}}}{e^{i\frac{\theta-\varphi}{2}} + e^{-i\frac{\theta-\varphi}{2}}} = \frac{1}{r} \frac{e^{-i\theta} e^{i\frac{\theta-\varphi}{2}}}{2 \cos \frac{\theta-\varphi}{2}} \quad (339)$$

$$= \frac{e^{-i\theta} \cos \frac{\theta-\varphi}{2} + i \sin \frac{\theta-\varphi}{2}}{2r \cos \frac{\theta-\varphi}{2}} = \frac{1}{2r e^{i\theta}} \left(1 + i \tan \frac{\theta-\varphi}{2}\right) = \frac{1}{2a} + \tan \frac{\theta-\varphi}{2} \frac{i}{2a}. \quad (340)$$

Beachte nun, dass wegen  $\varphi \in (-\theta - \pi, \theta + \pi)$  gilt, dass  $\frac{\theta-\varphi}{2} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ . Definieren wir  $t := \tan \frac{\theta-\varphi}{2} \in \mathbb{R}$  so erhalten wir

$$I(z) = \frac{1}{2a} + t \frac{i}{2a} \in L\left(\frac{1}{2a}, \frac{i}{2a}\right). \quad (341)$$

und damit  $I(C(a, r) \setminus \{0\}) \subset L\left(\frac{1}{2a}, \frac{i}{2a}\right)$ . Man beachte außerdem, dass  $I(0) = \infty \in L\left(\frac{1}{2a}, \frac{i}{2a}\right)$ . Somit folgt dann schlussendlich  $I(C(a, r)) \subset L\left(\frac{1}{2a}, \frac{i}{2a}\right)$ .

**Schritt 2.** Anstatt Teilmengeninklusionen gilt in Schritt 1 sogar stets Gleichheit. Dazu:

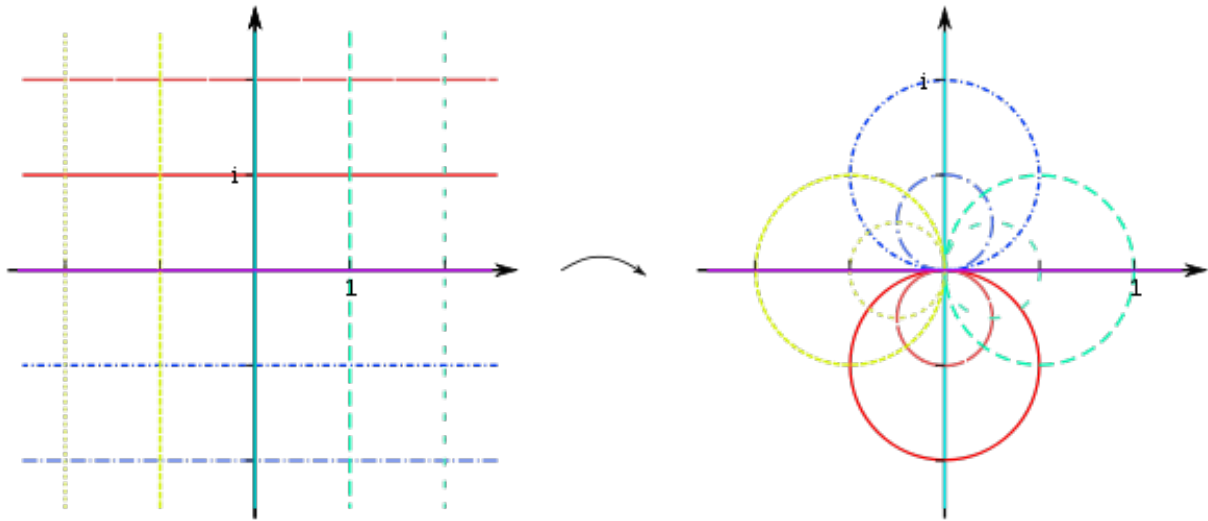


Abbildung 3: Bilder verschiedener Geraden unter der Möbiustransformation  $I(z) = \frac{1}{z}$ .

Angenommen es gäbe eine Menge  $A \subset \mathbb{C}_\infty$  Gerade oder Kreis und eine Menge  $B \subset \mathbb{C}_\infty$  Gerade oder Kreis mit  $I(A) \subsetneq B$ . Dann gilt (wegen  $I \circ I = \text{id}$  und der Bijektivität von  $I$ )

$$A = (I \circ I)(A) = I(I(A)) \subsetneq I(B). \quad (342)$$

Da  $I(B)$  nun aber eine Teilmenge einer Gerade oder eines Kreises ist und  $A$  bereits eine vollständige Gerade oder ein vollständiger Kreis, folgt  $A = I(B)$ . Insbesondere gilt, wegen der Bijektivität von  $I$

$$B = I^{-1}(A) \stackrel{I=I^{-1}}{=} I(A) \subsetneq B. \quad (343)$$

Ein Widerspruch.

Die vorige Proposition lässt die Frage aufkommen, was Geraden und Kreise gemeinsam haben. Dies ist mit der stereographischen Projektion relativ leicht zu beantworten:

**Bemerkung 93.** Ist  $A \subset \mathbb{C}_\infty$  eine Gerade oder ein Kreis, so ist  $\psi^{-1}(A)$  ein Kreis auf  $\mathbb{S}_{Rm}^2$ . Das bedeutet es gibt eine affine Ebene  $E \subset \mathbb{R}^3$  so, dass  $\psi^{-1}(A) = E \cap \mathbb{S}_{Rm}^2$ . Wir verweisen für den Beweis auf Übungsblatt 5.

## 2 Holomorphe Funktionen

Nun kommen wir endlich zum hauptsächlichen Studienobjekt der Funktionentheorie, den *holomorphen Funktionen*. In diesem Kapitel führen wir zunächst die Grundlagen der Differentialrechnung im Komplexen ein. Es sei im Folgenden stets  $D \subset \mathbb{C}$  eine offene, zusammenhängende Menge.

## 2.1 Definition und grundlegende Eigenschaften

**Definition 94.** Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  heißt *komplex differenzierbar* in einem Punkt  $z_0 \in D$  falls

$$f'(z_0) := \lim_{z \rightarrow z_0, z \neq z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \in \mathbb{C} \quad (344)$$

existiert. (Genauer: Falls die Funktion  $q_{z_0} : D \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$  gegeben durch  $q_{z_0}(z) := \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$  einen Funktionsgrenzwert im Sinne von Definition 24 für  $z \rightarrow z_0$  besitzt. Dieser wird dann  $f'(z_0)$  genannt).

Wir nennen  $f'(z_0)$  die *Ableitung* von  $f$  an der Stelle  $z_0$ . Oft schreiben wir nur  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$  und meinen damit implizit  $\lim_{z \rightarrow z_0, z \neq z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ .

Eine weitere Notation, die wir einführen möchten ist

$$\partial_z f(z_0) := f'(z_0). \quad (345)$$

Dass hierbei das Differenziationszeichen einer partiellen Ableitung  $\partial_z$  verwendet wird, sieht zunächst merkwürdig aus, denn schließlich hängt  $f$  je nur von einer (komplexen) Variablen ab. Eine Erklärung liefert Übungsblatt 5.

Wir werden später noch viele Beispiele für komplex differenzierbare Funktionen diskutieren. Eine Klasse von Beispielen, die wir aber vorher schon brauchen sind die *konstanten Funktionen*. Man überzeugt sich leicht, dass diese komplex differenzierbar sind.

Für die Analysis typisch ist es, den Zusammenhang zwischen Differenzierbarkeit und Stetigkeit zu untersuchen

**Proposition 95.** Ist  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  bei  $z_0 \in D$  komplex differenzierbar, so ist  $f$  auch stetig bei  $z_0$ .

**Beweis.** Es sei  $q_{z_0} : D \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$  wie in Definition 94. Dann gilt

$$f(z) = \begin{cases} f(z_0) + q_{z_0}(z)(z - z_0) & z \neq z_0 \\ f(z_0) & z = z_0 \end{cases}. \quad (346)$$

Da  $\lim_{z \rightarrow z_0} q_{z_0}(z) = f'(z_0)$ , gibt es ein  $\delta > 0$  so, dass  $|q_{z_0}(z)| \leq |f'(z_0)| + 1$  für alle  $z \in B_\delta(z_0)$ . Wir folgern dann aus (346), dass

$$|f(z) - f(z_0)| \leq (|f'(z_0)| + 1)|z - z_0| \quad \forall z \in B_\delta(z_0) \quad (347)$$

Aus dieser Gleichung liest man leicht heraus, dass

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0). \quad (348)$$

Die Behauptung folgt.

Jedoch ist nicht jede stetige Funktion komplex differenzierbar. Es sind sogar Funktionen nicht komplex differenzierbar, von denen man es intuitiv eventuell erwartet hätte.

**Beispiel 96.** BEHAUPTUNG. Die Funktion  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  gegeben durch  $f(z) = \bar{z}$  ist nirgends differenzierbar.

BEWEIS. Sei  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Wir müssen zeigen, dass

$$\lim_{z \rightarrow z_0, z \neq z_0} \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0, z \neq z_0} \frac{\overline{z - z_0}}{z - z_0} \quad (349)$$

nicht existiert. Angenommen der Grenzwert in (349) existiert, etwa sei  $\xi \in \mathbb{C}$  dieser Grenzwert. Betrachte zunächst die Folge  $(z_0 + \frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ . Diese konvergiert gegen  $z_0$  und deswegen gilt nach Definition 24

$$\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overline{(z_0 + \frac{1}{n}) - z_0}}{(z_0 + \frac{1}{n}) - z_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overline{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1. \quad (350)$$

Es folgt  $\xi = 1$ . Nun betrachte die Folge  $(z_0 + \frac{i}{n})_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ . Diese konvergiert wiederum gegen  $z_0$  und deswegen gilt

$$1 = \xi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overline{(z_0 + \frac{i}{n}) - z_0}}{(z_0 + \frac{i}{n}) - z_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overline{\frac{i}{n}}}{\frac{i}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-i}{i} = \lim_{n \rightarrow \infty} -1 = -1. \quad (351)$$

Ein Widerspruch.

Dieses Beispiel ist insbesondere aus folgendem Grund erstaunlich: Für  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  kann man stets die *assoziierte Funktion*  $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definiert durch

$$\tilde{f}(x, y) := \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(f(x + iy)) \\ \operatorname{Im}(f(x + iy)) \end{pmatrix}, \quad (352)$$

betrachten. Für  $f(z) := \bar{z}$  ist diese gegeben durch

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(f(x + iy)) \\ \operatorname{Im}(f(x + iy)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(\overline{x + iy}) \\ \operatorname{Im}(\overline{x + iy}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(x - iy) \\ \operatorname{Im}(x - iy) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}. \quad (353)$$

Die Funktion  $\tilde{f}(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$  ist jedoch auf ganz  $\mathbb{R}^2$  differenzierbar - sogar unendlich oft!

Differenzierbarkeit in  $\mathbb{R}^2$  und in  $\mathbb{C}$  müssen also unterschiedliche Konzepte sein. Unser Ziel in diesem Kapitel ist es, Gemeinsamkeiten und Unterschiede zu verstehen.

Zunächst aber einige übliche *Rechenregeln für das Differenzieren*.

**Proposition 97.** SUMMEN-/PRODUKT-/QUOTIENTENREGEL. Es seien  $f, g : D \rightarrow \mathbb{C}$  bei  $z_0 \in D$  komplex differenzierbar und  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

- (i)  $f + \lambda g$  ist bei  $z_0$  komplex differenzierbar und es gilt  $(f + \lambda g)'(z_0) = f'(z_0) + \lambda g'(z_0)$ .

(ii)  $f \cdot g$  ist bei  $z_0$  komplex differenzierbar und es gilt  $(f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$ .

(iii) Ist  $g(z_0) \neq 0$ , so ist  $\frac{f}{g}$  bei  $z_0$  komplex differenzierbar und  $(\frac{f}{g})'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}$ .

**Beweis.** Seien  $f, g : D \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z_0 \in D$  und  $\lambda \in \mathbb{C}$  wie in der Aussage. Zu (i).

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(f + \lambda g)(z) - (f + \lambda g)(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \underbrace{\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}}_{\rightarrow f'(z_0)} + \lambda \underbrace{\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}}_{\rightarrow g'(z_0)} = f'(z_0) + \lambda g'(z_0). \quad (354)$$

Zu (ii).

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(f \cdot g)(z) - (f \cdot g)(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)g(z) - f(z_0)g(z_0)}{z - z_0} \quad (355)$$

$$= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)g(z) - f(z_0)g(z) + f(z_0)g(z) - f(z_0)g(z_0)}{z - z_0} \quad (356)$$

$$= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(f(z) - f(z_0))g(z) + f(z_0)(g(z) - g(z_0))}{z - z_0} \quad (357)$$

$$= \lim_{z \rightarrow z_0} \underbrace{\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}}_{\rightarrow f'(z_0)} \underbrace{g(z)}_{\rightarrow g(z_0)} + f(z_0) \underbrace{\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}}_{\rightarrow g'(z_0)} \quad (358)$$

$$= f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0). \quad (359)$$

Hierbei wurde in (358) verwendet, dass  $g$  bei  $z_0$  stetig ist (laut Proposition 95). Zu (iii). Wir zeigen die Behauptung nun im Spezialfall  $f \equiv 1$ , d.h. für  $\frac{1}{g}$ .

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\frac{1}{g(z)} - \frac{1}{g(z_0)}}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{g(z)g(z_0)} \frac{g(z_0) - g(z)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \underbrace{\frac{-1}{g(z)g(z_0)}}_{\rightarrow -g(z_0)^{-2}} \underbrace{\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}}_{\rightarrow g'(z_0)} = -\frac{g'(z_0)}{g(z_0)^2}. \quad (360)$$

Hierbei haben wir wieder die Stetigkeit von  $g$  benutzt (vgl. 95). Somit gilt  $(\frac{1}{g})'(z_0) = -\frac{g'(z_0)}{g(z_0)^2}$ . Sei nun  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  beliebig (und bei  $z_0$  komplex differenzierbar). Mit (ii) gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(z_0) \stackrel{(ii)}{=} f'(z_0) \frac{1}{g(z_0)} + f(z_0) \left(-\frac{g'(z_0)}{g(z_0)^2}\right) = \frac{f'(z_0)}{g(z_0)} - \frac{f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}. \quad (361)$$

Erweitern wir den ersten Summanden mit  $g(z_0)$  so erhalten wir

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}. \quad (362)$$

Neben den oben genannten üblichen drei Regeln des Differenzierens gibt es auch noch die *Kettenregel*.

**Proposition 98. KETTENREGEL.** Es seien  $f : D_1 \rightarrow \mathbb{C}$  und  $g : D_2 \rightarrow \mathbb{C}$  und  $z_0 \in D_2$  so, dass  $g(z_0) \in D_1$ . Ist  $g$  bei  $z_0$  komplex diffbar und  $f$  bei  $g(z_0)$  komplex diffbar, so ist  $(f \circ g)$  bei  $z_0$  komplex diffbar und es gilt

$$(f \circ g)'(z_0) = f'(g(z_0))g'(z_0) \quad (363)$$

**Beweis.** Da  $f$  bei  $g(z_0)$  komplex differenzierbar ist, gibt es eine Funktion  $q_{g(z_0)} : D_1 \setminus \{g(z_0)\} \rightarrow \mathbb{C}$  wie in Definition 94 so, dass  $\lim_{w \rightarrow g(z_0)} q_{g(z_0)}(w) = f'(g(z_0))$  und

$$f(w) = f(g(z_0)) + q_{g(z_0)}(w)(w - g(z_0)) \quad \forall w \in D \setminus \{g(z_0)\}. \quad (364)$$

Wir definieren nun die stetige Funktion  $\tilde{q} : D_1 \rightarrow \mathbb{C}$  durch

$$\tilde{q}(w) := \begin{cases} q_{g(z_0)}(w) & w \neq g(z_0) \\ f'(g(z_0)) & w = g(z_0) \end{cases}. \quad (365)$$

Wir erhalten

$$f(w) = f(g(z_0)) + \tilde{q}(w)(w - g(z_0)) \quad \forall w \in D_1. \quad (366)$$

Umgestellt bedeutet das auch

$$f(w) - f(g(z_0)) = \tilde{q}(w)(w - g(z_0)) \quad \forall w \in D_1. \quad (367)$$

Man beachte: Da  $g(z_0) \in D_1$  und  $D_1$  offen ist, gibt es ein  $\delta > 0$  so, dass  $g(z) \in D_1$  für alle  $z \in B_\delta(z_0)$ . Wir bilden nun den Differenzenquotienten und verwenden (367) mit  $w = g(z)$ .

$$\frac{(f \circ g)(z) - (f \circ g)(z_0)}{z - z_0} = \frac{f(g(z)) - f(g(z_0))}{z - z_0} \quad (368)$$

$$\stackrel{(367)}{=} \frac{\tilde{q}(g(z))(g(z) - g(z_0))}{z - z_0} = \tilde{q}(g(z)) \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}. \quad (369)$$

Nun gilt  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = g'(z_0)$ . Außerdem gilt (weil  $g$  bei  $z_0$  stetig ist, dass  $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = g(z_0)$ ) und somit  $\lim_{z \rightarrow z_0} \tilde{q}(g(z)) \stackrel{(365)}{=} \tilde{q}(g(z_0)) = f'(g(z_0))$ . Somit gilt

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(f \circ g)(z) - (f \circ g)(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \tilde{q}(g(z)) \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = f'(g(z_0))g'(z_0). \quad (370)$$

**Bemerkung 99.** Wir werden auch häufig eine weitere Kettenregel verwenden, die man analog zeigen kann: Es sei  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  gegeben und sei  $(a, b) \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall. Sei eine Kurve  $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$  gegeben, die bei einem  $t_0 \in (a, b)$  differenzierbar ist (in dem Sinne, dass  $\operatorname{Re}(\gamma)$  und  $\operatorname{Im}(\gamma)$  bei  $t_0$  differenzierbar sind). Ferner sei  $\gamma(t_0) \in D$  und  $f$  bei  $\gamma(t_0)$  komplex differenzierbar. Dann ist  $(f \circ \gamma) : (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$  bei  $t_0$  differenzierbar und es

gilt

$$(f \circ \gamma)'(t_0) = f'(\gamma(t_0))\gamma'(t_0). \quad (371)$$

Im Folgenden betrachten wir meistens Funktionen, die überall auf einer gesamten offenen Menge komplex differenzierbar sind. Diese nennen wir holomorph.

**Definition 100.** Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  heißt *holomorph* auf  $D$  falls  $f$  in jedem Punkt (der offenen, zusammenhängenden Menge  $D$ ) komplex differenzierbar ist. Wir notieren die Menge aller auf  $D$  holomorphen Funktionen mit  $\mathcal{H}(D)$ .

## 2.2 Beispiele für holomorphe Funktionen

Eine wichtige Klasse von holomorphen Funktionen ist durch *Potenzreihen* gegeben.

**Proposition 101.** Es sei für  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{C}$  die Potenzreihe

$$P(z) := \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_1)^n \quad (372)$$

um ein  $z_1 \in \mathbb{C}$  gegeben. Es sei  $R = R_P \in [0, \infty]$  der Konvergenzradius von  $P$ . Dann ist  $f_P : B_R(z_1) \rightarrow \mathbb{C}$  gegeben durch  $f_P(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_1)^n$  auf  $B_R(z_1)$  holomorph. Konkreter: Die Potenzreihe

$$P'(z) := \sum_{n \geq 1} n a_n (z - z_1)^{n-1} \quad (373)$$

hat denselben Konvergenzradius wie  $P$  und es gilt

$$(f_P)'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_1)^{n-1} = f_{P'}(z) \quad \forall z \in B_R(z_1). \quad (374)$$

(Hierbei gilt die Konvention  $B_0(z_1) := \emptyset$  und  $B_{\infty}(z_1) := \mathbb{C}$ )

**Beweis. SCHRITT 1.** Wir zeigen nun zuerst, dass  $P'$  denselben Konvergenzradius wie  $P$  hat. Dazu müssen wir  $P'$  zunächst als Potenzreihe gemäß Definition 33 darstellen. Nach einer Indexverschiebung gilt

$$P'(z) = \sum_{n \geq 0} (n+1) a_{n+1} (z - z_1)^n = \sum_{n \geq 0} b_n (z - z_1)^n. \quad (375)$$

Hierbei definieren wir  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{C}$  durch  $b_n := (n+1) a_{n+1}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Nach Proposition 35 gilt (mit der Konvention  $\frac{1}{0} := \infty$  und  $\frac{1}{\infty} := 0$ )

$$R_P = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \quad (376)$$

und auch

$$R_{P'} = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n|}} = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|(n+1)a_{n+1}|}}. \quad (377)$$

Nun gilt

$$\sqrt[n]{|a_{n+1}|} = |a_{n+1}|^{\frac{1}{n}} = (|a_{n+1}|^{\frac{1}{n+1}})^{\frac{n+1}{n}} = \exp\left(\frac{n+1}{n} \log(|a_{n+1}|^{\frac{1}{n+1}})\right). \quad (378)$$

Wir berechnen

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}|^{\frac{1}{n+1}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n+1]{|a_{n+1}|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \stackrel{(376)}{=} \frac{1}{R_P}. \quad (379)$$

Da  $\frac{n+1}{n} \rightarrow 1$  für  $n \rightarrow \infty$  folgern wir aus (378) und (379)

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_{n+1}|} \stackrel{(378)}{=} \limsup_{n \rightarrow \infty} \exp\left(\frac{n+1}{n} \log(|a_{n+1}|^{\frac{1}{n+1}})\right) \stackrel{(379)}{=} \exp(\log \frac{1}{R_P}) = \frac{1}{R_P}. \quad (380)$$

Mit (380) können wir (377) umformen und erhalten

$$R_{P'} = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n+1} \sqrt[n]{|a_{n+1}|}} = \frac{1}{1 \cdot \frac{1}{R_P}} = R_P, \quad (381)$$

wobei wir hier benutzt haben, dass  $\sqrt[n]{n+1} \rightarrow 1$  für  $n \rightarrow \infty$ .

SCHRITT 2. OBdA  $z_1 = 0$ , denn beliebige  $z_1 \in \mathbb{C}$  können durch eine Verschiebung erreicht werden.

Sei  $R = R_P$ . Wir zeigen, dass  $f_P$  in  $B_R(0)$  diff'bar ist und weisen die Ableitungsformel (374) nach. OBDA  $R > 0$ , denn sonst ist  $B_R(0) = \emptyset$  und es ist nichts zu zeigen. Sei  $z \in B_R(0)$ , d.h.  $|z| < R$ . Dann gibt es auch ein  $R' \in (0, R)$  so, dass  $|z| < R'$ . Berechne nun für  $h \in \mathbb{C}$  mit  $|h| < R' - |z|$

$$\frac{f_P(z+h) - f_P(z)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \frac{1}{h} \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z+h)^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \quad (382)$$

$$= \frac{1}{h} \left( a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z+h)^n - \left( a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \right) \right) - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \quad (383)$$

$$= \frac{1}{h} \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z+h)^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \right) - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left( \frac{(z+h)^n - z^n}{h} - n z^{n-1} \right). \quad (384)$$



Nun gilt

$$\frac{(z+h)^n - z^n}{h} - nz^{n-1} = \frac{1}{h} [(z+h)^n - z^n - nhz^{n-1}] \quad (385)$$

$$= \frac{1}{h} \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} h^k z^{n-k} - z^n - nhz^{n-1} \right) \quad (386)$$

$$= \frac{1}{h} \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} h^k z^{n-k} - \binom{n}{0} h^0 z^n - \binom{n}{1} h^1 z^{n-1} \right) \quad (387)$$

$$= \frac{1}{h} \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} h^k z^{n-k} = \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} h^{k-1} z^{n-k} \quad (388)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k+2} h^{k+1} z^{n-(k+2)} = h \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k+2} h^k z^{n-(k+2)} \quad (389)$$

$$= h \sum_{k=0}^{n-2} \frac{n!}{(n-k-2)!(k+2)!} h^k z^{(n-2)-k} \quad (390)$$

$$= h \sum_{k=0}^{n-2} \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2-k)!(k+2)(k+1)k!} h^k z^{(n-2)-k} \quad (391)$$

$$= h \sum_{k=0}^{n-2} \frac{n(n-1)}{(k+2)(k+1)} \binom{n-2}{k} h^k z^{(n-2)-k}. \quad (392)$$

Als Folgerung erhalten wir

$$\left| \frac{(z+h)^n - z^n}{h} - nz^{n-1} \right|_{\Delta\text{-Ungl.}} \leq |h| \sum_{k=0}^{n-2} \frac{n(n-1)}{(k+2)(k+1)} \binom{n-2}{k} |h|^k |z|^{(n-2)-k} \quad (393)$$

$$\leq |h| \sum_{k=0}^{n-2} n(n-1) \binom{n-2}{k} |h|^k |z|^{(n-2)-k} \quad (394)$$

$$= |h|n(n-1) \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} |h|^k |z|^{(n-2)-k} = |h|n(n-1)(|h| + |z|)^{n-2}. \quad (395)$$

Erinnern wir uns daran, dass  $|h| \leq R' - |z|$ , d.h.  $|z| + |h| \leq R'$ , so erhalten wir

$$\left| \frac{(z+h)^n - z^n}{h} - nz^{n-1} \right| \leq |h|n(n-1)(R')^{n-2}. \quad (396)$$

Mit (384) ergibt sich

$$\left| \frac{f_P(z+h) - f_P(z)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \left| \frac{(z+h)^n - z^n}{h} - n z^{n-1} \right| \quad (397)$$

$$\stackrel{(396)}{\leq} |h| \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n(n-1) (R')^{n-2} \quad (398)$$

Wir behaupten nun, dass die Reihe  $\sum_{n \geq 1} |a_n| n(n-1) (R')^{n-2}$  gegen einen endlichen Wert konvergiert. Wir werden dafür das Wurzelkriterium verwenden (vgl. Satz 31). Dazu:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n| n(n-1) (R')^{n-2}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \sqrt[n]{n} \sqrt[n]{(n-1)} \sqrt[n]{(R')^{-2}} (R'). \quad (399)$$

Weil  $\sqrt[n]{n}$ ,  $\sqrt[n]{n-1}$ ,  $\sqrt[n]{(R')^{-2}} \rightarrow 1$  und  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}$  (vgl. (376)) erhalten wir

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n| n(n-1) (R')^{n-2}} \stackrel{(399)}{=} \frac{1}{R} (R') < 1 \quad (400)$$

und somit konvergiert  $\sum_{n \geq 1} |a_n| n(n-1) (R')^{n-2}$  nach dem Wurzelkriterium. Wir folgern mit dieser Erkenntnis aus (398), dass

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f_P(z+h) - f_P(z)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \right| = 0 \quad (401)$$

und somit die Behauptung.

Man beachte: Nach Proposition 35 ist für eine Potenzreihe  $P(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_1)^n$  der Ball  $B_{R_P}(z_1)$  stets die Menge aller *inneren Punkte* des Konvergenzbereichs. Wir haben somit gesehen, dass alle Potenzreihen im Inneren ihres Konvergenzbereiches *gliedweise differenzierbar* sind. Gliedweise Differenzierbarkeit ist hier so gemeint, dass jeder Summand von  $P$  einzeln wie in der reellen Analysis differenziert werden kann.

**Korollar 102.** Jedes Polynom  $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  gegeben durch

$$p(z) = \sum_{k=0}^m a_k z^k \quad \text{für } a_0, \dots, a_m \in \mathbb{C} \quad (402)$$

ist auf ganz  $\mathbb{C}$  komplex differenzierbar und es gilt

$$p'(z) = \sum_{k=1}^m k a_k z^{k-1} \quad \forall z \in \mathbb{C}. \quad (403)$$

**Beweis.** Polynome sind abbrechende Potenzreihen, d.h. das Polynom  $p$  aus (402) ist gegeben durch

$$p(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k, \quad (404)$$

wobei

$$b_k = \begin{cases} a_k & k \leq m \\ 0 & k > m \end{cases}. \quad (405)$$

Man folgert leicht, dass  $R_p = \infty$ . Wendet man die gliedweise Differentiationsregel auf (404) so folgert man die Behauptung.

Nun können wir auch die uns bekannten Potenzreihen, z.B. die *Exponentialfunktion* differenzieren und erhalten folgende Aussagen.

**Korollar 103.** Es gilt für alle  $z \in \mathbb{C}$

- (i)  $\exp'(z) = \exp(z)$ ,
- (ii)  $\cos'(z) = -\sin(z)$ ,
- (iii)  $\sin'(z) = \cos(z)$ ,
- (iv)  $\cosh'(z) = \sinh(z)$ ,
- (v)  $\sinh'(z) = \cosh(z)$ .

**Beweis.** Zu (i). Laut (99) gilt

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k. \quad (406)$$

Das gliedweise Differenzieren (vgl Proposition 101) ergibt

$$\exp'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{1}{k!} z^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k(k-1)!} z^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} z^{k-1} \stackrel{(*)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k = \exp(z). \quad (407)$$

Hierbei haben wir in (\*) eine Indexverschiebung  $k \rightarrow k + 1$  gemacht.

Zu (ii). Dies folgt nun aus Definition 43. Nach dieser gilt nämlich  $\cos(z) = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}$ . Mit der Kettenregel und Teil (i) berechnen wir zunächst

$$\partial_z \exp(\pm iz) = \exp(\pm iz)(\pm i). \quad (408)$$

Nach der Summenregel des Differenzierens gilt

$$\cos'(z) = \frac{i \exp(iz) - i \exp(-iz)}{2} = i \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2} \quad (409)$$

$$= i^2 \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i} = - \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i} = -\sin(z). \quad (410)$$

Wir überlassen (iii),(iv) und (v) den Lesenden als Übungsaufgabe.

Zum Abschluss dieser Sektion sehen wir noch eine nützliche Formel, die die Koeffizienten einer Potenzreihe  $P$  aus (höheren) Ableitungen der Funktion  $f_P$  rekonstruiert.

**Definition 104.** HÖHERE ABLEITUNGEN. Es sei  $f \in \mathcal{H}(D)$ . Ist auch  $f' \in \mathcal{H}(D)$  so nennen wir für  $z_0 \in D$

$$f^{(2)}(z_0) := f''(z_0) := (f')'(z_0) \quad (411)$$

die *zweite Ableitung* von  $f$  an der Stelle  $z_0$ . Induktiv definieren wir auch die höheren Ableitungen: Ist für ein  $k \in \mathbb{N}_{>2}$  die Funktion  $f^{(k-1)} \in \mathcal{H}(D)$  so nennen wir

$$f^{(k)}(z_0) := (f^{(k-1)})'(z_0) \quad (412)$$

die *k-te Ableitung* von  $f$  an der Stelle  $z_0$ .

Wir haben schon in der Einleitung diskutiert, dass man die Existenz der höheren Ableitungen eigentlich nicht fordern muss — denn es wird sich herausstellen, dass holomorphe Funktionen bereits unendlich oft differenzierbar sind. Deswegen führen wir in der obigen Definition Begrifflichkeiten wie *zweimal komplex diff'bar* auch gar nicht erst ein.

**Proposition 105.** Es sei für  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{C}$  und  $z_1 \in \mathbb{C}$

$$P(z) := \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_1)^n \quad (413)$$

eine Potenzreihe mit Konvergenzradius  $R = R_P$  und Wertefunktion

$$f_P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_1)^n \quad (z \in B_R(z_1)). \quad (414)$$

Dann ist  $f_P$  auf  $B_R(z_1)$  unendlich oft differenzierbar. Ferner gilt für alle  $k \in \mathbb{N}_0$

$$a_k = \frac{f_P^{(k)}(z_1)}{k!}. \quad (415)$$

**Beweis.** Zur höheren Differenzierbarkeit. Dies folgt direkt aus der Tatsache, dass die Ableitung von  $f_P$  wieder die Wertefunktion einer Potenzreihe mit demselben Konvergenzradius ist, vgl. Proposition 101. Nun zu (415). Sei nun  $k \in \mathbb{N}_0$ .  $k$ -maliges Anwenden von

Proposition 101 liefert für alle  $z \in B_R(z_1)$

$$f_P^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) a_n (z-z_1)^{n-k}. \quad (416)$$

Setzt man  $z = z_1$  in die obige Formel ein, so liefert nur der Summand für  $n = k$  einen Beitrag, denn  $(z_1 - z_1)^\alpha = 0$  für alle  $\alpha \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ . Wir erhalten

$$f_P^{(k)}(z_1) = k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot (k-k+1) \cdot a_k \cdot (z_1 - z_1)^0 = k! a_k \cdot 1 = k! a_k. \quad (417)$$

Die Behauptung folgt durch Umstellen der Formel nach  $a_k$ .

## 2.3 Die Cauchy-Riemann-Gleichungen

In diesem Abschnitt verstehen wir den Zusammenhang zwischen komplexer Differenzierbarkeit und Differenzierbarkeit von Abbildungen in  $\mathbb{R}^2$ . Die hauptsächliche Erkenntnis in diesem Abschnitt wird sein, dass  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  genau dann holomorph ist, wenn  $u(x, y) := \operatorname{Re}(f(x+iy))$  und  $v(x, y) := \operatorname{Im}(f(x+iy))$  differenzierbare Funktionen auf  $\mathbb{R}^2$  sind und  $u, v$  die *Cauchy-Riemann-Gleichungen* lösen, d.h.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \end{cases}. \quad (\text{CR})$$

Im Folgenden verwenden wir die Kurznotation  $\partial_x u := \frac{\partial u}{\partial x}$  und  $\partial_y u := \frac{\partial u}{\partial y}$  (sofern diese Ableitungen existent sind).

**Beobachtung 106.** Zuerst eine Erinnerung: Für eine Abbildung  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  kann man stets die *assoziierte Funktion*  $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definiert durch

$$\tilde{f}(x, y) := \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(f(x+iy)) \\ \operatorname{Im}(f(x+iy)) \end{pmatrix} \quad (418)$$

betrachten. Umgekehrt kann man für eine Abbildung  $g = (g_1, g_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  die Abbildung  $g^* : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  gegeben durch

$$g^*(z) := g_1(\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z)) + ig_2(\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z)) \quad (419)$$

betrachten.

Die Funktion  $f$  und  $\tilde{f}$  sowie  $g$  und  $g^*$  enthalten dieselben Informationen und ihr Abbildungsverhalten in der Zahlenebene lässt sich identisch veranschaulichen. Der einzige Unterschied ist, wie Definitionen- und Wertebereich der Abbildungen interpretiert werden. Wir weisen auch darauf hin, dass  $\tilde{f}^* = f$  und  $\tilde{g}^* = g$ . Ferner hat man

$$|\tilde{f}(x, y)|_{\mathbb{R}^2} = \sqrt{\operatorname{Re}(f(x+iy))^2 + \operatorname{Im}(f(x+iy))^2} = |f(x+iy)|, \quad (420)$$

und analog

$$|g^*(z)| = |g(\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z))|_{\mathbb{R}^2}. \quad (421)$$

Wir erinnern uns auch an die Definition der Differenzierbarkeit für Abbildungen von  $\mathbb{R}^2$  nach  $\mathbb{R}^2$ .

**Definition 107.** Es sei  $G \subset \mathbb{R}^2$  offen. Eine Funktion  $g : G \rightarrow \mathbb{R}^m$  heißt (*reell*) *differenzierbar* in einem Punkt  $(x_0, y_0) \in G$  falls es eine ( $\mathbb{R}$ -)lineare Abbildung  $L_{(x_0, y_0)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^m$  gibt, mit

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - g(x_0, y_0) - L_{(x_0, y_0)}(h_1, h_2)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0. \quad (422)$$

Ferner nennen wir  $L_{(x_0, y_0)}$  eine *Ableitung* von  $g$  an der Stelle  $(x_0, y_0)$ .

**Bemerkung 108.** Es sei  $g = (g_1, g_2) : G \rightarrow \mathbb{R}^2$  wie in der vorigen Definition. In der reellen Analysis haben wir gesehen, dass  $L_{(x_0, y_0)}$  eindeutig bestimmt ist und gegeben ist durch

$$L_{(x_0, y_0)}(h_1, h_2) = \begin{pmatrix} \partial_x g_1(x_0, y_0) & \partial_y g_1(x_0, y_0) \\ \partial_x g_2(x_0, y_0) & \partial_y g_2(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}. \quad (423)$$

Wir nennen die Matrix in (423) auch *Jacobi-Matrix* und notieren sie mit  $Dg(x_0, y_0)$ . Insbesondere gilt  $L(h) = Dg(x_0, y_0)h$ .

Jetzt können wir auch die Idee hinter den Cauchy-Riemann-Gleichungen erklären.

**Motivation 109.** Um zu verstehen warum die Cauchy-Riemann-Gleichungen so aussehen wie in (CR) betrachte folgende Rechnung. Sei  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  gegeben. Ist

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(f(x + iy)) \\ \operatorname{Im}(f(x + iy)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} \quad (424)$$

so gilt für die Jacobimatrix

$$D\tilde{f} = \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix}. \quad (425)$$

Nun gilt

$$(CR) \Leftrightarrow \begin{cases} \partial_x u = \partial_y v \\ \partial_x v = -\partial_y u \end{cases} \quad (426)$$

$$\Leftrightarrow D\tilde{f} \text{ ist von der Gestalt } \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \quad (427)$$

$$\stackrel{(36)}{\Leftrightarrow} D\tilde{f} \text{ stellt eine } \mathbb{C}\text{-lineare Abbildung dar.} \quad (428)$$

Wir sehen also: Der Grund dafür, dass die Cauchy-Riemann-Gleichungen gelten ist, dass die Ableitung  $\mathbb{C}$ -linear sein muss. Dies wollen wir im Folgenden noch konkretisieren.

**Lemma 110.** Es sei für  $D \subset \mathbb{C}$  offen die Abbildung  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  gegeben und  $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$ . Definiere  $\tilde{D} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + iy \in D\}$  und  $\tilde{f}$  wie in (418). Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

- (i)  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  ist bei  $z_0$  komplex differenzierbar.
- (ii)  $\tilde{f} : \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}^2$  ist bei  $(x_0, y_0)$  reell differenzierbar und für die Ableitung  $L_{(x_0, y_0)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  gilt, dass  $L_{(x_0, y_0)}^* : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  eine  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung ist.

**Beweis.** Zu “(i)  $\Rightarrow$  (ii)”. Es sei  $f$  bei  $z_0$  komplex differenzierbar. Dann gibt es ein  $w \in \mathbb{C}$  mit

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = f'(z_0) =: w. \quad (429)$$

Man definiere nun die ( $\mathbb{C}$ -lineare) Abbildung  $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  durch  $\phi(z) := wz$ . Definiere nun  $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  durch  $L := \tilde{\phi}$  im Sinne von (418). Man überzeugt sich leicht davon, dass  $L$  eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung definiert. Es sei nun  $(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ . Falls  $(x_0 + h_1, y_0 + h_2) \in \tilde{D}$  definiere

$$r(h_1, h_2) := \frac{\tilde{f}(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - \tilde{f}(x_0, y_0) - L(h_1, h_2)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}. \quad (430)$$

Wir zeigen, dass  $\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow 0} |r(h_1, h_2)|_{\mathbb{R}^2} = 0$ . Dazu betrachten wir zunächst  $r^*$ . Da  $\tilde{f}^* = f$  und  $L^* = \tilde{\phi}^* = \phi$  gilt für  $h = h_1 + ih_2$  mit  $z_0 + h = (x_0 + h_1) + i(y_0 + h_2) \in D$

$$r^*(h) = \frac{f(z_0 + h) - f(z_0) - \phi(h)}{|h|}. \quad (431)$$

Hierbei haben wir benutzt, dass  $|h_1 + ih_2| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$ . Nun gilt wegen der Definition von  $\phi$

$$r^*(h) = \frac{f(z_0 + h) - f(z_0) - wh}{|h|} = \frac{h}{|h|} \left[ \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} - w \right]. \quad (432)$$

Wegen (429) geht der Ausdruck in eckigen Klammern gegen Null. Wir folgern, dass

$$\lim_{h \rightarrow 0} |r^*(h)| = \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{h}{|h|} \left[ \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} - w \right] \right| = \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} - w \right| = 0. \quad (433)$$

Weil (wegen (423))  $|r(h_1, h_2)|_{\mathbb{R}^2} = |r^*(h_1 + ih_2)|$  folgt

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow 0} |r(h_1, h_2)| = 0, \quad (434)$$

was zu zeigen war. Wir folgern, dass  $\tilde{f}$  bei  $(x_0, y_0)$  reell differenzierbar ist mit Ableitung  $L_{(x_0, y_0)} = L$ . Insbesondere ist auch  $L_{(x_0, y_0)}^* = L^* = \tilde{\phi}^* = \phi$  eine  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung.

Zu "(ii)  $\Rightarrow$  (i)". Es sei  $\tilde{f} : \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}^2$  bei  $(x_0, y_0)$  reell differenzierbar mit Ableitung  $L_{(x_0, y_0)}$  und  $\phi := L_{(x_0, y_0)}^* : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  eine  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung. Dann gibt es laut Proposition 8 ein  $w \in \mathbb{C}$  mit  $\phi(z) = zw$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ . Nun gilt für  $h = h_1 + ih_2 \in \mathbb{C}$  mit  $z_0 + h \in D$

$$\left| \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} - w \right| = \frac{|f(z_0 + h) - f(z_0) - wh|}{|h|} = \frac{|f(z_0 + h) - f(z_0) - \phi(h)|}{|h|} \quad (435)$$

$$\stackrel{(423)}{=} \frac{|\tilde{f}(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - \tilde{f}(x_0, y_0) - \tilde{\phi}(h_1, h_2)|_{\mathbb{R}^2}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \quad (436)$$

$$\stackrel{\text{Def. von } \phi}{=} \frac{|\tilde{f}(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - \tilde{f}(x_0, y_0) - L_{(x_0, y_0)}(h_1, h_2)|_{\mathbb{R}^2}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \quad (437)$$

$$= \left| \frac{\tilde{f}(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - \tilde{f}(x_0, y_0) - L_{(x_0, y_0)}(h_1, h_2)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \right|_{\mathbb{R}^2} \quad (438)$$

Wir folgern

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} - w \right| \quad (439)$$

$$= \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)} \left| \frac{\tilde{f}(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - \tilde{f}(x_0, y_0) - L_{(x_0, y_0)}(h_1, h_2)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \right|_{\mathbb{R}^2} = 0. \quad (440)$$

Somit ist  $f$  bei  $z_0$  komplex differenzierbar mit Ableitung  $f'(z_0) = w$ . Die Behauptung folgt.

Als Konsequenz erhalten wir eine Charakterisierung von komplexer Differenzierbarkeit über die sogenannten *Cauchy-Riemann'schen Differenzialgleichungen*.

**Satz 111.** Es sei  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  und  $z_0 = x_0 + iy_0$ . Man definiere  $\tilde{D} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + iy \in D\}$  sowie  $u, v : \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $u(x, y) = \operatorname{Re}(f(x + iy))$  und  $v(x, y) = \operatorname{Im}(f(x + iy))$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent

- (i)  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  ist bei  $z_0$  komplex differenzierbar
- (ii)  $u, v : \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}$  sind beide bei  $(x_0, y_0)$  reell differenzierbar und es gelten die *Cauchy-Riemann'schen Differenzialgleichungen*

$$\begin{cases} \partial_x u(x_0, y_0) = \partial_y v(x_0, y_0) \\ \partial_y u(x_0, y_0) = -\partial_x v(x_0, y_0) \end{cases} \quad (441)$$



**Beweis.** Wir haben bereits gesehen dass (i) äquivalent dazu ist, dass  $\tilde{f} = (\tilde{f}_1, \tilde{f}_2) : \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}^2$  reell differenzierbar ist mit Ableitung  $L_{(x_0, y_0)}$ , wobei  $L_{(x_0, y_0)}^*$  eine  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung ist. Man beachte nach (418), dass  $\tilde{f}_1(x, y) = \operatorname{Re}(f(x + iy)) = u(x, y)$  und  $\tilde{f}_2(x, y) = \operatorname{Im}(f(x + iy)) = v(x, y)$  für alle  $(x, y) \in D$ . Man folgert mit Bemerkung 108, dass

$$L_{(x_0, y_0)}(h_1, h_2) = \begin{pmatrix} \partial_x \tilde{f}_1(x_0, y_0) & \partial_y \tilde{f}_1(x_0, y_0) \\ \partial_x \tilde{f}_2(x_0, y_0) & \partial_y \tilde{f}_2(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x u(x_0, y_0) & \partial_y u(x_0, y_0) \\ \partial_x v(x_0, y_0) & \partial_y v(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \quad (442)$$

Wir wissen aus Proposition 5, dass  $L_{(x_0, y_0)}^*$  genau dann  $\mathbb{C}$ -linear ist, wenn es  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  gibt mit

$$L_{(x_0, y_0)}^*(1) = \alpha + \beta i \quad \text{und} \quad L_{(x_0, y_0)}^*(i) = -\beta + \alpha i. \quad (443)$$

Dies ist äquivalent zu

$$\operatorname{Re}(L_{(x_0, y_0)}^*(1)) = \operatorname{Im}(L_{(x_0, y_0)}^*(i)) \quad \text{und} \quad \operatorname{Im}(L_{(x_0, y_0)}^*(1)) = -\operatorname{Re}(L_{(x_0, y_0)}^*(i)). \quad (444)$$

Mit der Funktionsvorschrift von  $L_{(x_0, y_0)}^*$  berechnet man

$$\operatorname{Re}(L_{(x_0, y_0)}^*(1)) \stackrel{(419)}{=} \text{erste Komponente von } L_{(x_0, y_0)}(\operatorname{Re}(1), \operatorname{Im}(1)) \quad (445)$$

$$= \text{erste Komponente von } L_{(x_0, y_0)}(1, 0) \quad (446)$$

$$\stackrel{(442)}{=} \text{erste Komponente von } \begin{pmatrix} \partial_x u(x_0, y_0) & \partial_y u(x_0, y_0) \\ \partial_x v(x_0, y_0) & \partial_y v(x_0, y_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (447)$$

$$= \text{erste Komponente von } \begin{pmatrix} \partial_x u(x_0, y_0) \\ \partial_x v(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \partial_x u(x_0, y_0) \quad (448)$$

Analog zeigt man

$$\operatorname{Im}(L_{(x_0, y_0)}^*(1)) = \partial_y u(x_0, y_0), \quad (449)$$

$$\operatorname{Re}(L_{(x_0, y_0)}^*(i)) = \partial_x v(x_0, y_0), \quad (450)$$

$$\operatorname{Im}(L_{(x_0, y_0)}^*(i)) = \partial_y v(x_0, y_0). \quad (451)$$

Damit ist (444) äquivalent zu

$$\partial_x u(x_0, y_0) = \partial_y v(x_0, y_0) \quad \text{und} \quad \partial_y u(x_0, y_0) = -\partial_x v(x_0, y_0). \quad (452)$$

Die Behauptung folgt

Wir halten fest:  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  ist holomorph genau dann wenn  $D\tilde{f}(x, y)$  für alle  $(x, y) \in \tilde{D}$  existiert und von der Gestalt

$$D\tilde{f}(x, y) = \begin{pmatrix} \alpha(x, y) & -\beta(x, y) \\ \beta(x, y) & \alpha(x, y) \end{pmatrix} \quad \forall (x, y) \in D \quad (453)$$

ist.

**Beispiel 112.** Betrachten wir nochmal die Funktion  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  gegeben durch  $f(z) = \bar{z}$ . Es gilt dann  $u(x, y) = \operatorname{Re}(f(x + iy)) = x$  und  $v(x, y) = \operatorname{Im}(f(x + iy)) = -y$ . Die Cauchy-Riemann-Gleichungen sind daher nirgends erfüllt, denn

$$1 = \partial_x u(x, y) \neq \partial_y v(x, y) = -1 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (454)$$

**Bemerkung 113.** Es seien  $f \in \mathcal{H}(D)$  und  $z_0 = x_0 + iy_0$  sowie  $u, v$  wie in Satz 111. Wir haben schon gesehen, dass

$$D\tilde{f}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \partial_x u(x_0, y_0) & \partial_y u(x_0, y_0) \\ \partial_x v(x_0, y_0) & \partial_y v(x_0, y_0) \end{pmatrix} \quad (455)$$

Wir möchten noch einmal kurz darauf eingehen, dass in dieser Matrix dieselbe Information wie in der komplexen Zahl  $f'(x_0 + iy_0)$  steckt. Dazu beobachten wir

$$f'(x_0 + iy_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + iy_0 + h) - f(x_0 + iy_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0, h \in \mathbb{R}} \frac{f((x_0 + h) + iy_0) - f(x_0 + iy_0)}{h} \quad (456)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0, h \in \mathbb{R}} \frac{[u((x_0 + h, y_0) - u(x_0, y_0))] + i[v(x_0 + h, y_0) - v(x_0, y_0)]}{h} \quad (457)$$

$$= \partial_x u(x_0, y_0) + i\partial_x v(x_0, y_0) \quad (458)$$

Somit lässt sich  $f'(x_0 + iy_0)$  aus den Einträgen von  $D\tilde{f}(x_0, y_0)$  errechnen.

Ein wichtiges Korollar ist die *Harmonizität* von Real/Imaginärteilen holomorpher Funktionen. Dazu zunächst eine Definition.

**Definition 114.** HARMONISCHE FUNKTIONEN. Für eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion  $u : G \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u = u(x, y)$  definieren wir den *Laplace-Operator* durch

$$\Delta u(x, y) := \partial_x^2 u(x, y) + \partial_y^2 u(x, y) \quad (x, y) \in G. \quad (459)$$

Wir nennen  $u$  *harmonisch* auf  $G$  falls  $\Delta u \equiv 0$  auf  $G$ .

**Korollar 115.** Es sei  $f \in \mathcal{H}(D)$ ,  $\tilde{D}$  wie in Satz 111 und  $u, v : \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}^2$  gegeben durch  $u(x, y) = \operatorname{Re}(f(x + iy))$  und  $v(x, y) = \operatorname{Im}(f(x + iy))$ . Dann sind  $u$  und  $v$  harmonisch (sofern sie zweimal stetig partiell differenzierbar sind).

**Beweis.** Es seien  $u, v$  wie in der Aussage. Dann gilt mit den Cauchy-Riemann-Gleichungen (444)

$$\begin{aligned} \Delta u(x, y) &= \partial_x^2 u(x, y) + \partial_y^2 u(x, y) = \partial_x(\partial_x u(x, y)) + \partial_y(\partial_y u(x, y)) & (460) \\ &\stackrel{(444)}{=} \partial_x(\partial_y v(x, y)) + \partial_y(-\partial_x v(x, y)) = \partial_{xy}^2 v(x, y) - \partial_{yx}^2 v(x, y) \stackrel{\text{Satz v. Schwarz}}{=} 0. \end{aligned}$$

Analoge Argumentation kann man für  $v$  wiederholen.

Wir werden später sehen, dass man beim vorigen Korollar auf die in Klammern geschriebene Voraussetzung “(sofern sie zweimal stetig partiell differenzierbar sind)” verzichten kann, weil holomorphe Funktionen automatisch unendlich oft differenzierbar sind.

Wir haben also gesehen, dass Real- und Imaginärteile holomorpher Funktionen stets harmonisch sind. Ist  $D \subset \mathbb{R}^2$  sternförmig, so gibt es sogar eine Art 1-zu-1-Korrespondenz zwischen holomorphen Funktionen und harmonischen Funktionen. Diesen werden wir im Folgenden im Detail aufklären.

**Definition 116.** STERNFÖRMIGKEIT. Ein Gebiet  $G \subset \mathbb{R}^n$  heißt *sternförmig* falls es ein  $a \in G$  derart gibt, dass für alle  $p \in G$  die *Verbindungsstrecke*

$$\overline{pa} := \{tp + (1-t)a : t \in [0, 1]\} \quad (461)$$

komplett in  $G$  enthalten ist. Ein solcher Punkt  $a$  heißt *Sternzentrum* von  $G$ . Ein Gebiet  $D \subset \mathbb{C}$  heißt sternförmig falls  $\tilde{D} := \{(x, y) : x + iy \in D\}$  sternförmig ist.

**Definition 117.** GRADIENTENFELD. Sei  $G \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$  ein Gebiet und  $F = (F_1, \dots, F_n) \in C^0(G; \mathbb{R}^n)$  ein Vektorfeld. Wir nennen  $F$  ein Gradientenfeld, falls es eine Funktion  $U \in C^1(G; \mathbb{R})$  gibt mit  $F = \nabla U$ . Ein solches  $U$  nennen wir *Potential* von  $F$ .

**Satz 118.** LEMMA VON POINCARÉ. Sei  $G \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$  ein Gebiet und  $F = (F_1, \dots, F_n)^T \in C^1(G; \mathbb{R}^n)$  ein Vektorfeld.

1. Ist  $F$  ein Gradientenfeld, so gilt  $\partial_i F_j = \partial_j F_i$  für alle  $i, j = 1, \dots, n$
2. Ist  $G$  sternförmig und  $\partial_i F_j = \partial_j F_i$  für alle  $i, j = 1, \dots, n$ , so ist  $F$  ein Gradientenfeld.

**Beweis.** Wir haben Punkt ‘1.’ bereits in GDG bewiesen. Zur Wiederholung: Ist  $F = \nabla U \in C^1(G; \mathbb{R}^n)$ , so ist  $U \in C^2(G; \mathbb{R})$ . Nach dem Satz von Schwarz gilt dann

$$\partial_i F_j = \partial_i(\partial_j U) = \partial_j(\partial_i U) = \partial_j F_i. \quad (462)$$

Einen sehr ähnlichen Beweis wie den von Punkt 2 werden wir an späterer Stelle nochmal studieren, wenn wir das *Lemma von Morera* beweisen.

**Proposition 119.** Es sei  $G \subset \mathbb{R}^2$  ein sternförmiges Gebiet,  $u \in C^2(G; \mathbb{R})$  harmonisch und  $G^* := \{x + iy : (x, y) \in G\}$ . Dann gibt es ein  $f \in \mathcal{H}(G^*)$  mit  $u = \operatorname{Re}(f)$ .

**Beweis.** Da  $u$  harmonisch ist gilt

$$\partial_x^2 u(x, y) = -\partial_y^2 u(x, y) \quad \forall (x, y) \in G. \quad (463)$$

Definiere  $F : G \rightarrow \mathbb{R}^2$  durch

$$F(x, y) := \begin{pmatrix} -\partial_y u(x, y) \\ \partial_x u(x, y) \end{pmatrix} \quad (464)$$

Dann gilt  $F \in C^1(G; \mathbb{R}^2)$ . Außerdem gilt für  $(x, y) \in G$  (mit der Konvention  $x_1 = x, x_2 = y$ )

$$\partial_2 F_1(x, y) = \partial_y(-\partial_y u(x, y)) = -\partial_y^2 u(x, y) \stackrel{(463)}{=} \partial_x^2 u(x, y) = \partial_x(\partial_x u(x, y)) = \partial_1 F_2(x, y). \quad (465)$$

Wir folgern aus dem Lemma von Poincaré 118, dass es ein Potential  $v \in C^2(G; \mathbb{R}^2)$  gibt mit

$$\begin{pmatrix} \partial_x v(x, y) \\ \partial_y v(x, y) \end{pmatrix} = \nabla v(x, y) = F(x, y) = \begin{pmatrix} -\partial_y u(x, y) \\ \partial_x u(x, y) \end{pmatrix}. \quad (466)$$

Es folgt, dass auf  $G$  die Cauchy-Riemann-Gleichungen gelten, d.h.

$$\begin{cases} \partial_x u = \partial_y v \\ \partial_x v = -\partial_y u \end{cases} \quad (467)$$

Definiere nun  $f : G^* \rightarrow \mathbb{C}$  durch

$$f(z) := u(\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z)) + iv(\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z)). \quad (468)$$

**BEHAUPTUNG.**  $f \in \mathcal{H}(G^*)$ . Dazu verwenden wir den Satz 111: Es gilt  $\operatorname{Re}(f(x + iy)) = u(x, y)$  und  $\operatorname{Im}(f(x + iy)) = v(x, y)$ . Diese Funktionen sind also beide auf  $G$  differenzierbar. Da für  $u$  und  $v$  die Cauchy-Riemann-Gleichungen gelten folgt die Holomorphie aus der Aussage von Satz 111 “(ii)  $\Rightarrow$  (i)”.

## 2.4 Biholomorphe Abbildungen

Biholomorphe Funktionen sind holomorphe Funktionen, deren Umkehrabbildung auch holomorph ist. Wir lernen in diesem Abschnitt, unter welchen Bedingungen es holomorphe Umkehrfunktionen gibt und wiederholen dabei einen wichtigen Satz aus der Analysis — den *lokalen Umkehrsatz*.

**Definition 120.** Seien wie immer  $D, U \subset \mathbb{C}$  offen. Es sei  $f : D \rightarrow U$  eine Funktion.  $f$  heißt *biholomorph* oder *holomorpher Diffeomorphismus*, wenn

(i)  $f \in \mathcal{H}(D)$

(ii)  $f : D \rightarrow U$  ist bijektiv mit Umkehrabbildung  $f^{-1} : U \rightarrow D$ .

(iii)  $f^{-1} \in \mathcal{H}(U)$ .

Die Ableitung der Umkehrfunktion kann wie aus der reellen Analysis gewohnt berechnet werden.

**Proposition 121.** Es sei  $f : D \rightarrow U$  biholomorph. Dann gilt  $f'(w) \neq 0$  für alle  $w \in D$  und

$$(f^{-1})'(z) = \frac{1}{f'(f^{-1}(z))} \quad \forall z \in U. \quad (469)$$

**Beweis.** Wir beginnen mit der Beobachtung, dass

$$z = f(f^{-1}(z)) \quad \forall z \in U. \quad (470)$$

Wir differenzieren nun beide Seiten. Mit der Kettenregel folgt

$$1 = f'(f^{-1}(z))(f^{-1})'(z) \quad \forall z \in U. \quad (471)$$

Da  $f'(f^{-1}(z))$  somit stets ein multiplikatives Inverses haben muss, gilt  $f'(f^{-1}(z)) \neq 0$  für alle  $z \in U$ . Da  $f^{-1}$  bijektiv ist, folgt auch  $f'(w) \neq 0$  für alle  $w \in D$ . Außerdem impliziert (471)

$$(f^{-1})'(z) = \frac{1}{f'(f^{-1}(z))} \quad \forall z \in U. \quad (472)$$

Die Behauptung folgt.

Nun stellt sich die Frage, wie man herausfinden kann, ob die Umkehrfunktion holomorph sind, ohne, dass man sie explizit bestimmen muss (denn das ist oft nicht möglich). Hierzu studieren wir eine Konsequenz aus dem *lokalen Umkehrsatz* aus der reellen Analysis. Diesen Satz wollen wir kurz in  $\mathbb{R}^2$  wiederholen.

**Satz 122. LOKALER UMKEHRSAZ.** Es seien  $G \subset \mathbb{R}^2$  offen,  $(x_0, y_0) \in G$  und  $F : G \rightarrow \mathbb{R}^2$  stetig differenzierbar mit  $\det(DF(x_0, y_0)) \neq 0$ . Dann gibt es eine offene Umgebung  $V \subset G$  von  $(x_0, y_0)$  so, dass  $U := F(V)$  eine offene Umgebung von  $F(x_0, y_0)$  ist,  $F|_V : V \rightarrow U$  bijektiv ist und  $(F|_V)^{-1} : U \rightarrow V$  stetig differenzierbar ist mit

$$D(F|_V)^{-1}(F(x, y)) = (DF(x, y))^{-1} \quad \text{für alle } (x, y) \in V. \quad (473)$$

**Beweis.** Wir verweisen auf die reelle Analysis.

**Proposition 123. UMKEHRSAZ IM KOMPLEXEN.** Es sei  $f \in \mathcal{H}(D)$  und  $z_0 \in D$  so, dass  $f'(z_0) \neq 0$ . Ferner sei  $f' : D \rightarrow \mathbb{C}$  stetig. Dann gibt es eine offene Umgebung  $\Omega \subset D$  von  $z_0$  so, dass  $U := f(\Omega)$  offen ist und  $f|_\Omega : \Omega \rightarrow U$  biholomorph ist.

**Beweis.** Sei  $z_0 = x_0 + iy_0$ . Betrachte  $\tilde{f} : \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $\tilde{D} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + iy \in D\}$  definiert wie in (418). Beachte, dass wegen den Voraussetzungen  $f$  auf  $\tilde{D}$  stetig differenzierbar ist. Wir wollen nun Satz 122 anwenden und zeigen dafür, dass  $\det(D\tilde{f}(x_0, y_0)) \neq 0$ . Seien dafür  $u, v$  wie in Satz 111. Aus (474) und den Cauchy-Riemann-Gleichungen wissen wir

$$D\tilde{f}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \partial_x u(x_0, y_0) & \partial_y u(x_0, y_0) \\ \partial_x v(x_0, y_0) & \partial_y v(x_0, y_0) \end{pmatrix} \stackrel{(444)}{=} \begin{pmatrix} \partial_x u(x_0, y_0) & -\partial_x v(x_0, y_0) \\ \partial_x v(x_0, y_0) & \partial_x u(x_0, y_0) \end{pmatrix}. \quad (474)$$

Somit gilt

$$\det(D\tilde{f}(x_0, y_0)) = \partial_x u(x_0, y_0) \cdot \partial_x u(x_0, y_0) - (-\partial_x v(x_0, y_0)) \cdot \partial_x v(x_0, y_0) \quad (475)$$

$$= (\partial_x u(x_0, y_0))^2 + (\partial_x v(x_0, y_0))^2. \quad (476)$$

Wir wiederholen nun aus Gleichung (458), dass  $f'(z_0) = \partial_x u(x_0, y_0) + i\partial_x v(x_0, y_0)$ . Man folgert daraus und aus  $f'(z_0) \neq 0$

$$0 < |f'(z_0)|^2 = (\partial_x u(x_0, y_0))^2 + (\partial_x v(x_0, y_0))^2 \stackrel{(476)}{=} \det(D\tilde{f}(x_0, y_0)). \quad (477)$$

Wir haben also nachgewiesen, dass  $\det(D\tilde{f}(x_0, y_0)) \neq 0$ . Satz 122 impliziert nun, dass es eine offene Umgebung  $\tilde{\Omega} \subset \tilde{D}$  von  $(x_0, y_0)$  gibt so, dass  $\tilde{U} := \tilde{f}(\tilde{\Omega})$  offen ist und  $\tilde{f}|_{\tilde{\Omega}} : \tilde{\Omega} \rightarrow \tilde{U}$  bijektiv ist und eine (reell) differenzierbare Umkehrabbildung hat. Definiert man nun  $U := \{x + iy : (x, y) \in \tilde{U}\}$  so erhält man, dass auch  $f|_{\tilde{\Omega}} : \tilde{\Omega} \rightarrow U$  bijektiv ist (und  $U$  offen ist). Wir wollen aber noch mehr: denn  $f^{-1}$  soll auch holomorph sein. Wir zeigen dafür, dass  $(\tilde{f}|_{\tilde{\Omega}})^{-1}$  die Cauchy-Riemann-Gleichungen erfüllt. Der Einfachheit schreiben wir ab sofort nur  $\tilde{f}^{-1}$  und nicht  $(\tilde{f}|_{\tilde{\Omega}})^{-1}$ . Wir beobachten, dass nach (473) gilt

$$D\tilde{f}^{-1}(x, y) = [D\tilde{f}(\tilde{f}^{-1}(x, y))]^{-1} \quad \forall (x, y) \in \tilde{U}. \quad (478)$$

Nun ist wegen der Holomorphie von  $f$  die Matrix  $D\tilde{f}(\tilde{f}^{-1}(x, y))$  von der Gestalt

$$\begin{pmatrix} \alpha(x, y) & -\beta(x, y) \\ \beta(x, y) & \alpha(x, y) \end{pmatrix}, \quad (479)$$

vgl. (453). Das Inverse hat dann (vgl. (299)) die Gestalt

$$\frac{1}{\alpha(x, y)^2 + \beta(x, y)^2} \begin{pmatrix} \alpha(x, y) & \beta(x, y) \\ -\beta(x, y) & \alpha(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}(x, y) & -\tilde{\beta}(x, y) \\ \tilde{\beta}(x, y) & \tilde{\alpha}(x, y) \end{pmatrix}, \quad (480)$$

mit  $\tilde{\alpha}(x, y) := \frac{\alpha(x, y)}{\alpha(x, y)^2 + \beta(x, y)^2}$  und  $\tilde{\beta}(x, y) := \frac{-\beta(x, y)}{\alpha(x, y)^2 + \beta(x, y)^2}$ . Wir folgern, dass die Einträge von  $D\tilde{f}^{-1}$  die Cauchy-Riemann Gleichungen erfüllen. Dies impliziert die Holomorphie von  $f^{-1}$ .

Auf die Voraussetzung, dass  $\tilde{f}$  stetig differenzierbar ist, werden wir später verzichten können.

Ein wichtiges Korollar ist die (Bi-)Holomorphie des komplexen Logarithmus, jedoch nicht

auf ganz  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ , sondern nur auf  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ ! Das liegt daran, dass das Bild einer biholomorphen Abbildung stets offen sein muss. Dies wäre bei  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  nicht der Fall, vgl. Satz 56 (iii).

**Korollar 123.** Die Abbildung

$$\log : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0} \rightarrow \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) \in (-\pi, \pi)\} \quad (481)$$

ist holomorph und es gilt

$$\log'(z) = \frac{1}{z} \quad \forall z \in \mathbb{C}. \quad (482)$$

**Beweis.** Es sei  $D := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) \in (-\pi, \pi)\}$ . Nach Satz 56 (iv) ist  $\exp|_D : D \rightarrow \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$  bijektiv und  $\log$  ist die Umkehrfunktion. Ferner gilt  $\exp'(z) = \exp(z) \neq 0$  für alle  $z \in D$  nach Satz 56 (i). Wegen Proposition 123 hat also jedes  $z \in D$  eine Umgebung  $\Omega$  so, dass  $U := \exp(\Omega)$  eine offene Umgebung von  $\exp(z)$  ist und  $\exp|_\Omega : \Omega \rightarrow U$  eine holomorphe Umkehrfunktion besitzt. Wegen der Eindeutigkeit der Umkehrfunktion schließen wir, dass diese Umkehrfunktion durch  $\log|_U$  gegeben sein muss. Somit ist  $\log|_U$  holomorph. Insbesondere ist  $\log$  also komplex differenzierbar bei  $\exp(z)$  für alle  $z \in D$ . Wir folgern, dass  $\log$  auf  $\exp(D) = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$  holomorph ist. Insbesondere haben wir gezeigt, dass  $\exp|_D : D \rightarrow \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$  biholomorph ist (vgl. Definition 120). Mit Proposition 121 folgt

$$\log'(z) = (\exp^{-1})'(z) = \frac{1}{\exp'(\exp^{-1}(z))} \stackrel{\text{Korollar 103(i)}}{=} \frac{1}{\exp(\exp^{-1}(z))} = \frac{1}{z}. \quad (483)$$

**Bemerkung 124.** Jetzt, wo wir die Ableitung des komplexen Logarithmus kennen, können wir auch eine *Potenzreihendarstellung* des Logarithmus in  $B_1(1)$  finden. Dazu beobachte zuerst, dass für alle  $z \in B_1(1)$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1 - (1 - z)} \stackrel{\text{geom. Reihe}}{\text{vgl. Bsp. 34}} \sum_{n=0}^{\infty} (1 - z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z - 1)^n. \quad (484)$$

Nun *integrieren* wir (formell) auf der rechten Seite einmal und definieren  $f : B_1(1) \rightarrow \mathbb{C}$  durch

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (z-1)^{n+1}. \quad (485)$$

Dann ist nach Proposition 101

$$f'(z) = \partial_z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (z-1)^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n \stackrel{(484)}{=} \frac{1}{z} = \log'(z). \quad (486)$$

Wir folgern also  $(f - \log)'(z) = 0$  für alle  $z \in B_1(1)$ . Es folgt (siehe Übungsblatt 6 Aufgabe

1), dass  $f - \log$  konstant sein muss. Nun gilt aber

$$f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (1-1)^{n+1} = 0 \quad \text{und} \quad \log(1) = \log_{\mathbb{R}} |1| + i \arg(1) = 0. \quad (487)$$

Somit gilt  $f(1) - \log(1) = 0$ . Weil  $f - \log$  konstant ist, folgt daraus  $f - \log \equiv 0$ . Also

$$\log(z) = f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (z-1)^{n+1} \quad \forall z \in B_1(1). \quad (488)$$

Man beachte, dass außerhalb von  $B_1(1)$  die Potenzreihendarstellung nicht gilt (auch wenn  $\log$  sogar auf der größeren Menge  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$  holomorph ist).

### 3 Kurvenintegrale

In diesem Kapitel wollen wir komplexe *Kurvenintegrale* definieren. Bevor wir dies tun, sollten wir aber erstmal ganz grundlegend ein wenig Notation für die Integralrechnung im komplexen einführen.

Es seien stets  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$ . Wir nennen eine Funktion  $h : (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$  *integrierbar* wenn ihr Realteil und Imaginärteil integrierbar sind. Wir definieren für eine integrierbare Funktion  $h : (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$

$$\int_a^b h(t) dt := \int_{(a,b)} h(t) dt := \int_a^b \operatorname{Re}(h(t)) dt + i \int_a^b \operatorname{Im}(h(t)) dt. \quad (489)$$

Ferner treffen wir die Konvention

$$\int_b^a h(t) dt = - \int_a^b h(t) dt. \quad (490)$$

**Bemerkung 125.** Man überzeugt sich leicht, dass folgende elementare Eigenschaften des Integrals auch in  $\mathbb{C}$  gelten

(i) *Linearität.* Für  $h_1, h_2 : (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$  integrierbar und  $\lambda \in \mathbb{C}$  gilt stets

$$\int_a^b (h_1(t) + \lambda h_2(t)) dt := \int_a^b h_1(t) dt + \lambda \int_a^b h_2(t) dt. \quad (491)$$

(ii) *Additivität.* Ist  $h : (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$  integrierbar, so gilt

$$\int_a^b h(t) dt = \int_a^c h(t) dt + \int_c^b h(t) dt \quad (492)$$



(iii) *Dreiecksungleichung.* Es gilt für  $h : (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$  integrierbar

$$\left| \int_a^b h(t) dt \right| \leq \int_a^b |h(t)| dt. \quad (493)$$

(iv) *Hauptsatz der Differential -und Integralrechnung.* Ist  $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  stetig, und auf  $(a, b)$  stetig differenzierbar mit integrierbarer Ableitung  $h' : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  so gilt

$$\int_a^b h'(t) dt = h(b) - h(a). \quad (494)$$

Hierbei ist mit der Aussage “ $h$  stetig differenzierbar auf  $(a, b)$ ” so gemeint, dass  $\operatorname{Re}(h)$  und  $\operatorname{Im}(h)$  auf  $(a, b)$  stetig diffbar sind.

(v) *Substitutionsregel.* Es sei  $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  stetig und  $\tau : [c, d] \rightarrow [a, b]$  stetig und auf  $(c, d)$  stetig differenzierbar (mit integrierbarer Ableitung). Dann gilt

$$\int_c^d h(\tau(t))\tau'(t) dt = \int_{\tau(c)}^{\tau(d)} h(u) du. \quad (495)$$

(vi) *Partielle Integration.* Es seien  $h_1, h_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  stetig und stetig differenzierbar auf  $(a, b)$  mit integrierbaren Ableitungen  $h'_1, h'_2 : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann gilt

$$\int_a^b h'_1(t)h_2(t) dt = h_1(b)h_2(b) - h_1(a)h_2(a) - \int_a^b h_1(t)h'_2(t) dt. \quad (496)$$

(vii) *Differenzieren unter dem Integral.* Es sei  $h : (s_0, s_1) \times [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  stetig und für alle  $t \in [a, b]$  sei  $s \mapsto h(s, t)$  differenzierbar. Ferner sei für alle  $s \in (s_0, s_1)$  die Funktion  $t \mapsto \partial_s h(s, t)$  stetig auf  $[a, b]$ . Dann gilt

$$\frac{d}{ds} \int_a^b h(s, t) dt = \int_a^b \partial_s h(s, t) dt \quad \forall s \in (s_0, s_1). \quad (497)$$

Wir werden diese Eigenschaften im Folgenden benutzen. Beweise müssen wir nicht durchführen – die Aussagen sind bereits aus der reellen Analysis hinreichend bekannt. Für Aussage (vii) verweisen wir z.B. auf Proposition 2.31 aus dem Maß -und Integrationstheorie-Skript von F. Pogorzelski.

Wir definieren nun die Kurven über die wir integrieren.

**Definition 126.** Eine stetige Abbildung  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  heißt

- (a)  *$C^1$ -Kurve*, falls  $\gamma$  auf  $(a, b)$  stetig differenzierbar ist und  $\lim_{t \rightarrow a+} \gamma'(t)$  bzw.  $\lim_{t \rightarrow b-} \gamma'(t)$  existieren. Wir bezeichnen die beiden Limites mit  $\gamma'(a+)$  bzw.  $\gamma'(b-)$ .
- (b) *stückweise  $C^1$ -Kurve*, falls  $\gamma$  auf  $[a, b]$  stetig ist und es eine Unterteilung  $a = a_0 <$

$a_1 < \dots < a_m = b$  gibt derart, dass für alle  $j = 1, \dots, m$  die Einschränkung  $\gamma|_{[a_{j-1}, a_j]}$  eine  $C^1$ -Kurve ist.

(c) *geschlossen*, falls  $\gamma(a) = \gamma(b)$ .

(d) *einfach geschlossen*, falls  $\gamma$  geschlossen und auf  $[a, b)$  injektiv ist.

Wir bei Teil (b) der vorigen Definition die Stetigkeit von  $\gamma$  nochmal zusätzlich betont, obwohl wir es nicht machen müssten. Grund dafür ist, dass klar werden soll, dass  $\gamma$  bei den Unterteilungspunkten  $a_0, \dots, a_m$  keine *Sprungstelle* haben darf. Die Ableitung hingegen darf schon eine Sprungstelle haben, denn  $\gamma'(a_j-) = \gamma'(a_j+)$  ist nirgends verlangt.

**Beispiel 127.** Seien  $r_1, r_2 > 0$  vorgegeben. Die Kurve  $\gamma^{(r_1, r_2)+-} : [0, 4] \rightarrow \mathbb{C}$  gegeben durch

$$\gamma^{(r_1, r_2)}(t) = \begin{cases} r_1 t & t \in [0, 1) \\ r_1 + ir_2(t-1) & t \in [1, 2) \\ r_1(1 - (t-2)) + ir_2 & t \in [2, 3) \\ ir_2(1 - (t-3)) & t \in [3, 4) \end{cases} = \begin{cases} r_1 t & t \in [0, 1) \\ r_1 + ir_2(t-1) & t \in [1, 2) \\ r_1(3-t) + ir_2 & t \in [2, 3) \\ ir_2(4-t) & t \in [3, 4) \end{cases} \quad (498)$$

durchläuft den Rand des Quadrates  $Q(r_1, r_2) := \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq r_1, 0 \leq \operatorname{Im}(z) \leq r_2\}$ . Sie ist eine stückweise  $C^1$ -Kurve. Eine mögliche Unterteilung wäre  $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 4$ . Man darf jedoch aber auch immer mehr Punkte dazunehmen, z.B. ist  $a_0 = 0, a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 3, a_5 = 4$  auch eine zulässige Unterteilung.

**Definition 128.** KURVENLÄNGE. Für eine  $C^1$ -Kurve definieren  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  definieren wir

$$L(\gamma) := L(\gamma, [a, b]) := \int_a^b |\gamma'(t)| dt. \quad (499)$$

Für eine stückweise  $C^1$ -Kurve definieren wir

$$L(\gamma) := L(\gamma, [a, b]) := \sum_{j=1}^m L(\gamma, [a_{j-1}, a_j]), \quad (500)$$

wobei  $a = a_0 < a_1 < \dots < a_m = b$  eine Unterteilung wie in Definition 126 ist.

Man müsste an dieser Stelle eigentlich zeigen, dass die Definition in (500) unabhängig von der gewählten Unterteilung  $a_0, \dots, a_m$  ist. Hierzu folgende Beobachtung: Mit Bemerkung 125 (ii) gilt

$$L(\gamma) = \sum_{j=1}^m L(\gamma, [a_{j-1}, a_j]) = \sum_{j=1}^m \int_{a_{j-1}}^{a_j} |\gamma'(t)| dt = \int_{a_0}^{a_m} |\gamma'(t)| dt = \int_a^b |\gamma'(t)| dt. \quad (501)$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite ist unabhängig von der Unterteilung. Man muss aber dazu sagen, dass  $|\gamma'(t)|$  eigentlich bei den Unterteilungspunkten  $\{a_0, a_1, \dots, a_m\}$  gar nicht

definiert ist. Dies spielt für den Wert des Integrals aber keine Rolle, da es sich bei diesen endlich vielen Punkten um eine *Nullmenge* handelt.

Man kann zeigen, dass die Kurvenlänge  $L(\gamma)$  tatsächlich das ergibt, was man aus dem Alltag als Kurvenlänge gewohnt ist. Der Grund dafür ist, dass

$$L(\gamma) = \sup \left\{ \sum_{j=1}^n |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| \mid \{t_0, \dots, t_n\} \subset [a, b] : n \in \mathbb{N}, a = t_0 < \dots < t_n = b \right\} \quad (502)$$

Das bedeutet wir approximieren die Länge von  $\gamma$  durch die Summe der Längen der *Verbindungsstrecken* zwischen  $\gamma(t_{j-1})$  und  $\gamma(t_j)$  für eine beliebig feine Unterteilung  $\{t_0, \dots, t_n\}$  des Intervalls  $[a, b]$  (vgl. (502)). Die Vereinigung dieser Verbindungsstrecken nennt man *Polygonzug*. Wählen wir die Unterteilung  $\{t_0, \dots, t_n\}$  sehr fein, so liefert der zugehörige Polygonzug eine sehr gute Approximation an die Länge, vgl. Abbildung 4.

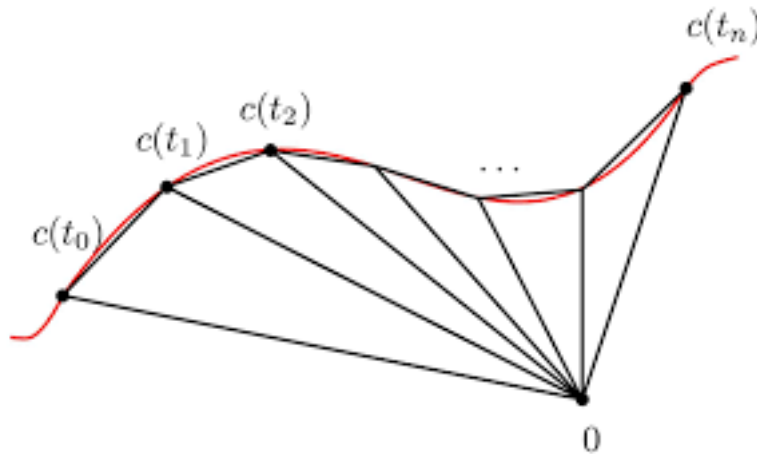


Abbildung 4: Länge der roten Kurve  $c$  wird approximiert durch den schwarzen Polygonzug

**Beispiel 129.** Betrachten wir nochmal die Kurve  $\gamma^{(r_1, r_2)} : [0, 4] \rightarrow \mathbb{C}$  aus Beispiel 127. Man rechnet leicht nach, dass

$$(\gamma^{(r_1, r_2)})'(t) = \begin{cases} r_1 & t \in (0, 1) \\ ir_2 & t \in (1, 2) \\ -r_1 & t \in (2, 3) \\ -ir_2 & t \in (3, 4) \end{cases} \quad (503)$$

Mit Gleichung (501) berechnen wir

$$L(\gamma^{(r_1, r_2)}) = \int_0^4 |(\gamma^{(r_1, r_2)})'(t)| dt = \int_0^1 r_1 dt + \int_1^2 r_2 dt + \int_2^3 r_1 dt + \int_3^4 r_2 dt = 2(r_1 + r_2). \quad (504)$$

### 3.1 Grundlagen der Integralrechnung über Kurven

Nun definieren wir das *komplexe Kurvenintegral* über eine (zumindest mal stetige) Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$

**Definition 130.** Es sei  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  stetig und  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  eine stückweise  $C^1$ -Kurve mit  $\gamma([a, b]) \subset D$ . Dann definieren wir das *komplexwertige Kurvenintegral*

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt. \quad (505)$$

Man beachte, dass es für die Definition keine Rolle spielt, wenn  $\gamma'$  an endlich vielen Punkten nicht existiert, siehe auch (501).

#### Definition 131. INTEGRALE ÜBER SPEZIELLE KURVEN

(i) *Kreiswege.* Es sei  $a \in \mathbb{C}$ ,  $r > 0$  und  $k \in \mathbb{N}$ . Dann definieren wir

$$\int_{(\partial B_r(a))^k} f(z) dz := \int_{\gamma_{r,a,k}} f(z) dz, \quad (506)$$

wobei  $\gamma_{r,a,k} : [0, 2k\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  gegeben ist durch

$$\gamma_{r,a,k}(t) := a + re^{it}, \quad (507)$$

d.h.  $\gamma_{r,a,k}$  durchläuft  $\partial B_r(a)$   $k$ -mal. Im Fall  $k = 1$  schreiben wir auch

$$\int_{\partial B_r(a)} f(z) dz := \int_{\partial B_r(a)^1} f(z) dz. \quad (508)$$

Außerdem definieren wir  $L(\partial B_r(a)) := L(\gamma_{a,r,1}) [= 2\pi r]$ .

(ii) *Rechteckswegen.* Sei  $a \in \mathbb{C}$ ,  $r_1, r_2 > 0$ . Wir definieren für  $Q_a(r_1, r_2) := \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re}(z - a) \leq r_1, 0 \leq \operatorname{Im}(z - a) \leq r_2\}$

$$\int_{\partial Q_a(r_1, r_2)} f(z) dz := \int_{c_{a,r_1,r_2}} f(z) dz, \quad (509)$$

wobei  $c_{a,r_1,r_2} : [0, 4] \rightarrow \mathbb{C}$  gegeben ist durch  $c_{a,r_1,r_2}(t) = a + \gamma^{(r_1, r_2)}(t)$ , wobei  $\gamma^{(r_1, r_2)}$  wie in Beispiel 127 ist. Falls  $a = 0$  und  $r_1 = r_2 = 1$  schreiben wir einfach

$$\int_{\partial Q} f(z) dz = \int_{\partial Q_0(1,1)} f(z) dz. \quad (510)$$

Außerdem definieren wir  $L(\partial Q_a(r_1, r_2)) := L(c_{a,r_1,r_2}) [= 2(r_1 + r_2)]$ .

Insbesondere gilt also

$$\int_{(\partial B_r(a))^k} f(z) dz = \int_0^{2k\pi} f(a + re^{it}) ire^{it} dt. \quad (511)$$

Man beachte: in beiden Fällen in Definition 131 werden die Ränder  $\partial B_r(a)$  und  $\partial Q_a(r_1, r_2)$  gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen. Wir werden später sehen: Möchte man die Kurven stattdessen mit dem Uhrzeigersinn durchlaufen, so ändert sich das Vorzeichen des Integrals.

**Beispiel 132.** Wir berechnen für  $a \in \mathbb{C}$  und  $r > 0$

$$\int_{\partial B_r(a)} \frac{1}{z - a} dz. \quad (512)$$

Dazu

$$\int_{\partial B_r(a)} \frac{1}{z - a} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{(a + re^{it}) - a} ire^{it} dt = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{re^{it}} dt = \int_0^{2\pi} i dt = 2\pi i. \quad (513)$$

Analog berechnet man

$$\int_{(\partial B_r(a))^k} \frac{1}{z - a} dz = 2k\pi i. \quad (514)$$

Die Details überlassen wir den Lesenden als Übungsaufgabe.

**VERSCHÄRFUNG.** Wir berechnen für beliebiges  $\ell \in \mathbb{Z}$

$$\int_{\partial B_r(a)} (z - a)^\ell dz = \int_0^{2\pi} (a + re^{it} - a)^\ell ire^{it} dt = \int_0^{2\pi} r^\ell e^{i\ell t} ire^{it} dt \quad (515)$$

$$= ir^{\ell+1} \int_0^{2\pi} e^{i(\ell+1)t} dt. \quad (516)$$

Falls  $\ell = -1$  wissen wir aus (513) was rauskommt. Für  $\ell \neq -1$  berechnen wir mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\int_{\partial B_r(a)} (z - a)^\ell dz = \int_0^{2\pi} (a + re^{it} - a)^\ell ire^{it} dt = \int_0^{2\pi} (re^{it})^\ell ire^{it} dt \quad (517)$$

$$= ir^{\ell+1} \int_0^{2\pi} e^{i(\ell+1)t} dt = ir^{\ell+1} \int_0^{2\pi} \frac{d}{dt} \frac{1}{i(\ell+1)} e^{i(\ell+1)t} dt \quad (518)$$

$$= ir^{\ell+1} \left[ \frac{1}{i(\ell+1)} e^{i(\ell+1)t} \right]_{t=0}^{t=2\pi} = \frac{ir^{\ell+1}}{i(\ell+1)} (e^{i(\ell+1)2\pi} - e^0) = 0, \quad (519)$$

wegen der  $2\pi$ -Periodizität von  $y \mapsto e^{iy}$ . Wir folgern

$$\int_{\partial B_r(a)} (z - a)^\ell dz = \begin{cases} 0 & \ell \neq -1 \\ 2\pi i & \ell = -1 \end{cases} =: 2\pi i \delta_{\ell, -1}, \quad (520)$$

wobei  $\delta_{k,m}$  das *Kronecker-Deltasymbol* bezeichnet. Der Fall  $\ell = -1$  nimmt also eine interessante Sonderrolle ein. Wir werden noch spannende Konsequenzen daraus diskutieren.

Als nächstes schätzen wir den Absolutbetrag eines Kurvenintegrals ab. Diese wichtige Abschätzung werden wir häufiger benutzen.

**Proposition 133.** FUNDAMENTALABSCHÄTZUNG FÜR KURVENINTEGRALE. Es sei  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  stetig und  $\gamma : [a, b] \rightarrow D$  eine stückweise  $C^1$ -Kurve. Dann gilt

$$\left| \int_{\gamma} f(z) \, dz \right| \leq \sup_{w \in \gamma([a, b])} |f(w)| L(\gamma). \quad (521)$$

**Beweis.** Es gilt mit der Dreiecksungleichung (Bemerkung 125 (iii))

$$\left| \int_{\gamma} f(z) \, dz \right| = \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) \, dt \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t)) \gamma'(t)| \, dt \quad (522)$$

$$= \int_a^b |f(\gamma(t))| |\gamma'(t)| \, dt \leq \sup_{u \in [a, b]} |f(\gamma(u))| \int_a^b |\gamma'(t)| \, dt. \quad (523)$$

Der erste Faktor ist nun  $\sup_{w \in \gamma([a, b])} |f(w)|$  und der zweite Faktor ist nach (501) gerade  $L(\gamma)$ . Es folgt die Behauptung.

**Bemerkung 134.** Seien  $f, \gamma$  wie in der vorigen Proposition. Da  $\gamma([a, b]) \subset D$  kompakt ist und  $|f|$  stetig ist, gilt stets (nach dem Satz von Weierstraß)

$$\sup_{w \in \gamma([a, b])} |f(w)| = \max_{w \in \gamma([a, b])} |f(w)| < \infty. \quad (524)$$

Somit ist die Abschätzung (521) niemals trivial.

Durchläuft man eine Kurve mit einer anderen *Geschwindigkeit*, d.h. unter *Umparametrisierung* verändert sich das Integral nicht.

**Proposition 135.** Es sei  $\tau : [c, d] \rightarrow [a, b]$  stetig, monoton wachsend und bijektiv und auf  $(c, d)$  stetig diff'bar. Ferner sei  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  stetig und  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  eine stückweise  $C^1$ -Kurve. Dann gilt

$$\int_{\gamma \circ \tau} f(z) \, dz = \int_{\gamma} f(z) \, dz. \quad (525)$$

Ist  $\tau$  wie oben, nur monoton fallend statt monoton wachsend, so gilt

$$\int_{\gamma \circ \tau} f(z) \, dz = - \int_{\gamma} f(z) \, dz. \quad (526)$$

**Beweis.** Siehe Übungsblatt 6.

**Beispiel 136.** Für eine Kurve  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  definieren wir die *rückwärts durchlaufene* Kurve  $\gamma_{rev} : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  durch  $\gamma_{rev}(t) := \gamma(b + a - t)$ . Dann gilt für alle stetigen  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\gamma([a, b]) \subset D$

$$\int_{\gamma_{rev}} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz. \quad (527)$$

Es ist hierbei übrigens nicht wichtig, ob  $\gamma_{rev}$  und  $\gamma$  mit derselben Geschwindigkeit durchlaufen werden, d.h. theoretisch könnte man auch Umparametrisierungen von  $\gamma_{rev}$  zulassen.

**Definition 137.** KONKATENATION VON KURVEN. Es seien  $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  und  $\gamma_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$  zwei stetige Kurven. Dann definieren wir die *Konkatenation*  $\gamma_1 \oplus \gamma_2 : [a, b + d - c] \rightarrow \mathbb{C}$  durch

$$(\gamma_1 \oplus \gamma_2)(t) := \begin{cases} \gamma_1(t) & t \in [a, b] \\ \gamma_2(t - b + c) & t \in [b, b + d - c] \end{cases}. \quad (528)$$

Ferner definieren wir für 3 Kurven  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  die Kurve  $\gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \gamma_3 := \gamma_1 \oplus (\gamma_2 \oplus \gamma_3)$ . Induktiv definiert man so auch  $\gamma_1 \oplus \dots \oplus \gamma_m$ .

**Bemerkung 138.** Es seien nun  $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  und  $\gamma_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$  zwei stückweise  $C^1$ -Kurven mit  $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$ . Man überzeugt sich leicht mithilfe von Proposition 135 davon, dass  $(\gamma_1 \oplus \gamma_2)$  stückweise  $C^1$  ist und

$$\int_{\gamma_1 \oplus \gamma_2} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz, \quad (529)$$

**Proposition 139.** Es sei  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph mit stetiger Ableitung  $f' : D \rightarrow \mathbb{C}$  und  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  eine stückweise  $C^1$ -Kurve. Dann gilt

$$\int_{\gamma} f'(z) dz = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)). \quad (530)$$

Insbesondere: Ist  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  geschlossen, so gilt

$$\int_{\gamma} f'(z) dz = 0. \quad (531)$$

**Beweis.** Es sei  $a = a_0 < a_1 < \dots < a_m = b$  eine Unterteilung derart, dass  $\gamma|_{[a_{j-1}, a_j]}$  auf  $[a_{j-1}, a_j]$  eine  $C^1$ -Kurve ist (für alle  $j = 1, \dots, m$ ). Dann gilt

$$\int_{\gamma} f'(z) dz = \int_a^b f'(\gamma(t))\gamma'(t) dt = \sum_{j=1}^m \int_{a_{j-1}}^{a_j} f'(\gamma(t))\gamma'(t) dt. \quad (532)$$

Wir beachten, dass nach der Kettenregel gilt  $\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t)$ . Somit ist  $(f \circ \gamma)$  auf  $(a_{j-1}, a_j)$  stetig differenzierbar und es folgt mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (Bemerkung 125 (iv))

$$\int_{a_{j-1}}^{a_j} f'(\gamma(t))\gamma'(t) dt = \int_{a_{j-1}}^{a_j} (f \circ \gamma)'(t) dt = (f \circ \gamma)(a_j) - (f \circ \gamma)(a_{j-1}). \quad (533)$$

Zusammen mit (532) schließen wir

$$\int_{\gamma} f'(z) dz = \sum_{j=1}^m [(f \circ \gamma)(a_j) - (f \circ \gamma)(a_{j-1})] = \quad (534)$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Teleskopsumme}} (f \circ \gamma)(a_m) - (f \circ \gamma)(a_0) = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)). \quad (535)$$

Die Behauptung folgt (denn (531) ist eine direkte Folgerung aus der obigen Formel im Spezialfall  $\gamma(b) = \gamma(a)$ ).

**Beispiel 140.** Wir berechnen für die geschlossene Kurve  $\gamma = \gamma^{(1,1)}$  wie in Beispiel 127

$$\int_{\partial Q} z^{17} dz = \int_{\gamma} z^{17} dz. \quad (536)$$

Da für  $f(z) = \frac{1}{18}z^{18}$  gilt  $f'(z) = z^{17}$  und  $\gamma$  geschlossen ist, erhalten wir

$$\int_{\gamma} z^{17} dz = \int_{\gamma} f'(z) dz = 0. \quad (537)$$

**VERSCHÄRFUNG.** Man berechne für  $\gamma$  wie oben

$$\int_{\gamma} z^{17} e^{z^2} dz. \quad (538)$$

Finden wir nun eine Funktion  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $f'(z) = z^{17} e^{z^2}$ ? Ja, und das ist gar nicht so schwer! Wir schreiben  $e^{z^2}$  als Potenzreihe

$$e^{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{2n} \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad (539)$$



Wir folgern, dass für alle  $z \in \mathbb{C}$  gilt

$$z^{17} e^{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{2n+17}. \quad (540)$$

Definiere nun die Potenzreihe

$$P(z) := \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!(2n+18)} z^{2n+18}. \quad (541)$$

Man überzeugt sich leicht, dass  $P$  Konvergenzradius unendlich hat und die Wertefunktion  $f_P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  erfüllt

$$f'_P(z) = \partial_z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(2n+18)} z^{2n+18} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{2n+17} = z^{17} e^{z^2}. \quad (542)$$

Somit gilt

$$\int_{\gamma} z^{17} e^{z^2} dz = \int_{\gamma} f'_P(z) dz = 0. \quad (543)$$

Das Prinzip aus Beispiel 140 gibt uns eine wichtige Folgerung.

**Korollar 141.** Es habe für  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  die Potenzreihe

$$P(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_1)^n \quad (544)$$

mit Konvergenzradius  $R = R_P$  gegeben. Sei ferner  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  eine geschlossene stückweise  $C^1$ -Kurve mit  $\gamma([a, b]) \subset B_R(z_1)$ . Dann gilt

$$\int_{\gamma} f_P(z) dz = 0. \quad (545)$$

Insbesondere gilt

$$\int_{\gamma} p(z) dz = 0 \quad (546)$$

für jedes  $\mathbb{C}$ -Polynom  $p$ .

**Beweis.** Es gilt auf  $B_R(z_1)$  stets  $f_P = f'_{\tilde{P}}$ , wobei

$$\tilde{P}(z) := \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n+1} (z - z_1)^{n+1} \quad (547)$$

(d.h. insbesondere eine Potenzreihe mit demselben Konvergenzradius wie  $P$ ) ist. Somit

gilt

$$\int_{\gamma} f_P(z) dz = \int_{\gamma} f'_P(z) dz \stackrel{\text{Proposition 139}}{=} 0. \quad (548)$$

Hierbei haben wir benutzt, dass  $f_P$  als Wertefunktion einer Potenzreihe holomorph ist.

Zum Abschluss möchten wir noch eine Art *Substitutionsformel* für Kurvenintegrale festhalten.

**Proposition 142. SUBSTITUTIONSFORMEL FÜR KURVENINTEGRALE.** Sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  eine stückweise  $C^1$  Kurve. Es sei  $U \subset \mathbb{C}$  offen und  $g \in \mathcal{H}(U)$  so, dass  $g' : U \rightarrow \mathbb{C}$  stetig ist. Sei nun  $D \supset g(U)$  offen. Dann gilt für  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  stetig

$$\int_{g \circ \gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} f(g(z))g'(z) dz, \quad (549)$$

**Beweis.** Es seien  $g, \gamma$  wie in der Aussage. Dann gilt

$$\int_{g \circ \gamma} f(z) dz = \int_a^b f((g \circ \gamma)(t))(g \circ \gamma)'(t) dt \stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \int_a^b f(g(\gamma(t)))g'(\gamma(t))\gamma'(t) dt. \quad (550)$$

Man beachte nun, dass nach der Definition der komplexen Kurvenintegrals gilt

$$\int_{\gamma} f(g(z))g'(z) dz = \int_a^b f(g(\gamma(t)))g'(\gamma(t))\gamma'(t) dt. \quad (551)$$

(Man beachte: Hier geht die Stetigkeit von  $g'$  ein, denn für die Definition des Kurvenintegrals benötigt man eine stetige Funktion. Integrierbarkeit reicht hier nicht) Die Behauptung folgt aus (550) und (551).

### 3.2 Der Cauchy'sche Integralsatz

Ein zentrales Ergebnis dieser Vorlesung ist der *Cauchy'sche Integralsatz* und als Konsequenz die sogenannte *Cauchy'sche Integralformel*. Diese wollen wir nun beweisen.

Ein erster Schritt dazu ist das *Lemma von Goursat*, aus genannt auch der *Cauchy'sche Integralsatz für Rechteckswegen*.

Hierzu benötigen wir zunächst ein vorbereitendes Lemma, das sogenannte *Schachtelungslemma*.

**Proposition 143. SCHACHTELUNGSLEMMA.** Es sei  $(K_j)_{j \in \mathbb{N}}$  eine Folge kompakter Mengen in einem metrischen Raum  $(X, d)$  die *absteigend geschachtelt* sind, d.h.

$$K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset K_4 \supset \dots \quad (552)$$

Dann gilt

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} K_j \neq \emptyset. \quad (553)$$

**Beweis.** Wähle eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$  so, dass  $a_1 \in K_1$  (ein beliebiges Element),  $a_2 \in K_2$  (beliebig),  $a_3 \in K_3$  (beliebig), usw. Da  $K_1$  kompakt ist und  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset K_1$ , hat  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine konvergente Teilfolge  $(a_{l_n})_{n \in \mathbb{N}}$ . Hierbei ist  $(l_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$  eine Folge natürlicher Zahlen mit  $l_{n+1} > l_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Nennen wir den Grenzwert dieser Teilfolge  $a$ .

**BEHAUPTUNG.**  $a \in \bigcap_{j=1}^{\infty} K_j$ . Dazu: Angenommen es gäbe ein  $j_0 \in \mathbb{N}$  mit  $a \notin K_{j_0}$ . Nun gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $l_{n_0} > j_0$ . Für alle  $n \geq n_0$  gilt dann

$$a_{l_n} \in K_{l_n} \subset K_{l_{n_0}} \subset K_{j_0}. \quad (554)$$

Somit ist also  $(a_{l_n})_{n \geq n_0}$  eine Folge in  $K_{j_0}$ . Da aber  $K_{j_0}$  als kompakte Menge aber auch abgeschlossen ist, muss der Grenzwert  $a$  auch in  $K_{j_0}$  liegen. Ein Widerspruch!

**Lemma 144.** LEMMA VON GOURSAT. Es sei  $f \in \mathcal{H}(D)$  und  $a \in \mathbb{C}, r_1, r_2 > 0$  so, dass  $Q_a(r_1, r_2) := \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re}(z - a) \leq r_1, 0 \leq \operatorname{Im}(z - a) \leq r_2\} \subset D$ . Dann ist

$$\int_{\partial Q_a(r_1, r_2)} f(z) dz = 0. \quad (555)$$

**Beweis.** OBdA gilt  $a = 0$ , sonst betrachte  $\tilde{f}(z) := f(z + a)$ . Wir werden folgenden Algorithmus benutzen.

ALGORITHMUS ZUM BEWEIS.

**Input.** Ein Rechteck  $Q \subset Q_0(r_1, r_2)$

**Output.** Ein Rechteck  $Q' \subset Q$  derart, dass die Seitenlängen von  $Q'$  die Hälften der Seitenlängen von  $Q$  beträgt und

$$\left| \int_{\partial Q} f(z) dz \right| \leq 4 \left| \int_{\partial Q'} f(z) dz \right|. \quad (556)$$

**Durchführung.** Es sei  $Q = Q_{z_0}(s_1, s_2)$ . Wir unterteilen  $Q$  nun in vier gleichgroße Teile. Dazu:  $Q$  ist die Vereinigung aus

$$Q_1 := Q_{z_0}\left(\frac{s_1}{2}, \frac{s_2}{2}\right), \quad Q_2 := Q_{z_0+s_1/2}\left(\frac{s_1}{2}, \frac{s_2}{2}\right), \quad (557)$$

$$Q_3 := Q_{z_0+is_2/2}\left(\frac{s_1}{2}, \frac{s_2}{2}\right), \quad Q_4 := Q_{z_0+s_1/2+is_2/2}\left(\frac{s_1}{2}, \frac{s_2}{2}\right) \quad (558)$$

Seien ferner  $c_1, c_2, c_3, c_4 : [0, 4] \rightarrow \mathbb{C}$  Kurven, die  $\partial Q_1, \dots, \partial Q_4$  durchlaufen (vgl. Definition 131). Dies sieht dann ungefähr so aus wie in Abbildung 5. Unsere Behauptung ist

$$\int_{\partial Q} f(z) dz = \int_{\partial Q_1} f(z) dz + \int_{\partial Q_2} f(z) dz + \int_{\partial Q_3} f(z) dz + \int_{\partial Q_4} f(z) dz. \quad (559)$$

Dazu betrachte die Kurven  $c_1, c_2, c_3, c_4$ : An Abbildung 5 sieht man, dass sich die Wege im Inneren des ursprünglichen Rechtecks  $Q$  wegheben (denn sie werden zweimal in entgegengesetzter Richtung durchlaufen, vgl. Beispiel 136). Wir folgern, dass nur die Wege auf  $\partial Q$  übrig bleiben und somit (559) (vgl. 138). Wähle nun ein  $\ell \in \{1, \dots, 4\}$  so, dass

$$\left| \int_{\partial Q_\ell} f(z) dz \right| = \max \left\{ \left| \int_{\partial Q_1} f(z) dz \right|, \left| \int_{\partial Q_2} f(z) dz \right|, \left| \int_{\partial Q_3} f(z) dz \right|, \left| \int_{\partial Q_4} f(z) dz \right| \right\} \quad (560)$$

Definiere nun  $Q' := Q_\ell$ . Beachte

$$\left| \int_{\partial Q} f(z) dz \right| \stackrel{(559)}{=} \left| \sum_{j=1}^4 \int_{\partial Q_j} f(z) dz \right| \leq \sum_{j=1}^4 \left| \int_{\partial Q_j} f(z) dz \right| \stackrel{(560)}{\leq} \sum_{j=1}^4 \left| \int_{\partial Q_\ell} f(z) dz \right| \quad (561)$$

$$= 4 \left| \int_{\partial Q_\ell} f(z) dz \right| = 4 \left| \int_{\partial Q'} f(z) dz \right|. \quad (562)$$

ALGORITHMUS ENDE.

NUN ZUM BEWEIS. Es sei  $\varepsilon > 0$  beliebig vorgegeben. Sei  $K_1 := Q_0(r_1, r_2)$ . Führe nun den Algorithmus mit Input  $Q := K_1$  durch und erhalte ein Teilrechteck  $Q' \subset K_1$ . Dieses nennen wir  $K_2$ . Führe nun den Algorithmus mit Input  $Q := K_2$  durch und erhalte ein Teilquadrat  $Q' =: K_3$ . Sukzessive erhalten wir eine Folge ineinander geschachtelter Quadrate  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , d.h.  $K_1 \supset K_2 \supset \dots$ . Die Seitenlängen von  $K_j$  sind  $\frac{r_1}{2^{j-1}}$  und  $\frac{r_2}{2^{j-1}}$ , da sich die Seitenlänge in jedem Schritt halbiert. Beachte: Aufgrund der Tatsache, dass  $K_{n+1}$  die halben Seitenlängen von  $K_n$  hat, gilt  $L(\partial K_{n+1}) = \frac{1}{2}L(\partial K_n)$  und somit  $L(\partial K_{n+1}) = \frac{1}{2}L(\partial K_n) = \frac{1}{2^2}L(\partial K_{n-1}) = \dots = \frac{1}{2^n}L(\partial K_1)$ . Ferner gilt auch

$$\left| \int_{\partial K_n} f(z) dz \right| \leq 4 \left| \int_{\partial K_{n+1}} f(z) dz \right| \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (563)$$

Iteriert man diese Abschätzung, so erhält man

$$\left| \int_{\partial K_1} f(z) dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\partial K_{n+1}} f(z) dz \right|. \quad (564)$$

Nach Propostion 143 gibt es nun ein  $w \in \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ . Wähle nun ein  $\delta > 0$  so, dass  $B_\delta(w) \subset D$  und

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{z - w} - f'(w) \right| < \varepsilon \quad \forall z \in B_\delta(w). \quad (565)$$

Definiert man nun  $q(z) := f(z) - f(w) - f'(w)(z - w)$ , so gilt also

$$|q(z)| = |f(z) - f(w) - f'(w)(z - w)| < \varepsilon |z - w| \quad \forall z \in B_\delta(w). \quad (566)$$

Sei nun  $n_0 \in \mathbb{N}$  so, dass  $2\sqrt{r_1^2 + r_2^2} \frac{1}{2^{n_0-1}} < \delta$ . Wir behaupten, dass dann gilt  $K_{n_0} \subset B_\delta(w)$ .

Dazu: Sei etwa  $K_{n_0} = Q_a\left(\frac{r_1}{2^{n_0-1}}, \frac{r_2}{2^{n_0-1}}\right)$  für  $a \in \mathbb{C}$ . Dann gilt für alle  $z \in K_{n_0}$

$$\begin{aligned} |z - w| &\leq |z - a| + |w - a| \leq \sqrt{\operatorname{Re}(z - a)^2 + \operatorname{Im}(z - a)^2} + \sqrt{\operatorname{Re}(w - a)^2 + \operatorname{Im}(w - a)^2} \\ &\stackrel{z, w \in K_{n_0}}{\leq} \sqrt{\left(\frac{r_1}{2^{n_0-1}}\right)^2 + \left(\frac{r_2}{2^{n_0-1}}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{r_1}{2^{n_0-1}}\right)^2 + \left(\frac{r_2}{2^{n_0-1}}\right)^2} = 2\sqrt{r_1^2 + r_2^2} \frac{1}{2^{n_0-1}} < \delta. \end{aligned} \quad (567)$$

Hierbei haben wir maßgeblich benutzt, dass (nach der Definition von  $w$ ) gilt, dass  $w \in K_{n_0}$ . Beachte: Es folgt auch  $K_n \subset B_\delta(w)$  für alle  $n \geq n_0$ . Nun hat man für alle  $n \geq n_0$  (mit  $q$  definiert wie oben)

$$\left| \int_{\partial K_1} f(z) \, dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\partial K_{n+1}} f(z) \, dz \right| = 4^n \left| \int_{\partial K_{n+1}} (f(w) + f'(w)(z - w) + q(z)) \, dz \right| \quad (568)$$

$$= 4^n \left| \int_{\partial K_{n+1}} f(w) + f'(w)(z - w) \, dz + \int_{\partial K_{n+1}} q(z) \, dz \right| \quad (569)$$

Man beachte, dass wegen Korollar 141

$$\int_{\partial K_{n+1}} f(w) + f'(w)(z - w) \, dz = 0 \quad (570)$$

(denn  $p(z) = f(w) + f'(w)(z - w)$  ist ein Polynom). Wir folgern

$$\left| \int_{\partial K_1} f(z) \, dz \right| \stackrel{(569)}{\leq} 4^n \left| \int_{\partial K_{n+1}} q(z) \, dz \right| \stackrel{\text{Prop 133}}{\leq} 4^n \sup_{z \in \partial K_{n+1}} |q(z)| L(\partial K_{n+1}) \quad (571)$$

$$\stackrel{(566)}{\leq} 4^n \sup_{z \in \partial K_{n+1}} (\varepsilon |z - w|) L(\partial K_{n+1}). \quad (572)$$

Genau wie in (567) berechnen wir, dass für  $z, w \in K_{n+1}$  gilt, dass  $|z - w| \leq 2\sqrt{r_1^2 + r_2^2} \frac{1}{2^n}$ . Wir erhalten

$$\left| \int_{\partial Q_0(r_1, r_2)} f(z) \, dz \right| = \left| \int_{\partial K_1} f(z) \, dz \right| \leq \frac{4^n \cdot 2 \cdot \sqrt{r_1^2 + r_2^2} \varepsilon}{2^n} L(\partial K_{n+1}) \quad (573)$$

$$= \frac{4^n \cdot 2 \cdot \sqrt{r_1^2 + r_2^2} \varepsilon}{2^n} \frac{1}{2^n} L(K_1) = 2\sqrt{r_1^2 + r_2^2} L(K_1) \varepsilon. \quad (574)$$

Da  $\varepsilon > 0$  beliebig klein gewählt werden kann, folgt die Behauptung.

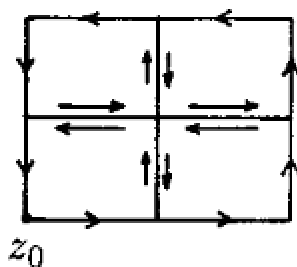


Abbildung 5: Bild zum Algorithmus im vorigen Beweis.

Was für Rechtecke gilt, gilt nun auch für *analytische Bilder* von Rechtecken

**Proposition 145.** Es sei  $Q = Q_a(r_1, r_2)$  ein Rechteck und  $U \supset Q$  eine offene Obermenge. Ferner sei  $g \in \mathcal{H}(U)$  so, dass  $g' \in \mathcal{H}(U)$ . Sei nun  $D \supset g(U)$  offen. Wir definieren für  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  stetig

$$\int_{g(\partial Q)} f(z) dz := \int_{g \circ \gamma} f(z) dz, \quad (575)$$

wobei  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  eine Kurve wie in Definition 131 ist, die  $\partial Q$  umläuft. Ist  $f \in \mathcal{H}(D)$  so gilt

$$\int_{g(\partial Q)} f(z) dz = 0. \quad (576)$$

**Beweis.** Seien  $g, \gamma$  wie in der Aussage. Nach der Substitutionsformel (Proposition 142) gilt

$$\int_{g(\partial Q)} f(z) dz = \int_{g \circ \gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} f(g(z))g'(z) dz = \int_{\partial Q} f(g(z))g'(z) dz. \quad (577)$$

Nun sind nach der Voraussetzung und der Kettenregel  $f \circ g$  und  $g'$  holomorph. Somit ist nach der Produktregel  $z \mapsto (f \circ g)g'$  holomorph auf  $U$ . Wir folgern (weil  $\partial Q \subset U$ ) aus dem Lemma von Goursat (Lemma 144)

$$\int_{g(\partial Q)} f(z) dz = \int_{\partial Q} f(g(z))g'(z) dz = 0. \quad (578)$$

Ein wichtiges Korollar ist, dass das Integral über *konzentrische Kreiswege* unabhängig vom Radius ist.

**Korollar 146.** Es sei  $a \in \mathbb{C}$  und  $f \in \mathcal{H}(D)$  für eine offene Menge  $D \supset \overline{B_{r_1}(a)} \setminus B_{r_2}(a)$

(für  $r_1, r_2 > 0, r_1 > r_2$ ). Dann gilt

$$\int_{\partial B_{r_1}(a)} f(z) dz = \int_{\partial B_{r_2}(a)} f(z) dz. \quad (579)$$

**Beweis.** OBdA  $a = 0$ . Definiere  $Q := Q_{\log(r_1)}(\log r_2 - \log r_1, 2\pi)$  Das bedeutet

$$x + iy \in Q \Leftrightarrow x - \log(r_1) \in [0, \log(r_2) - \log(r_1)] \quad \text{und} \quad y \in [0, 2\pi]. \quad (580)$$

Mit anderen Worten  $x \in [\log(r_1), \log(r_2)]$  und  $y \in [0, 2\pi]$ . Der Rand  $\partial Q$  wird nun durchlaufen von

$$\gamma(t) := \begin{cases} \log(r_1) + t(\log(r_2) - \log(r_1)) & t \in [0, 1) \\ \log(r_2) + 2\pi i(t - 1) & t \in [1, 2) \\ \log(r_2) + (t - 2)(\log(r_1) - \log(r_2)) + 2\pi i & t \in [2, 3) \\ \log(r_1) + 2\pi i(4 - t) & t \in [3, 4) \end{cases} \quad (581)$$

Definiere nun  $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  durch  $g(z) = \exp(z)$ . Dann gilt  $g, g' \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$  und

$$g(\gamma(t)) = \begin{cases} e^{\log(r_1) + t(\log(r_2) - \log(r_1))} & t \in [0, 1) \\ e^{\log(r_2) + 2\pi i(t - 1)} & t \in [1, 2) \\ e^{\log(r_2) + (t - 2)(\log(r_1) - \log(r_2)) + 2\pi i} & t \in [2, 3) \\ e^{\log(r_1) + 2\pi i(4 - t)} & t \in [3, 4) \end{cases} \quad (582)$$

$$\begin{aligned} & \underbrace{\quad\quad\quad}_{\text{exp-Gesetze \& } e^{2\pi i} = 1} \begin{cases} e^{\log(r_1) + t(\log(r_2) - \log(r_1))} & t \in [0, 1) \\ r_2 e^{2\pi i(t - 1)} & t \in [1, 2) \\ e^{\log(r_2) + (t - 2)(\log(r_1) - \log(r_2))} & t \in [2, 3) \\ r_1 e^{2\pi i(4 - t)} & t \in [3, 4) \end{cases}. \quad (583) \end{aligned}$$

Die Kurve im ersten und dritten Fall durchläuft (in jeweils entgegengesetzter Richtung) die Strecke zwischen  $\bar{r}_1 \bar{r}_2$ . Dadurch können die Beiträge des ersten und dritten Integrals vernachlässigt werden, weil sie sich gegenseitig wegheben, vgl. Beispiel 136. Die Kurve im zweiten Fall durchläuft einen Kreis  $\partial B_{r_2}(0)$ , d.h. den Kreis mit Radius  $r_2$ , vgl. (507). Die Kurve im vierten Fall durchläuft  $\partial B_{r_1}(0)$  — aber nicht gegen den Uhrzeigersinn, sondern mit dem Uhrzeigersinn. Das ändert das Vorzeichen des Integrals, vgl. Beispiel 136. Wir nennen ab sofort  $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  die Kurve aus dem ersten Fall,  $\gamma_2 : [1, 2] \rightarrow \mathbb{C}$  die Kurve

aus dem zweiten Fall, usw... Wir folgern

$$0 \stackrel{\text{Proposition 145}}{=} \int_{g(\partial Q)} f(z) dz = \int_{\gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \gamma_3 \oplus \gamma_4} f(z) dz \quad (584)$$

$$\stackrel{\text{Bemerkung 138}}{=} \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz + \int_{\gamma_3} f(z) dz + \int_{\gamma_4} f(z) dz \quad (585)$$

$$\stackrel{\gamma_3 \hat{=} (\gamma_1)_{rev}}{=} \int_{\gamma_2} f(z) dz + \int_{\gamma_4} f(z) dz = \int_{\partial B_{r_2}(0)} f(z) dz - \int_{\partial B_{r_1}(0)} f(z) dz. \quad (586)$$

Somit gilt die Behauptung.

Ein wichtiges Korollar ist der *Cauchy'sche Integralsatz (für Kreiswege)*.

**Korollar 147. CAUCHY-INTEGRALSATZ (FÜR KREISWEGE).** Es sei  $a \in \mathbb{C}$  und  $r_1 > 0$ . Es sei  $D \supset \overline{B_{r_1}(a)}$  offen und  $f \in \mathcal{H}(D)$ . Dann gilt

$$\int_{\partial B_{r_1}(a)} f(z) dz = 0. \quad (587)$$

**Beweis.** Da  $f$  auf  $D$  holomorph (und somit auch stetig) ist gibt es ein  $M > 0$  mit

$$\sup_{z \in \overline{B_{r_1}(a)}} |f(z)| = M < \infty. \quad (588)$$

Wir wissen aus dem vorigen Korollar, dass für alle  $r_2 \in (0, r_1)$  gilt, dass

$$\int_{\partial B_{r_1}(a)} f(z) dz = \int_{\partial B_{r_2}(a)} f(z) dz. \quad (589)$$

Wir schätzen mit der Fundamentalabschätzung ab

$$\left| \int_{\partial B_{r_2}(a)} f(z) dz \right| \leq \sup_{w \in \partial B_{r_2}(a)} |f(w)| L(\partial B_{r_2}(a)) \leq M(2\pi r_2) \quad \forall r_2 \in (0, r_1). \quad (590)$$

Wir folgern

$$\lim_{r_2 \rightarrow 0} \int_{\partial B_{r_2}(a)} f(z) dz = 0. \quad (591)$$

Nun können wir beide Seiten von (589) im Grenzwert  $r_2 \rightarrow 0$  betrachten. Es folgt

$$\int_{\partial B_{r_1}(a)} f(z) dz = 0, \quad (592)$$

was zu zeigen war.



**Bemerkung 148.** In Korollar 147 ist gefordert, dass der Integrand  $f$  auf einer offenen Obermenge des ganzen Balles  $\overline{B_{r_1}(a)}$  holomorph sein muss. Das scheint zunächst übertrieben, weil für die Bildung des Integrals  $\int_{\partial B_{r_1}(a)} f(z) dz$  ja nur Werte von  $f$  auf  $\partial B_{r_1}(a)$  benötigt werden. Und doch ist die Voraussetzung wichtig: So ist zum Beispiel  $f(z) = \frac{1}{z-a}$  nicht holomorph auf  $B_{r_1}(a)$  (aber schon auf  $B_{r_1}(a) \setminus \{a\}$ ). Wir haben aber in Beispiel 132 schon ausgerechnet, dass

$$\int_{\partial B_{r_1}(a)} \frac{1}{z-a} dz = 2\pi i \neq 0. \quad (593)$$

Somit haben wir gesehen, dass die Voraussetzungen in Korollar 147 wichtig sind.

Wir wollen nun Korollar 146 auch für *nicht-konzentrische* Kreiswege nachweisen, d.h. für Kreise mit verschiedenen Mittelpunkten, nachweisen.

Hierfür benötigen wir zunächst ein Lemma über eine spezielle Möbiustransformation

**Lemma 149.** Es sei  $w \in B_1(0)$ . Betrachte die Möbiustransformation  $T(z) := \frac{z-w}{1-z\bar{w}}$ . Dann gilt

- (i) Es gibt ein  $\alpha > 1$  mit  $T \in \mathcal{H}(B_\alpha(0))$  und  $T : B_\alpha(0) \rightarrow T(B_\alpha(0))$  ist biholomorph mit stetiger Ableitung  $T'$ .
- (ii)  $T(B_1(0)) = B_1(0)$ .
- (iii)  $T(\partial B_1(0)) = \partial B_1(0)$ .
- (iv) Es gibt ein  $\delta > 0$  mit  $T(B_\alpha(0)) \supset B_{1+\delta}(0)$
- (v) Für alle  $\varepsilon \in (0, 1 - |w|)$  gilt  $T(\overline{B_\varepsilon(w)}) \subset \overline{B_{\frac{\varepsilon}{1-|w|}}(0)}$ .
- (vi) Für alle  $\varepsilon \in (0, 1 - |w|)$  gibt es ein  $\rho(\varepsilon) \in (0, \frac{\varepsilon}{1-|w|})$  und ein  $\xi_\varepsilon \in \mathbb{C}$  mit  $|\xi_\varepsilon| \leq \frac{\varepsilon}{1-|w|}$  und  $T(\partial B_\varepsilon(w)) = \partial B_{\rho(\varepsilon)}(\xi_\varepsilon)$ .
- (vii)  $T(B_\varepsilon(w)) = B_{\rho(\varepsilon)}(\xi_\varepsilon)$  und  $T(B_1(0) \setminus \overline{B_\varepsilon(w)}) = B_1(0) \setminus B_{\rho(\varepsilon)}(\xi_\varepsilon)$ .
- (viii)  $T$  ist auf  $\overline{B_1(0)}$  *orientierungserhaltend*, d.h. für jede Kurve  $\gamma$ , die einen Kreis  $C \subset \overline{B_1(0)}$  gegen den Uhrzeigersinn durchläuft, durchläuft auch  $T \circ \gamma$  den Kreis  $T(C)$  gegen den Uhrzeigersinn. Dasselbe gilt auch für  $T^{-1}$ .

**Beweis.** Fixiere  $w \in B_1(0)$  wie in der Aussage. Zu (i).  $T$  ist holomorph überall wo der Nenner  $z \mapsto 1 - z\bar{w}$  nicht verschwindet. Man erhält  $1 - z\bar{w} = 0 \Leftrightarrow z = \frac{1}{\bar{w}}$ . Definiert man nun  $\alpha := \left| \frac{1}{\bar{w}} \right| = \frac{1}{|w|} = \frac{1}{|w|} > 1$ , so erhält man dass  $T$  auf  $B_\alpha(0)$  holomorph sein muss. Zur Biholomorphie. Dass  $T : B_\alpha(0) \rightarrow T(B_\alpha(0))$  bijektiv ist folgt aus der Theorie der Möbiustransformationen (vgl. Proposition 86). Zur Holomorphie der Umkehrfunktion zeigen wir, dass  $T$  auf  $B_\alpha(0)$  eine stetige Ableitung besitzt und  $T'(\zeta) \neq 0$  für alle  $\zeta \in B_\alpha(0)$ .

Proposition 123 impliziert dann, dass  $T(B_\alpha(0))$  offen ist und  $T$  auf  $B_\alpha(0)$  biholomorph ist. Dazu berechnen wir

$$T'(z) = \frac{1}{1 - z\bar{w}} - \frac{z - w}{(1 - z\bar{w})^2}(-\bar{w}) = \frac{1 - z\bar{w} + (z\bar{w} - w\bar{w})}{(1 - z\bar{w})^2} = \frac{1 - |w|^2}{(1 - z\bar{w})^2}. \quad (594)$$

Es folgt, dass  $T'$  stetig und ungleich Null ist für alle  $z \in B_\alpha(0)$ .

Zu (ii) und (iii). Wir berechnen zuerst für  $z, w \in \mathbb{C}$

$$|z - w|^2 - |z\bar{w} - 1|^2 = |z|^2 - 2\langle z, w \rangle + |w|^2 - (|z\bar{w}|^2 - 2\langle z\bar{w}, 1 \rangle + 1^2) \quad (595)$$

$$= |z|^2 - 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2 - (|z||w|^2 - 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + 1) \quad (596)$$

$$= |z|^2 + |w|^2 - |z|^2|w|^2 - 1 = -(1 - |z|^2)(1 - |w|^2). \quad (597)$$

Teilen wir durch  $z\bar{w} - 1$  so erhalten wir

$$\left| \frac{z - w}{1 - z\bar{w}} \right|^2 - 1 = -\frac{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)}{|1 - z\bar{w}|^2}, \quad (598)$$

d.h.

$$|T(z)|^2 = 1 - \frac{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)}{|1 - z\bar{w}|^2}. \quad (599)$$

Somit gilt für  $z \in B_\alpha(0)$

$$|z| < 1 \iff 1 - \frac{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)}{|1 - z\bar{w}|^2} < 1 \stackrel{(599)}{\iff} |T(z)|^2 < 1. \quad (600)$$

Nun ist die obige Aussage eine Kette von Äquivalenzen. Aus dieser können wir zunächst, wenn wir nur “ $\Rightarrow$ ” betrachten folgern, dass  $T(B_1(0)) \subset B_1(0)$ . Betrachten wir die Kontraposition von “ $\Leftarrow$ ”, (d.h.  $|z| \geq 1 \Rightarrow |T(z)|^2 \geq 1$ ) so folgern wir  $T(B_1(0)^C) \subset B_1(0)^C$ . Bilden wir Komplemente (und drehen dadurch die Teilmengenrelation um) so ergibt sich  $B_1(0) \subset T(B_1(0)^C)^C = T(B_1(0))$ . Nun haben wir beide für (ii) notwendigen Teilmengenrelationen bewiesen. Für (iii) betrachten wir zunächst die Äquivalenzkette

$$|z| = 1 \iff 1 - \frac{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)}{|1 - z\bar{w}|^2} = 1 \stackrel{(599)}{\iff} |T(z)|^2 = 1. \quad (601)$$

und folgern analog wie oben (iii) aus dieser Äquivalenzaussage.

Zu (iv). Wir wissen aus (i), dass  $T(B_\alpha(0)) = (T^{-1})^{-1}(B_\alpha(0))$  als Urbild einer offenen Menge unter einer stetigen Funktion wieder offen ist. (ii) und (iii) implizieren außerdem, dass  $\overline{B_1(0)} = T(\overline{B_1(0)}) \subset T(B_\alpha(0))$ . Wir definieren nun die offenen Mengen  $U_n \subset T(B_\alpha(0))$  durch

$$U_n := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{dist}(z, T(B_\alpha(0)^C)) > \frac{1}{n}\}. \quad (602)$$

Wegen der Offenheit von  $T(B_\alpha(0))$  gilt  $T(B_\alpha(0)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$  und somit auch  $\overline{B_1(0)} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ . Wegen der Kompaktheit von  $\overline{B_1(0)}$  muss es eine endliche Teilüberdeckung geben,

d.h. wir finden ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit

$$\overline{B_1(0)} = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = \bigcup_{n=1}^{n_0} U_n = U_{n_0} \quad (603)$$

somit gilt  $\text{dist}(z, T(B_\alpha(0))^C) > \frac{1}{n_0}$  für alle  $z \in \overline{B_1(0)}$ . Wähle nun  $\delta := \frac{1}{n_0}$ . Sei  $z \in B_{1+\delta}(0)$  beliebig. Dann gilt stets  $\frac{z}{1+\delta} \in B_1(0)$ . Wir folgern (aus der Tatsache, dass  $\text{dist}$  stets Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante 1 ist)

$$\text{dist}(z, T(B_\alpha(0))^C) \geq \text{dist}\left(\frac{z}{1+\delta}, T(B_\alpha(0))^C\right) - \left|z - \frac{z}{1+\delta}\right| \quad (604)$$

$$\geq \frac{1}{n_0} - |z| \left(1 - \frac{1}{1+\delta}\right) = \frac{1}{n_0} - \frac{\delta}{1+\delta} |z| > \frac{1}{n_0} - \frac{\delta}{1+\delta} (1 + \delta) = \frac{1}{n_0} - \delta = 0. \quad (605)$$

Somit gilt  $z \notin T(B_\alpha(0))^C$ , d.h.  $z \in \overline{T(B_\alpha(0))}$ .

Zu (v). Sei  $\varepsilon \in (0, 1 - |w|)$ . Sei  $z \in \overline{B_\varepsilon(w)}$ , d.h.  $|z - w| \leq \varepsilon$ . Dann gilt

$$|z| \leq |z - w| + |w| \leq \varepsilon + |w| < 1 - |w| + |w| = 1. \quad (606)$$

Somit gilt  $z \in B_1(0)$ . Wir berechnen

$$|T(z)| = \frac{|z - w|}{|1 - z\bar{w}|} \leq \frac{\varepsilon}{|1 - z\bar{w}|} \quad (607)$$

Nach der inversen Dreiecksungleichung gilt  $|1 - z\bar{w}| \geq |1| - |z\bar{w}| = 1 - |z| |w| \geq 1 - |w|$ , weil  $|z|$  laut (606) kleiner als 1 ist. Wir folgern dann mit (607)

$$|T(z)| \leq \frac{\varepsilon}{1 - |w|} \quad (608)$$

und somit (v).

Zu (vi). Aufgrund der Kreistreue ist  $T(\partial B_\varepsilon(w))$  entweder eine Gerade oder ein Kreis. Aufgrund von (v) muss  $T(\partial B_\varepsilon(w))$  jedoch in  $\overline{B_{\frac{\varepsilon}{1-|w|}}(0)}$  liegen, und somit beschränkt sein.

Eine Gerade kann  $T(\partial B_\varepsilon(w))$  also nicht sein. Somit ist es ein Kreis, der ganz in  $\overline{B_{\frac{\varepsilon}{1-|w|}}(0)}$  liegt. Jeder solcher Kreis ist gegeben durch  $\partial B_{\rho(\varepsilon)}(\xi_\varepsilon)$  für  $\rho(\varepsilon)$  und  $\xi_\varepsilon$  wie in der Aussage. Aussage (vii) folgt so: Definieren wir  $h : B_\alpha(0) \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $h(z) := |T(z) - \xi_\varepsilon|$ , so sind  $h(B_\varepsilon(w))$  und  $h(B_1(0) \setminus B_\varepsilon(w))$  beides Teilmengen von  $[0, \infty) \setminus \{\rho_\varepsilon\}$ . Da eine stetige Abbildung aber Zusammenhang erhält, müssen  $h(B_\varepsilon(w))$  und  $h(B_1(0) \setminus B_\varepsilon(w))$  beides Intervalle sein. Zusammen mit (ii) und (vi) folgt  $h(B_\varepsilon(w)) \subset [0, \rho(\varepsilon))$  und  $h(B_1(0) \setminus B_\varepsilon(w)) \subset (\rho(\varepsilon), \infty)$ . Der Rest folgt aus der Bijektivität von  $T$ .

Behauptung (viii) beweisen wir später.

**Korollar 150.** Es sei  $a \in \mathbb{C}$  und  $r_1 > 0$  sowie  $w \in B_{r_1}(a)$ . Es sei nun  $f \in \mathcal{H}(D \setminus \{w\})$  für

eine offene Menge  $D \subset \overline{B_{r_1}(a)}$ . Dann gilt für alle  $r_2 > 0$  mit  $\overline{B_{r_2}(w)} \subset B_{r_1}(a)$

$$\int_{\partial B_{r_1}(a)} f(z) dz = \int_{\partial B_{r_2}(w)} f(z) dz. \quad (609)$$

**Beweis.** OBdA haben wir  $r_1 = 1$  und  $a = 0$  (sonst betrachte  $\tilde{f}(z) = f(a + r_1 z)$ ). Es sei  $f \in \mathcal{H}(B_\alpha(0))$ . Sei außerdem auch  $\delta \in (0, 1)$  wie in Lemma 149 (iv) und wähle  $\varepsilon > 0$  so, dass  $\frac{\varepsilon}{1-|w|} < \frac{1}{2}\delta$ . Seien  $\rho(\varepsilon) > 0$  und  $\xi_\varepsilon \in \mathbb{C}$  wie in Lemma 149 (vi). Man beachte, dass dann  $|\xi_\varepsilon| < \frac{\delta}{2}$ . Es gilt wegen Proposition 146

$$\int_{\partial B_{r_2}(w)} f(z) dz = \int_{\partial B_\varepsilon(w)} f(z) dz \quad (610)$$

Nun gilt wegen Proposition 142

$$\int_{\partial B_\varepsilon(w)} f(z) dz = \int_{T(\partial B_\varepsilon(w))} f(T^{-1}(z))(T^{-1})'(z) dz = \int_{\partial B_{\rho(\varepsilon)}(\xi_\varepsilon)} f(T^{-1}(z))(T^{-1})'(z) dz. \quad (611)$$

Hier haben wir benutzt, dass  $t \mapsto T(w + \varepsilon e^{it})$  den Kreis  $B_{\rho(\varepsilon)}(\xi_\varepsilon)$  im Uhrzeigersinn durchläuft, vgl. Lemma 149 (viii).

$$\int_{\partial B_{r_2}(w)} f(z) dz = \int_{\partial B_{\rho(\varepsilon)}(\xi_\varepsilon)} f(T^{-1}(z))(T^{-1})'(z) dz. \quad (612)$$

Beachte nun, dass  $(f \circ T^{-1}) \cdot T^{-1}$  auf  $T(B_\alpha(0) \setminus \{w\}) = T(B_\alpha(0)) \setminus \{0\}$  holomorph ist. Nach Lemma 149 ist  $T^{-1}$  somit insbesondere auf  $B_{1+\delta}(0) \setminus \{0\}$  holomorph. Beachte: Da  $|\xi_\varepsilon| \leq \frac{1}{2}\delta$  gilt  $\partial B_1(\xi_\varepsilon) \subset B_{1+\delta}(0)$ . Mit Korollar 146 gilt

$$\int_{\partial B_{r_2}(w)} f(z) dz = \int_{\partial B_{\rho(\varepsilon)}(\xi_\varepsilon)} f(T^{-1}(z))(T^{-1})'(z) dz = \int_{\partial B_1(\xi_\varepsilon)} f(T^{-1}(z))(T^{-1})'(z) dz. \quad (613)$$

**ZWISCHENBEHAUPTUNG.**

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_1(\xi_\varepsilon)} f(T^{-1}(z))(T^{-1})'(z) dz = \int_{\partial B_1(0)} f(T^{-1}(z))(T^{-1})'(z) dz. \quad (614)$$

Dazu:

$$\int_{\partial B_1(\xi_\varepsilon)} f(T^{-1}(z))(T^{-1})'(z) dz = \int_0^{2\pi} f(T^{-1}(\xi_\varepsilon + e^{it}))(T^{-1})'(\xi_\varepsilon + e^{it}) i e^{it} dt \quad (615)$$

Beachte nun, dass für alle  $t \in [0, 2\pi]$  gilt (punktweise)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(T^{-1}(\xi_\varepsilon + e^{it}))(T^{-1})'(\xi_\varepsilon + e^{it})ie^{it} = f(T^{-1}(e^{it}))(T^{-1})'(e^{it})ie^{it}, \quad (616)$$

da  $\xi_\varepsilon \rightarrow 0$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$  (und alles stetig ist). Ferner gilt für alle  $\varepsilon > 0$

$$|f(T^{-1}(\xi_\varepsilon + e^{it}))(T^{-1})'(\xi_\varepsilon + e^{it})ie^{it}| \leq \sup_{w \in \overline{B_{1+\delta/2}(0)}} |(f \circ T^{-1})(w)|||(T^{-1})'(w)| =: M < \infty. \quad (617)$$

Somit ist also  $M$  eine auf  $(0, 2\pi)$  integrierbare Majorante des Integranden in (615). Wir folgern

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_1(\xi_\varepsilon)} f(T^{-1}(z))(T^{-1})'(z) dz = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} f(T^{-1}(\xi_\varepsilon + e^{it}))(T^{-1})'(\xi_\varepsilon + e^{it})ie^{it} dt \quad (618)$$

$$= \int_0^{2\pi} f(T^{-1}(e^{it}))(T^{-1})'(e^{it})ie^{it} dt = \int_{\partial B_1(0)} f(T^{-1}(z))(T^{-1})'(z) dz, \quad (619)$$

wobei man die letzte Gleichung am besten rückwärts liest. ZWISCHENBEHAUPTUNG ENDE.

Wir folgern nun mit (613) (nach Grenzübergang  $\varepsilon \rightarrow 0$  auf beiden Seiten)

$$\int_{\partial B_{r_2}(w)} f(z) dz = \int_{\partial B_1(0)} f(T^{-1}(z))(T^{-1})'(z) dz. \quad (620)$$

Wiederum mit der Substitutionsformel erhalten wir

$$\int_{\partial B_{r_2}(w)} f(z) dz = \int_{\partial B_1(0)} f(T^{-1}(z))(T^{-1})'(z) dz = \int_{T^{-1}(\partial B_1(0))} f(z) dz \quad (621)$$

$$= \int_{\partial B_1(0)} f(z) dz, \quad (622)$$

wobei wir im letzten Schritt wiederum Lemma 149 (viii) benutzt haben.

### 3.3 Die Cauchy'sche Integralformel

Der Cauchy-Integralsatz befasst sich mit

$$\int_{\partial B_r(a)} f(z) dz \quad (623)$$

für holomorphe Funktionen  $f \in \mathcal{H}(D)$ ,  $D \supset \overline{B_r(a)}$ . Erstaunlicherweise verschwindet das Integral hier stets. Die Situation verhält sich komplett anders, wenn der Integrand nur an einem einzigen Punkt von  $B_r(a)$  nicht komplex differenzierbar ist, vergleiche auch Bemerkung 148. Bei einem solchen Punkt spricht man von einer *isolierten Singularität*.

Wir interessieren uns in dieser Vorelesung für Kurvenintegrale von Funktionen mit isolierten Singularitäten. Ein wichtiger Schritt in diese Richtung ist die *Cauchy'sche Integralformel*:

**Satz 151. CAUCHY-INTEGRALFORMEL.** Es seien  $a \in \mathbb{C}$ ,  $r > 0$  und  $w \in B_r(a)$ . Ist  $f \in \mathcal{H}(D)$  für ein  $D \supset \overline{B_r(a)}$  offen, so gilt

$$\int_{\partial B_r(a)} \frac{f(z)}{z-w} dz = 2\pi i f(w). \quad (\text{CIF})$$

Im Spezialfall  $w = a$  und  $f \equiv 1$  haben wir (CIF) bereits in Beispiel 132 gesehen. Der Beweis ist dank unserer Vorbereitungen aus dem vorigen Abschnitt gar nicht so schwer.

**Beweis (von Satz 151).** Wir definieren  $g : B_r(a) \setminus \{w\} \rightarrow \mathbb{C}$  durch  $g(z) := \frac{f(z)}{z-w}$ . Da  $g$  auf  $B_r(a) \setminus \{w\}$  holomorph ist, lässt sich Korollar 150 auf  $g$  anwenden. Sei  $\varepsilon_0 > 0$  so, dass  $B_{\varepsilon_0}(w) \subset B_r(a)$ . Dann gilt für alle  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$

$$\int_{\partial B_r(a)} g(z) dz = \int_{\partial B_\varepsilon(w)} g(z) dz \quad (624)$$

Wir folgern mit der Definition von  $g$

$$\int_{\partial B_r(a)} \frac{f(z)}{z-w} dz = \int_{\partial B_\varepsilon(w)} \frac{f(z)}{z-w} dz. \quad (625)$$

Wir berechnen nun die rechte Seite für beliebiges  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ .

$$\int_{\partial B_\varepsilon(w)} \frac{f(z)}{z-w} dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(w + \varepsilon e^{it})}{w + \varepsilon e^{it} - w} i\varepsilon e^{it} dt \quad (626)$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{f(w + \varepsilon e^{it})}{\varepsilon e^{it}} i\varepsilon e^{it} dt = i \int_0^{2\pi} f(w + \varepsilon e^{it}) dt \quad (627)$$

Wir beobachten nun, dass für alle  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  und  $t \in [0, 2\pi]$

$$|f(w + \varepsilon e^{it})| \leq \sup_{\xi \in \overline{B_{\varepsilon_0}(w)}} |f(\xi)| := M < \infty, \quad (628)$$

weil  $f$  auf der kompakten Menge  $\overline{B_{\varepsilon_0}(w)} \subset B_r(a)$  stetig ist. Weil  $M$  auf  $(0, 2\pi)$  integrierbar ist, erlaubt uns der Satz über dominierte Konvergenz die Vertauschung von Integralen und punktwisen Funktionsgrenzwerten. Wir schließen

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon(w)} \frac{f(z)}{z-w} dz = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} i \int_0^{2\pi} f(w + \varepsilon e^{it}) dt = i \int_0^{2\pi} f(w) dt = if(w)(2\pi). \quad (629)$$

Die Behauptung folgt.

Die Cauchy-Integralformel wird uns erlauben, einige Integrale zu berechnen, deren Wert zu finden vorher undenkbar war.

**Beispiel 152.** Wir berechnen

$$\int_{\partial B_1(0)} \frac{e^z}{2z-1} dz. \quad (630)$$

Dazu

$$\int_{\partial B_1(0)} \frac{e^z}{2z-1} dz = \int_{\partial B_1(0)} \frac{1}{2} \frac{e^z}{z-\frac{1}{2}} dz = \int_{\partial B_1(0)} \frac{f(z)}{z-\frac{1}{2}} dz \quad (631)$$

für die holomorphe Funktion  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  gegeben durch  $f(z) = \frac{1}{2}e^z$ . Dann gilt

$$\int_{\partial B_1(0)} \frac{f(z)}{z-\frac{1}{2}} dz = 2\pi i f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\pi i \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}} = \pi i e^{\frac{1}{2}}. \quad (632)$$

Wer möchte, kann versuchen dieses Integral direkt mit der Definition des Kurvenintegrals zu berechnen. Es wird nicht gelingen!

Sie werden hier noch viele weitere Beispiele in den Übungen sehen!

**Korollar 153.** MITTELWERTEIGENSCHAFT. Es sei  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und  $z_0 \in D$ . Sei ferner  $r > 0$  mit  $\overline{B_r(z_0)} \subset D$ . Dann gilt

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt. \quad (633)$$

**Beweis.** Es gilt für  $r, z_0$  wie in der Aussage

$$2\pi i f(z_0) = \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{z_0 + re^{it} - z_0} i r e^{it} dt = i \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt. \quad (634)$$

Teilen wir durch  $2\pi i$ , folgt die Behauptung.

Eine weitere wichtige Konsequenz der Cauchy'schen Integralformel ist der *Satz von Liouville*.

**Satz 154.** SATZ VON LIOUVILLE. Es sei  $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$  beschränkt. Dann ist  $f$  konstant.

**Beweis.** Sei etwa  $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$  beschränkt, d.h.

$$M := \sup_{\xi \in \mathbb{C}} |f(\xi)| < \infty. \quad (635)$$

Sei  $w \in \mathbb{C}$  beliebig aber fest. Für  $r > |w|$  gilt nach (CIF)

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(0)} \frac{f(z)}{z-w} dz. \quad (636)$$

Nun würden wir die Gleichung gerne nach  $w$  ableiten. Dazu

$$f'(w) = \frac{1}{2\pi i} \partial_w \int_{\partial B_r(0)} \frac{f(z)}{z-w} dz \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(0)} \partial_w \left( \frac{f(z)}{z-w} \right) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(0)} \frac{f(z)}{(z-w)^2} dz. \quad (637)$$

Die Vertauschung von Differential und Integral in  $(*)$  begründen wir noch am Ende des Beweises. Nun gilt

$$|f'(w)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(0)} \frac{f(z)}{(z-w)^2} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \sup_{z \in \partial B_r(0)} \left| \frac{f(z)}{(z-w)^2} \right| L(\partial B_r(0)) \quad (638)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sup_{z \in \partial B_r(0)} \frac{|f(z)|}{|z-w|^2} (2\pi r) \leq rM \sup_{z \in \partial B_r(0)} \frac{1}{|z-w|^2} \quad (639)$$

Man beachte: Da  $r > |w|$  gilt nach der inversen Dreiecksungleichung für alle  $z \in \partial B_r(0)$

$$|z-w| \geq |z| - |w| = r - |w| \quad (640)$$

und somit liefert (639)

$$|f'(w)| \leq rM \frac{1}{(r-|w|)^2} = \frac{rM}{r^2 - 2|w|r + |w|^2} \quad \forall r > |w|. \quad (641)$$

Mit  $r \rightarrow \infty$  folgern wir  $|f'(w)| = 0$ . Da  $w$  beliebig war, folgt  $f' \equiv 0$  und somit  $f \equiv \text{const}$  (vgl. Übungsblatt 6).

Noch  $\mathbb{Z}$ : die Vertauschung  $(*)$  ist erlaubt. Dazu definieren wir

$$h(w) := \int_{\partial B_r(0)} \frac{f(z)}{z-w} dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{it})}{re^{it}-w} ire^{it} dt. \quad (642)$$

Sei  $w_0 \in B_r(0)$  und sei  $w \in \mathbb{C}$  so, dass  $|w-w_0| < \frac{r-|w_0|}{2}$ . Dann gilt insbesondere auch  $|w| \leq |w_0| + |w-w_0| < \frac{r+|w_0|}{2}$  und außerdem

$$\frac{1}{w-w_0} \left( \frac{1}{re^{it}-w} - \frac{1}{re^{it}-w_0} \right) = \frac{1}{(re^{it}-w)(re^{it}-w_0)}. \quad (643)$$

Somit folgt

$$\frac{h(w) - h(w_0)}{w - w_0} = \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{it})}{(re^{it}-w)(re^{it}-w_0)} ire^{it} dt. \quad (644)$$



Um den Grenzwert  $w \rightarrow w_0$  im Integralausdruck auf der rechten Seite zu berechnen, benötigen wir eine integrierbare Majorante. Dazu

$$\left| \frac{f(re^{it})}{(re^{it} - w)(re^{it} - w_0)} ire^{it} \right| = r \frac{|f(re^{it})|}{|re^{it} - w| |re^{it} - w_0|} \leq r \frac{M}{(r - |w|)(r - |w_0|)} \quad (645)$$

$$\leq r \frac{M}{\frac{1}{2}(r - \frac{r+|w_0|}{2})(r - |w_0|)} \leq r \frac{M}{\frac{1}{2}(r - |w_0|)(r - |w_0|)}. \quad (646)$$

Dieser Ausdruck ist (als von  $t, w$  unabhängige Konstante) sicherlich auf  $(0, 2\pi)$  integrierbar. Der Satz über die dominierte Konvergenz erlaubt uns damit den Übergang zum Grenzwert auf der rechten Seite von (644). Wir folgern

$$h'(w) = \lim_{w \rightarrow w_0} \frac{h(w) - h(w_0)}{w - w_0} = \int_0^{2\pi} \lim_{w \rightarrow w_0} \frac{f(re^{it})}{(re^{it} - w)(re^{it} - w_0)} ire^{it} dt \quad (647)$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{it})}{(re^{it} - w_0)^2} ire^{it} dt = \int_{B_r(0)} \frac{f(z)}{(z - w_0)^2} dz. \quad (648)$$

Dies rechtfertigt (\*).

Insbesondere müssen also auch Funktionen wie der komplexe Sinus  $\sin : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  und Cosinus auf  $\mathbb{C}$  unbeschränkt sein. Das unterscheidet sich definitiv vom Verhalten des Sinus und Cosinus auf  $\mathbb{R}$ . Wir haben diese Unbeschränktheit eigentlich auch schonmal nachgewiesen, vgl. Übungsblatt 2 Aufgabe 1(b).

**Bemerkung 155.** Eine holomorphe Funktion auf ganz  $\mathbb{C}$  nennen wir auch eine *ganze Funktion*. Der Satz von Liouville besagt also in Kurzform: Jede beschränkte ganze Funktion muss konstant sein.

### 3.3.1 Der Fundamentalsatz der Algebra

Nun kommen wir zu einem Satz, auf dessen Beweis Sie im Studium sicherlich schon lange gewartet haben, dem *Fundamentalsatz der Algebra*. Er wird sehr leicht aus dem Satz von Liouville folgen

**Satz 156. FUNDAMENTALSATZ DER ALGEBRA.** Jedes nichttriviale  $\mathbb{C}$ -Polynom vom Grade  $n \geq 1$  besitzt eine Nullstelle in  $\mathbb{C}$ .

**Beweis.** Es sei für  $n \geq 1$

$$p(z) := \sum_{k=0}^n a_k z^k \quad \text{für } a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}, a_n \neq 0 \quad (649)$$

ein  $\mathbb{C}$ -Polynom vom Grad  $n$ . Beachte: Insbesondere ist  $p$  nicht konstant, weil  $n \geq 1$ . Angenommen nun  $p$  hat keine Nullstelle. Definiere dann  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  durch  $f(z) := \frac{1}{p(z)}$ .

Dann ist  $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ . Wir zeigen nun, dass  $f$  beschränkt ist. Dazu beobachten wir zunächst, dass es ein  $R_0 > 0$  gibt mit

$$|a_n|R^n > \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|R^k + 1 \quad \forall R \in [R_0, \infty). \quad (650)$$

(denn schließlich gilt  $\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} |a_k|R^k + 1}{|a_n|R^n} = 0$ ). Da  $f$  stetig ist und  $\overline{B_{R_0}(0)}$  kompakt, gibt es ein  $M_1 > 0$  mit

$$\sup_{z \in \overline{B_{R_0}(0)}} |f(z)| \leq M_1 < \infty. \quad (651)$$

Für  $|z| > R_0$  gilt nach der inversen Dreiecksungleichung

$$|p(z)| = \left| \sum_{k=0}^n a_k z^k \right| = \left| a_n z^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k \right| \geq |a_n z^n| - \left| \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k \right| = |a_n| |z|^n - \left| \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k \right| \quad (652)$$

$$\stackrel{\geq \Delta\text{-Ungl}}{\geq} |a_n| |z|^n - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| |z|^k \stackrel{(650) \text{ mit } R = |z|}{=} \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| |z|^k + 1 - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| |z|^k = 1. \quad (653)$$

Somit haben wir für  $|z| > R_0$

$$|f(z)| = \frac{1}{|p(z)|} \leq 1. \quad (654)$$

Wir folgern, dass

$$|f(z)| \leq \max\{M_1, 1\} \quad \forall z \in \mathbb{C}. \quad (655)$$

Somit ist  $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$  beschränkt. Aus dem Satz von Liouville folgern wir, dass  $f$  konstant ist. Ein Widerspruch, da  $p = \frac{1}{f}$  nämlich nicht konstant ist.

Die eventuell eher bekannte Version des Fundamentalsatzes der Algebra ist, dass jedes Polynom über  $\mathbb{C}$  in Linearfaktoren zerfällt. Dies begründen wir nun nochmal in dem folgenden Korollar.

**Korollar 157.** Es sei  $p$  ein nichttriviales  $\mathbb{C}$ -Polynom vom Grade  $n \geq 1$ . Dann gibt es Zahlen  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$  und  $a \in \mathbb{C}$  so, dass

$$p(z) = a(z - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (z - \lambda_n) \quad (656)$$

**Beweis.** Induktion nach  $n$ .

INDUKTIONSANFANG. Für  $n = 1$ , d.h.  $p(z) = a_1 z + a_0$  (mit  $a_1 \neq 0$ ) gilt  $p(z) = a_1(z - (\frac{-a_0}{a_1}))$ .

Somit leistet die Wahl  $a = a_1$  und  $\lambda_1 = \frac{-a_0}{a_1}$  das Gewünschte.

INDUKTIONSHYPOTHESE. Es gelte die Behauptung für alle Polynome vom Grad  $n$ .  $\mathbb{Z}$  Die Behauptung gilt auch für Polynome vom Grad  $n + 1$ . Dazu sei  $p$  ein Polynom vom Grad  $n + 1$ . Nach Satz 156 besitzt  $p$  eine Nullstelle  $\lambda_{n+1} \in \mathbb{C}$ . Nach der Polynomdivision (Satz

61) gibt es dann ein Polynom  $q$  vom Grad  $(n + 1) - 1 = n$  mit

$$p(z) = (z - \lambda_{n+1})q(z). \quad (657)$$

Auf  $q$  lässt sich nun die Induktionshypothese anwenden. Wir finden somit  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  und  $a \in \mathbb{C}$  so, dass  $q(z) = a(z - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (z - \lambda_n)$ . Mit (657) folgt

$$p(z) = q(z)(z - \lambda_{n+1}) = a(z - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (z - \lambda_n)(z - \lambda_{n+1}). \quad (658)$$

### 3.3.2 Der Potenzreihenentwicklungssatz

Auch jetzt folgt ein Korollar aus der Cauchy'schen Integralformel, auf das wir lange gewartet haben: Jede holomorphe Funktion ist (lokal) als *Potenzreihe* darstellbar. Das hat wichtige Konsequenzen: Zum Beispiel sind Potenzreihen nach Proposition 105 gleich *unendlich oft differenzierbar*. Die Erkenntnis, dass jede holomorphe Funktion unendlich oft differenzierbar ist, ist sehr nützlich und macht einige Sätze, die wir bereits behandelt haben leichter.

**Satz 158. POTENZREIHENENTWICKLUNGSSATZ.** Es sei  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und  $z_1 \in D$ . Dann gibt es eine Potenzreihe  $P(z) = \sum_{n \geq 0} a_n(z - z_1)^n$  mit Konvergenzradius  $R_P \geq \text{dist}(z_1, D^c)$  und

$$f(z) = f_P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_1)^n \quad \forall z \in B_{\text{dist}(z_1, D^c)}(z_1). \quad (659)$$

(Hierbei nutzen wir die Konvention  $\text{dist}(z_1, \emptyset) = \infty$ )

Die Koeffizienten  $a_n$  lassen sich durch die *Cauchy'sche Koeffizientenformel*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_1)} \frac{f(z)}{(z - z_1)^{n+1}} dz. \quad (660)$$

bestimmen, wobei  $r \in (0, \text{dist}(z_1, D^c))$  beliebig ist.

**Beweis.** Man beachte zunächst, dass wegen Korollar 146 die rechte Seite von (660) nicht von  $r$  abhängig ist (jedenfalls sofern  $0 < r < \text{dist}(z_1, D^c)$ ). Wir definieren also ab sofort für ein beliebiges solche  $r$

$$a_n := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_1)} \frac{f(z)}{(z - z_1)^{n+1}} dz. \quad (661)$$

Es sei nun  $r \in (0, \text{dist}(z_1, D^c))$  und  $w \in B_r(z_1)$ . Dann gilt nach der Cauchy'schen Inte-

gralformel (Satz 151)

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_1)} \frac{f(z)}{z-w} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_1)} \frac{f(z)}{(z-z_1)-(w-z_1)} dz \quad (662)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_1)} \frac{f(z)}{z-z_1} \frac{1}{1-\frac{w-z_1}{z-z_1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_1)} \frac{f(z)}{z-z_1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w-z_1}{z-z_1}\right)^n dz, \quad (663)$$

wobei wir im letzten Schritt (den man besser rückwärts liest) die geometrische Reihe verwendet haben. Diese ist konvergent, da für  $z \in \partial B_r(z_1)$  gilt  $\left|\frac{w-z_1}{z-z_1}\right| = \frac{|w-z_1|}{r} < \frac{r}{r} = 1$ . Nun berechnen wir

$$f(w) \stackrel{(663)}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_1)} \frac{f(z)}{z-z_1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w-z_1}{z-z_1}\right)^n dz \quad (664)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(z)}{(z-z_1)^{n+1}} (w-z_1)^n dz \quad (665)$$

$$\stackrel{(*)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_1)} \frac{f(z)}{(z-z_1)^{n+1}} dz \right) (w-z_1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (w-z_1)^n. \quad (666)$$

Die Vertauschung (\*) rechtfertigen wir später noch. Diese Darstellung gilt für alle  $w \in B_r(z_1)$  und alle  $r < \text{dist}(z_1, D^C)$ . mit anderen Worten: Sie gilt für  $w \in B_{\text{dist}(z_1, D^C)}(z_1)$ . Man sieht: Die Potenzreihe  $P(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z-z_1)^n$  ist auf  $B_{\text{dist}(z_1, D^C)}(z_1)$  konvergent und ihre Wertefunktion stimmt dort mit  $f$  überein. Es folgt insbesondere  $R_P \geq \text{dist}(z_1, D^C)$ . Noch  $\mathbb{Z}$ : Die Vertauschung (\*) war gerechtfertigt. Dazu bilden wir für  $m \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=0}^m \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_1)} \frac{f(z)}{(z-z_1)^{n+1}} dz \right) (w-z_1)^n - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(z)}{(z-z_1)^{n+1}} (w-z_1)^n dz \quad (667)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_1)} \sum_{n=0}^m \frac{f(z)}{(z-z_1)^{n+1}} (w-z_1)^n dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(z)}{(z-z_1)^{n+1}} (w-z_1)^n dz \quad (668)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_1)} \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{f(z)}{(z-z_1)^{n+1}} (w-z_1)^n dz \quad (669)$$

Somit haben wir mit der Fundamentalabschätzung

$$\left| \sum_{n=0}^m \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_1)} \frac{f(z)}{(z-z_1)^{n+1}} dz \right) (w-z_1)^n - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(z)}{(z-z_1)^{n+1}} (w-z_1)^n dz \right| \quad (670)$$

$$\stackrel{(669)}{\leq} \frac{1}{2\pi} \sup_{z \in \partial B_r(z_1)} \left| \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{f(z)}{(z-z_1)^{n+1}} (w-z_1)^n \right| L(\partial B_r(z_1)) \quad (671)$$

$$\leq r \sup_{z \in \partial B_r(z_1)} \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{|f(z)|}{|z-z_1|^{n+1}} |w-z_1|^n = r \sup_{z \in \partial B_r(z_1)} \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{|f(z)|}{r^{n+1}} |w-z_1|^n \quad (672)$$

$$= \sup_{z \in \partial B_r(z_1)} |f(z)| \sum_{n=m+1}^{\infty} \left( \frac{|w-z_1|^n}{r^n} \right) \quad (673)$$

$$= \sup_{z \in \partial B_r(z_1)} |f(z)| \left( \frac{|w-z_1|}{r} \right)^{m+1} \sum_{n=m+1}^{\infty} \left( \frac{|w-z_1|}{r} \right)^{n-(m+1)} \quad (674)$$

$$= \sup_{z \in \partial B_r(z_1)} |f(z)| \left( \frac{|w-z_1|}{r} \right)^{m+1} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{|w-z_1|}{r} \right)^n \quad (675)$$

$$= \sup_{z \in \partial B_r(z_1)} |f(z)| \left( \frac{|w-z_1|}{r} \right)^{m+1} \frac{1}{1 - \frac{|w-z_1|}{r}} \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty), \quad (676)$$

da  $\sup_{z \in \partial B_r(z_1)} |f(z)| < \infty$  und  $|w-z_1| < r$ .

Mit anderen Worten: Jede holomorphe Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  lässt sich *lokal* um jedes  $z_1 \in D$  als Potenzreihe schreiben, und das Konvergenzgebiet dieser Potenzreihe ist stets der größtmögliche Ball um den Entwicklungspunkt in  $D$ . Dies erklärt zum Beispiel auch, dass die Logarithmusreihe in  $B_1(1)$  konvergiert, vgl. Bemerkung 124.

**Korollar 159.** GOURSAT'S BEOBACHTUNG. Es sei  $f \in \mathcal{H}(D)$ . Dann ist  $f$  auf  $D$  unendlich oft komplex differenzierbar. Außerdem gilt für alle  $w \in D$ ,  $r > 0$  und  $z_0 \in D$  mit  $w \in B_r(z_0)$  und  $\overline{B_r(z_0)} \subset D$

$$f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}} dz. \quad (677)$$

**Beweis.** Es sei  $f \in \mathcal{H}(D)$  und  $w \in D$ . Aus dem vorigen Satz schließen wir, es eine auf  $B_{\text{dist}(w, D^c)}(w)$  konvergente Potenzreihe  $P(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z-w)^n$  gibt mit  $f(z) = f_P(z)$  für alle  $z \in B_{\text{dist}(w, D^c)}(w)$ . Aus Satz 105 wissen wir, dass  $f = f_P$  in  $B_{\text{dist}(w, D^c)}(w)$  unendlich oft komplex diffbar ist, insbesondere also auch bei  $w$ . Da  $w \in D$  beliebig war folgt hier bereits die Tatsache, dass  $f$  auf ganz  $D$  unendlich oft komplex differenzierbar ist. Für die

Koeffizienten  $a_n$  der obigen Potenzreihe gilt, dass

$$a_n = \frac{f_P^{(n)}(w)}{n!} = \frac{f^{(n)}(w)}{n!}. \quad (678)$$

Desweiteren gilt aber nach der Cauchy'schen Koeffizientenformel (660)

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\varepsilon(w)} \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}} dz \quad \forall \varepsilon < \text{dist}(w, D^C). \quad (679)$$

Vergleichen wir die beiden obigen Gleichungen so sehen wir

$$f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial B_\varepsilon(w)} \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}} dz \quad \forall \varepsilon < \text{dist}(w, D^C) \quad (680)$$

Nun sei  $z_0 \in D$  und  $r > 0$  so, dass  $w \in B_r(z_0)$  und  $\overline{B_r(z_0)} \subset D$ . Wähle nun  $\varepsilon > 0$  so klein, dass  $\overline{B_\varepsilon(w)} \subset B_r(z_0)$ . Wegen Korollar 150 gilt dann

$$\int_{\partial B_\varepsilon(w)} \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}} dz = \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}} dz \quad (681)$$

(denn  $z \mapsto \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}}$  ist auf  $\overline{B_r(z_0)} \setminus \{w\}$  holomorph). Gleichungen (680) und (681) zusammen ergeben die gewünschte Formel

$$f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}} dz \quad (682)$$

**Intermezzo.** Goursat's Beobachtung verändert einige unserer Sätze, denn manche Voraussetzungen werden nicht mehr benötigt. So zum Beispiel

**Proposition 123'.** UMKEHRSATZ IM KOMPLEXEN. Es sei  $f \in \mathcal{H}(D)$  und  $z_0 \in D$  so, dass  $f'(z_0) \neq 0$ . Dann gibt es eine offene Umgebung  $\Omega \subset D$  von  $z_0$  so, dass  $U := f(\Omega)$  offen ist und  $f|_\Omega : \Omega \rightarrow U$  biholomorph ist.

**Proposition 142'.** SUBSTITUTIONSFORMEL FÜR KURVENINTEGRALE. Sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  eine stückweise  $C^1$  Kurve. Es sei  $U \subset \mathbb{C}$  offen und  $g \in \mathcal{H}(U)$ . Sei nun  $D \supset g(U)$  offen. Dann gilt für  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  stetig

$$\int_{g \circ \gamma} f(z) dz = \int_\gamma f(g(z))g'(z) dz, \quad (683)$$

Eine weitere wichtige Konsequenz ergibt sich aus Korollar 141. Sie ist eine erste mögliche Verallgemeinerung des Cauchy'schen Integralsatzes für Kreiswege.

**Korollar 160.** CAUCHY'SCHER INTEGRALSATZ - VERSION II. Sei  $f \in \mathcal{H}(D)$ . Es sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  irgendeine geschlossene stückweise  $C^1$ -Kurve so, dass es ein  $z_0 \in \mathbb{C}$  gibt mit  $\gamma([a, b]) \subset B_{\text{dist}(z_0, D^c)}(z_0)$ . Dann gilt

$$\int_{\gamma} f(z) \, dz = 0. \quad (684)$$

**Beweis.**  $f$  lässt sich auf  $B_{\text{dist}(z_0, D^c)}(z_0)$  in eine Potenzreihe entwickeln. Für (Wertefunktionen von) Potenzreihen gilt (684) bereits nach Korollar 141.

Ein weiteres Korollar kann auch nützlich sein um holomorphe Funktionen zu konstruieren:

**Korollar 161.** Es sei  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und  $z_0 \in D$ . Dann ist die Funktion  $q : D \rightarrow \mathbb{C}$  gegeben durch

$$q(z) := \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} & z \neq z_0 \\ f'(z_0) & z = z_0 \end{cases} \quad (685)$$

holomorph.

**Beweis.** Es genügt zu zeigen, dass  $q$  bei  $z_0$  komplex differenzierbar ist. Es gibt nach Satz 158 eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$  so, dass

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \forall z \in B_{\text{dist}(z_0, D^c)}(z_0). \quad (686)$$

Außerdem gilt  $a_0 = f(z_0)$ ,  $a_1 = f'(z_0)$  (wegen Proposition 105). Wir haben also

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z - z_0)^n. \quad (687)$$

Wir folgern, dass für  $z \neq z_0$

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) + \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-1} \quad (688)$$

Somit gilt für  $z \neq z_0$

$$q(z) = f'(z_0) + \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-1}. \quad (689)$$

Da  $q(z_0) = f'(z_0)$  gilt die Gleichung aber auch für  $z = z_0$ . Somit liefert die rechte Seite von (689) eine Potenzreihendarstellung für  $q$  um  $z_0$ . Die Holomorphie folgt daraus, dass alle Potenzreihen holomorph sind, vgl Proposition 101.

**Beispiel 162.** Wir berechnen

$$\int_{\partial B_1(0)} \frac{1}{e^z - 1} dz. \quad (690)$$

Die Funktion  $f(z) = \frac{1}{e^z - 1}$  ist nicht holomorph auf einer offenen Obermenge von  $\overline{B_1(0)}$  da  $e^0 = 1$ . Der Cauchy'sche Integralsatz wäre also nicht anwendbar. Vielleicht aber (nach Umformungen) die Cauchy'sche Integralformel? Die Funktion holomorph auf  $B_1(0) \setminus \{0\}$ , denn  $e^z = 1$  ist genau dann der Fall wenn  $z = 2k\pi i$  für ein  $k \in \mathbb{Z}$ . In  $B_1(0)$  liegt von diesen Zahlen nur  $2 \cdot 0 \cdot \pi i = 0$ . Um die Struktur der Cauchy'schen Integral zu provozieren schreiben wir um

$$\int_{\partial B_1(0)} \frac{1}{e^z - 1} dz = \int_{\partial B_1(0)} \frac{\frac{z-0}{e^z-1}}{z-0} dz. \quad (691)$$

Wir betrachten nun die Funktion  $q : B_2(0) \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$q(z) = \begin{cases} \frac{e^z-1}{z-0} & z \neq 0 \\ 1 & z = 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{\exp(z)-\exp(0)}{z-0} & z \neq 0 \\ \exp'(0) & z = 0 \end{cases}. \quad (692)$$

Nach Korollar 161 ist  $q$  auf  $B_2(0)$  holomorph. Außerdem gilt (wegen der Diskussion der Nullstellen von  $e^z - 1$  oben), dass  $q(z) \neq 0$  für alle  $z \in B_2(0)$ . Somit ist auch  $g = \frac{1}{q}$  holomorph auf  $B_2(0)$ . Nun gilt mit (691)

$$\int_{\partial B_1(0)} \frac{1}{e^z - 1} dz = \int_{\partial B_1(0)} \frac{\frac{z-0}{e^z-1}}{z-0} dz = \int_{\partial B_1(0)} \frac{\frac{1}{q(z)}}{z-0} dz \stackrel{\text{(CIF)}}{=} 2\pi i \frac{1}{q(0)}. \quad (693)$$

Da  $q(0) = 1$  gilt

$$\int_{\partial B_1(0)} \frac{1}{e^z - 1} dz = 2\pi i. \quad (694)$$

### 3.3.3 Satz von Morera

Als nächstes widmen wir uns dem *Satz von Morera*, d.h. einer Umkehrung des Cauchy'schen Integralsatzes (Version II). Zunächst eine Definition

**Definition 163.** STRECKEN UND DREIECKSKURVEN. Für  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  ist die *Verbindungsstrecke* von  $z_1$  nach  $z_2$  eine Kurve der Form

$$\gamma_{\overrightarrow{z_1 z_2}}(t) := z_1 + t(z_2 - z_1) \quad (t \in [0, 1]). \quad (695)$$

Für  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$  heißt  $\Delta_{z_1, z_2, z_3} := \gamma_{\overrightarrow{z_1 z_2}} \oplus \gamma_{\overrightarrow{z_2 z_3}} \oplus \gamma_{\overrightarrow{z_3 z_1}}$  der *Dreiecksweg* zwischen  $z_1, z_2, z_3$ .

Wir weisen an der Stelle darauf hin, dass  $(\gamma_{\overrightarrow{z_1 z_2}})_{\text{rev}} = \gamma_{\overrightarrow{z_2 z_1}}$ . In der Tat

$$(\gamma_{\overrightarrow{z_1 z_2}})_{\text{rev}}(t) = \gamma_{\overrightarrow{z_1 z_2}}(1-t) = z_1 + (1-t)(z_2 - z_1) = z_2 + t(z_1 - z_2) = \gamma_{\overrightarrow{z_2 z_1}}(t) \quad \forall t \in [0, 1]. \quad (696)$$



**Satz 163. SATZ VON MORERA.** Es sei  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  stetig. Ferner gelte für alle geschlossenen stückweise  $C^1$ -Kurven  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\gamma([a, b]) \subset B_{\text{dist}(z_1, D^c)}(z_1)$  für ein  $z_1 \in \mathbb{C}$ , dass

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0. \quad (697)$$

Dann ist  $f$  auf  $D$  holomorph.

**ZUSATZ.** Es reicht sogar, wenn man anstatt beliebiger geschlossener  $C^1$ -Kurven nur *Dreieckskurven* der Form  $\Delta_{z_1, z_2, z_3}$  betrachtet.

**Beweis.** Es sei  $w \in D$ .  $\mathbb{Z}$ :  $f$  ist bei  $w$  komplex diff'bar. Wähle dazu ein  $r > 0$  mit  $\overline{B_r(w)} \subset D$ . Definiere außerdem  $F : B_r(w) \rightarrow \mathbb{C}$  durch

$$F(z) := \int_{\gamma_{\overline{w}z}} f(\xi) d\xi. \quad (698)$$

Für  $z, z_0 \in B_r(w)$  betrachte den Dreiecksweg  $\Delta := \Delta_{w, z, z_0}$ . Nun gilt nach der Voraussetzung des Satzes (mit  $z_1 = w$ )

$$0 = \int_{\Delta} f(\xi) d\xi = \int_{\gamma_{\overline{w}z}} f(\xi) d\xi + \int_{\gamma_{z\overline{z_0}}} f(\xi) d\xi + \int_{\gamma_{\overline{z_0}w}} f(\xi) d\xi \quad (699)$$

$$= \int_{\gamma_{\overline{w}z}} f(\xi) d\xi + \int_{\gamma_{z\overline{z_0}}} f(\xi) d\xi - \int_{(\gamma_{\overline{z_0}w})_{rev}} f(\xi) d\xi \quad (700)$$

$$= \int_{\gamma_{\overline{w}z}} f(\xi) d\xi + \int_{\gamma_{z\overline{z_0}}} f(\xi) d\xi - \int_{\gamma_{\overline{w}z_0}} f(\xi) d\xi = F(z) - F(z_0) + \int_{\gamma_{z\overline{z_0}}} f(\xi) d\xi. \quad (701)$$

Wir folgern

$$F(z) - F(z_0) = - \int_{\gamma_{z\overline{z_0}}} f(\xi) d\xi = \int_{\gamma_{z_0\overline{z}}} f(\xi) d\xi \stackrel{\text{Definition}}{\text{Kurvenintegral}} \int_0^1 f(\gamma_{z_0\overline{z}}(t)) \gamma'_{z_0\overline{z}}(t) dt \quad (702)$$

$$= \int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0))(z - z_0) dt. \quad (703)$$

Wir teilen durch  $z - z_0$  und folgern (für  $z \neq z_0$ )

$$\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = \int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0)) dt. \quad (704)$$

Wir wollen nun  $z \rightarrow z_0$  streben lassen. Dazu finden wir zunächst eine integrierbare Majorante des Integranden auf der rechten Seite. Dazu: Für alle  $t \in [0, 1]$  gilt

$$|f(z_0 + t(z - z_0))| \leq \sup_{\xi \in \overline{B_r(w)}} |f(\xi)| =: M < \infty, \quad (705)$$

weil  $f$  auf  $\overline{B_r(w)}$  stetig ist. Da  $M$  auf  $[0, 1]$  integrierbar ist lassen sich (punktweise) Grenzwerte und Integral vertauschen und es gilt

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0)) dt = \int_0^1 f(z_0 + t(z_0 - z_0)) dt = f(z_0). \quad (706)$$

Somit gilt  $F \in \mathcal{H}(B_r(w))$  und  $F'(z_0) = f(z_0)$  für alle  $z_0 \in B_r(w)$ . Da holomorphe Funktionen stets unendlich oft komplex diffbar sind, ist nun auch  $F' = f$  holomorph auf  $B_r(w)$ . Da  $w$  beliebig war folgt, dass  $f$  holomorph auf  $D$  ist. Da wir nur Dreieckswege betrachtet haben ist auch der Zusatz bereits bewiesen. Wir weisen an der Stelle nochmal darauf hin, dass sich der im Beweis betrachtete Dreiecksweg  $\Delta$  komplett in  $\overline{B_r(w)}$  aufhält und somit auch ganz in  $B_{\text{dist}(w, D^c)}(w)$  enthalten ist.

Numerisch ist Integrieren leichter als Differenzieren, somit bietet der Satz von Morera auch eine gute Möglichkeit, numerisch festzustellen, ob eine Funktion holomorph ist.

### 3.3.4 Verhalten in der Nähe von Nullstellen

### 3.3.5 Identitätssatz und Gebietstreue

## 3.4 Umlaufzahl und Homotopie

# 4 Isolierte Singularitäten

## 4.1 Klassifikation der Singularitäten

## 4.2 Laurentreihen

# 5 Residuenkalkül

## 5.1 Die Fouriertransformation

# 6 Der Riemann'sche Abbildungssatz