

# Gewöhnliche Differentialgleichungen

Marius Müller

Wintersemester 2022/2023

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Explizite Lösungsverfahren</b>	<b>6</b>
1.1	Separation der Variablen . . . . .	6
1.1.1	Eulerhomogene Differentialgleichungen . . . . .	10
1.2	Lineare Differentialgleichungen - Teil 1 . . . . .	11
1.2.1	Lineare Homogene Differentialgleichungen . . . . .	11
1.2.2	Lineare Inhomogene Differentialgleichungen . . . . .	12
1.2.3	Lineare Systeme (mit konstanten Koeffizienten) . . . . .	15
1.2.4	Lineare DGLs zweiter Ordnung (mit konstanten Koeffizienten) . . . . .	24
1.2.5	Lineare DGLs zweiter Ordnung (mit zeitabhängigen Koeffizienten) . . . . .	34
1.3	Integrale der Bewegung . . . . .	37
1.3.1	Exakte Differentialgleichungen . . . . .	38
1.3.2	Gleichungen mit Energieerhaltung . . . . .	43
1.3.3	Das Fadenpendel . . . . .	47
<b>2</b>	<b>Existenz, Eindeutigkeit, Globalität und Wohlgestelltheit</b>	<b>52</b>
2.1	Existenz und Eindeutigkeit . . . . .	52
2.1.1	Thematischer Überblick . . . . .	52
2.1.2	Lipschitz-Bedingungen . . . . .	55
2.1.3	Anfangswertprobleme als Fixpunktgleichung . . . . .	61
2.1.4	Beweis des (globalen) Satzes von Picard-Lindelöf . . . . .	67
2.1.5	Einige Worte zum Satz von Peano . . . . .	71
2.1.6	Der Eindeutigkeitssatz . . . . .	80
2.1.7	Beweis des (lokalen) Satzes von Picard-Lindelöf . . . . .	82
2.2	Die Maximale Lösung . . . . .	85
2.2.1	Thematischer Überblick . . . . .	85
2.2.2	Der Maximalitätsdetektor . . . . .	87
2.2.3	Das Lemma von Gronwall . . . . .	90
2.2.4	Ein Globalitätskriterium . . . . .	94
2.3	Lineare Differentialgleichungen - Teil 2 . . . . .	96
2.4	Wohlgestelltheit . . . . .	102

<b>3</b>	<b>Anwendung: Das SIR-Pandemiemodell</b>	<b>111</b>
3.1	Modellierung einer Pandemie . . . . .	111
3.2	Mathematische Eigenschaften des Modells . . . . .	112
3.2.1	Existenz und Eindeutigkeit . . . . .	113
3.2.2	Zulässigkeit . . . . .	113
3.2.3	Rechtsglobalität . . . . .	115
3.2.4	Ein Integral der Bewegung . . . . .	116
3.3	Epidemiologische Phänomene . . . . .	117
3.3.1	Der Höhepunkt der Pandemie . . . . .	117
3.3.2	Herdenimmunität . . . . .	120
3.3.3	Pandemie und Endemie . . . . .	121
<b>4</b>	<b>Dynamische Systeme</b>	<b>121</b>
4.1	Autonome Differentialgleichungen . . . . .	122
4.1.1	Das induzierte dynamische System . . . . .	123
4.1.2	Bahnen . . . . .	126
4.2	Äquilibria und Stabilität . . . . .	127
4.2.1	Äquilibria . . . . .	127
4.2.2	Linearisierte Stabilität . . . . .	129
4.3	Invariante Mengen . . . . .	138
4.3.1	Ein Invarianzkriterium für abgeschlossene Mengen . . . . .	139
4.4	Bonussektion. Asymptotik . . . . .	145
4.4.1	Asymptotik planarer Systeme . . . . .	146
<b>5</b>	<b>Literaturhinweise</b>	<b>153</b>

# Einführung

Thema der Vorlesung sind Gleichungen der Form

$$(DGL) \quad y'(t) = f(t, y(t)) \quad (t \in I). \quad (1)$$

Das heißt

- *Gegeben.* Eine Funktion  $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^n)$  ( $G \subset \mathbb{R}^n$  Gebiet,  $n \in \mathbb{N}$ ) und  $I \subset \mathbb{R}$  offenes Intervall.
- *Gesucht.* Eine Funktion  $y \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$  mit  $y'(t) = f(t, y(t))$  für all  $t \in I$ . Eine solche Funktion nennen wir *Lösung*.

Falls  $n = 1$  so spricht man von einer *Differentialgleichung* (kurz: DGL), falls  $n > 1$  von einem *Differentialgleichungssystem* (kurz: DGL-System).

**Beispiel 1.** Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'(t) = t^3 \quad (t \in \mathbb{R}). \quad (2)$$

Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung sind alle Lösungen gegeben durch

$$y(t) = \frac{1}{4}t^4 + C \quad (3)$$

für ein  $C \in \mathbb{R}$ .

In dieser Vorlesung versuchen wir zu verstehen, ob und wieviele Lösungen zu einer gegebenen DGL existieren und wie das Verhalten einer solchen Lösung verstanden werden kann.

Letzteres ist besonders herausfordernd, denn nicht alle DGLs lassen sich explizit lösen.

**Beispiel 2.** Die DGL

$$y'(t) = e^{-t^2} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (4)$$

hat keine Lösung, die man mit elementaren Funktionen ausdrücken kann. Dies liegt daran, dass sich die Stammfunktion(en) von  $e^{-t^2}$  nicht mit elementaren Funktionen ausdrücken lassen.

Beispiel 1 (S. 3) zeigt, dass DGLs im Allgemeinen unendlich viele Lösungen haben. Weniger Lösungen sind zu erwarten, wenn man *Anfangswertprobleme* (AWP) studiert. Diese sind in unserer Vorlesung stets von der Form

$$(AWP) \quad \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & (t \in I) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}, \quad (5)$$

für fest vorgegebene  $t_0 \in I, y_0 \in G$ .

**Beispiel 3.** Das AWP

$$\begin{cases} y'(t) = y(t) & (t \in \mathbb{R}) \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (6)$$

hat (wie man durch Ableiten nachrechnet) die Lösung  $y(t) = e^t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

*Behauptung.* Es gibt keine weiteren Lösungen, d.h. die Lösung ist *eindeutig*.

*Beweis.* Es sei  $\bar{y} \in C^1(\mathbb{R})$  eine weitere Lösung. Definiere  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$h(t) := e^{-t}\bar{y}(t) \quad (7)$$

Dann gilt

$$h'(t) = \frac{d}{dt}(e^{-t}\bar{y}(t)) = -e^{-t}\bar{y}(t) + e^{-t}\bar{y}'(t) = -e^{-t}\bar{y}(t) + e^{-t}\bar{y}(t) = 0. \quad (8)$$

Somit ist  $h$  konstant, d.h.

$$h(t) = h(0) = e^0\bar{y}(0) = 1. \quad (9)$$

Mit (7) folgt  $\bar{y}(t) = e^t = y(t)$ .

Nicht für jedes AWP sind Lösungen eindeutig.

**Beispiel 4.** Das AWP

$$\begin{cases} y'(t) = 2\sqrt{|y(t)|} & (t \in \mathbb{R}) \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad (10)$$

hat keine eindeutige Lösung. Man zeigt durch direktes Nachrechnen, dass für alle  $a \geq 0$  die Funktion

$$y_a(t) := \begin{cases} 0 & t \in (-\infty, a] \\ (t-a)^2 & t \in (a, \infty) \end{cases} \quad (11)$$

eine Lösung ist. Vergessen Sie dabei nicht (HA), zu zeigen, dass  $y_a \in C^1(\mathbb{R})$ .

Wir werden im Laufe der Vorlesung sehen, unter welchen Bedingungen an  $f$  und  $I$  Anfangswertprobleme eindeutig lösbar sind. Es ist hierbei wichtig, dass auch Bedingungen an das Intervall  $I$  vonnöten sind.

**Beispiel 5.** Das AWP

$$(AWP1) \quad \begin{cases} y'(t) = y(t)^2 & (t \in \mathbb{R}) \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (12)$$

besitzt keine Lösung, das AWP

$$(AWP2) \quad \begin{cases} y'(t) = y(t)^2 & (t \in (-\infty, 1)) \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (13)$$

jedoch schon.

*Beweis.* Für (AWP2) rechnet man explizit nach (HA), dass  $y(t) := \frac{1}{1-t}$  eine Lösung ist. Nun zu (AWP1). Nehmen wir an es gäbe eine Lösung  $\bar{y} \in C^1(\mathbb{R})$ . Setze

$$t_1 := \sup\{t \in [0, 1] : \bar{y}|_{[0,t]} > 0\}. \quad (14)$$

Da  $\bar{y}(0) = 1$  gilt  $t_1 > 0$ . Man vergewissert sich leicht (HA), dass  $\bar{y}|_{[0,t_1]} > 0$ . Setze nun  $h : [0, t_1) \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$h(t) = \frac{1}{\bar{y}(t)}. \quad (15)$$

Dann gilt

$$h'(t) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\bar{y}(t)} \right) = -\frac{1}{\bar{y}(t)^2} \bar{y}'(t) = -\frac{1}{\bar{y}(t)^2} y(t)^2 = -1 \quad \forall t \in [0, t_1). \quad (16)$$

Es folgt

$$h(t) = h(0) + \int_0^t h'(s) \, ds = \frac{1}{y(0)} + \int_0^t (-1) \, ds = 1 - t \quad \forall t \in [0, t_1). \quad (17)$$

Mit (15) folgt

$$\bar{y}(t) = \frac{1}{1-t} \quad \forall t \in [0, t_1). \quad (18)$$

*Fall 1.*  $t_1 < 1$ . Dann gilt  $y(t_1) = 0$  (HA). Somit

$$0 = \lim_{t \rightarrow t_1^-} y(t) = \lim_{t \rightarrow t_1^-} \frac{1}{1-t} = \frac{1}{1-t_1}, \quad (19)$$

ein Widerspruch.

*Fall 2.*  $t_1 = 1$ . Da  $y \in C^1(\mathbb{R})$  ist  $y$  auf  $[0, 1]$  beschränkt. Jedoch gilt nach (18)  $y(t) = \frac{1}{1-t}$  für alle  $t \in [0, 1)$ , was der Beschränktheit widerspricht.

---

## Vorläufige Gliederung der Vorlesung.

1. **Explizite Lösungstechniken.** Wir wollen diskutieren, wie wir in den obigen Beispielen auf die Lösungen gekommen sind – und viele weitere.
2. **Wohlgestelltheorie von Picard-Lindelöf.** Wir werden den Satz von Picard-Lindelöf kennenlernen – und damit einen allgemeinen Satz über die eindeutige Lösbarkeit von Anfangswertproblemen.
3. **Anwendung: Das SIR-Pandemiemodell.** Wir diskutieren, wie Differentialgleichungen in der Modellierung auftauchen und wie man anwendungsrelevante Fragestellungen durch Untersuchung einer DGL beantworten kann.
4. **Dynamische Systeme.** Wir betrachten den Spezialfall, dass die rechte Seite der DGL nicht explizit zeitabhängig ist, d.h.  $f(t, z) = g(z)$  für ein  $g \in C^0(G)$ . In diesem Fall

lässt sich zu einer DGL ein sogenannter *Fluss* assoziieren. Diese Begrifflichkeit werden wir genauer untersuchen.

# 1 Explizite Lösungsverfahren

Frage: Wie kommt man auf explizite Formeln für Lösungen (siehe Beispiel 3,4,5)?

- **Gegeben.** (DGL)  $y'(t) = f(t, y(t)) \quad (t \in I)$  (mit  $f, I$  konkret gegeben).
- **Gesucht.** Darstellung von  $\mathbb{L} = \{y \in C^1(I) : y \text{ Lösung von (DGL)}\}$ , der sog. *allgemeinen Lösungsmenge*.

## 1.1 Separation der Variablen

Die erste spezielle Kategorie von DGLs, die wir untersuchen sind DGLs mit getrennten Veränderlichen.

**DGL-Typ 6.** Eine *DGL mit getrennten Veränderlichen* ist von der Form

$$y'(t) = g(t)h(y(t)) \quad (t \in I), \quad (20)$$

wobei  $g \in C^0(I)$ ,  $h \in C^0(J)$ ,  $J \subset \mathbb{R}$  Intervall. (Das bedeutet  $y'(t) = f(t, y(t))$  für  $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(t, z) = g(t)h(z)$ .)

**Beispiel 7.** Betrachte  $y'(t) = a(t)y(t)$ ,  $(t \in I)$  für  $a \in C^0(I; \mathbb{R})$ .

**Lösungsstrategie.** Wir nehmen zusätzlich **(A)**  $(y(t) > 0$  für alle  $t \in I)$  an. Dann

$$y'(t) = a(t)y(t). \quad (21)$$

$$\Rightarrow \frac{y'(t)}{y(t)} = a(t). \quad (22)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \log(y(t)) = a(t). \quad (23)$$

$$\Rightarrow \log(y(t)) = \int^t a(s) ds + \gamma \quad (\text{für ein } \gamma \in \mathbb{R}). \quad (24)$$

$$\Rightarrow y(t) = \exp\left(\int^t a(s) ds + \gamma\right) = \underbrace{e^\gamma}_{:=D} \exp\left(\int^t a(s) ds\right). \quad (25)$$

$$\Rightarrow y(t) = D \exp\left(\int^t a(s) ds\right) \quad \text{für ein } D > 0. \quad (26)$$

Gibt es noch weitere Lösungen, die Annahme **(A)** nicht erfüllen?

**Ja**, zum Beispiel

$$\tilde{y}(t) = D \exp\left(\int^t a(s) ds\right) \quad \text{für ein } D \leq 0. \quad (27)$$

In der Tat,

$$\tilde{y}'(t) = D \exp\left(\int^t a(s) ds\right) a(t) = \tilde{y}(t)a(t). \quad (28)$$

Haben wir am Ende dieses Beispiels wirklich alle Lösungen gefunden?

**Satz 8.** Es sei  $a \in C^0(I; \mathbb{R})$  und gegeben sei

$$y'(t) = a(t)y(t) \quad (t \in I). \quad (29)$$

Dann gilt

$$\mathbb{L} = \left\{ y \in C^1(I; \mathbb{R}) : y(t) = D \exp\left(\int^t a(s) ds\right) \text{ für ein } D \in \mathbb{R} \right\}. \quad (30)$$

**Beweis.** ‘ $\supset$ ’ folgt wie in (28) aus der Kettenregel. Nun zu ‘ $\subset$ ’. Sei  $\bar{y} \in C^1(I)$  eine Lösung. Definiere  $z : I \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$z(t) := \exp\left(-\int^t a(s) ds\right) \bar{y}(t). \quad (31)$$

Dann gilt

$$z'(t) = \frac{d}{dt} \left( \exp\left(-\int^t a(s) ds\right) \bar{y}(t) \right) \quad (32)$$

$$= -a(t) \exp\left(-\int^t a(s) ds\right) \bar{y}(t) + \exp\left(-\int^t a(s) ds\right) \underbrace{\bar{y}'(t)}_{=a(t)\bar{y}(t)} \quad (33)$$

$$= -a(t) \exp\left(-\int^t a(s) ds\right) \bar{y}(t) + \exp\left(-\int^t a(s) ds\right) (a(t)\bar{y}(t)) = 0. \quad (34)$$

Es folgt, dass  $z \equiv \text{const.}$ , d.h.  $\exists D \in \mathbb{R} : z(t) = D$  für alle  $t \in I$ . Daher

$$\exists D > 0 : \exp\left(-\int^t a(s) ds\right) \bar{y}(t) = D \quad \forall t \in I. \quad (35)$$

$$\Rightarrow \exists D > 0 : \bar{y}(t) = D \exp\left(\int^t a(s) ds\right) \quad \forall t \in I. \quad (36)$$

**Beispiel 9.** Wir lösen

$$\begin{cases} y'(t) = 3ty(t) & (t \in \mathbb{R}) & \text{(DGL)} \\ y(1) = 2 & & \text{(AW)} \end{cases}. \quad (37)$$

$$(DGL) \quad \underset{\text{Satz 8}}{\Rightarrow} \quad \exists D > 0 : \quad y(t) = D \exp \left( \int^t (3s) \, ds \right) = D e^{\frac{3}{2}t^2}. \quad (38)$$

$$(AW) \quad \Rightarrow \quad 2 = y(1) = D e^{\frac{3}{2}(1)^2} = D e^{\frac{3}{2}} \quad \Rightarrow \quad D = 2e^{-\frac{3}{2}}. \quad (39)$$

Die eindeutige Lösung ist also

$$y(t) = 2e^{-\frac{3}{2}} e^{\frac{3}{2}t^2} \quad (t \in \mathbb{R}). \quad (40)$$

**Anwendung 10.** Wir diskutieren die Bedeutung der DGL

$$y'(t) = \alpha y(t) \quad (t \in \mathbb{R}). \quad (41)$$

**Frage.** Was modelliert diese DGL?

Sei  $y$  eine Lösung. Für  $h > 0$  sehr klein gilt

$$\frac{y(t+h) - y(t)}{h} \approx \alpha y(t), \quad (42)$$

d.h.

$$y(t+h) \approx y(t) + \alpha y(t)h. \quad (43)$$

Stellen wir uns eine Hasenpopulation vor. Wir wollen die zeitliche Entwicklung des Populationsbestands beschreiben. Für kleine  $h > 0$  gilt (angenommen keine Hasen sterben)

$$\begin{pmatrix} \text{Hasenbestand} \\ \text{zum Zeitpunkt } t+h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Hasenbestand} \\ \text{zum Zeitpunkt } t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{Neugeborene} \\ \text{Hasen in } (t, t+h) \end{pmatrix}. \quad (44)$$

Wir gehen davon aus, dass die Anzahl der Neugeburten an einem Tag (d.h. zwischen  $t$  und  $t+1$ ) proportional zur Populationsstärke am Anfang des Tages ist, d.h.

$$\begin{pmatrix} \text{Neugeborene} \\ \text{Hasen in } (t, t+1) \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} \text{Hasenbestand} \\ \text{zum Zeitpunkt } t \end{pmatrix} \quad (45)$$

Die Proportionalitätskonstante  $\alpha$  heißt *Geburtenrate*. Die Geburten dürfen über den Tag gleichverteilt angenommen werden, d.h. für  $h \ll 1$  gilt

$$\begin{pmatrix} \text{Neugeborene} \\ \text{Hasen in } (t, t+h) \end{pmatrix} \approx \alpha \cdot \begin{pmatrix} \text{Hasenbestand} \\ \text{zum Zeitpunkt } t \end{pmatrix} \cdot h. \quad (46)$$

Bezeichne nun für  $t \in [0, \infty)$  der Wert  $y(t)$  den Hasenbestand zum Zeitpunkt  $t$ . Mit (44) und (46) gilt

$$y(t+h) \approx y(t) + \alpha y(t)h, \quad (47)$$

also erfüllt  $y : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  (43). Somit modelliert (43) (und daher auch (41)) *Populationswachstum mit konstanter Geburtenrate*. Lösungen von (41) sind (siehe Satz 8) gegeben durch  $y(t) = D e^{\alpha t}$  für ein  $D \in \mathbb{R}$ . Man spricht von *exponentiellem Wachstum*.



Wir vertiefen nun noch die sog. *Separationstechnik*, d.h. die in (21)-(26) angewendete Lösungsstrategie.

**Beispiel 11.** Betrachte

$$\text{(DGL)} \quad y'(t) = y(t)^2 \quad (t \in (a, b)). \quad (48)$$

**Lösungsstrategie.** Wir nehmen zusätzlich **(A)** ( $y(t) \neq 0$  für alle  $t \in (a, b)$ ) an.

$$\text{(Separieren)} \quad \Rightarrow \quad \frac{y'(t)}{y(t)^2} = 1. \quad (49)$$

$$\text{(Integrieren)} \quad \Rightarrow \quad \int^t \frac{y'(s)}{y(s)^2} ds = t + \gamma \quad \text{für ein } \gamma \in \mathbb{R}. \quad (50)$$

$$\text{(Substituieren } u = y(s)) \quad \Rightarrow \quad \int^{y(t)} \frac{1}{u^2} du = t + \gamma. \quad (51)$$

$$\Rightarrow \quad \left[-\frac{1}{u}\right]^{y(t)} = t + \gamma. \quad (52)$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{y(t)} = t + \gamma. \quad (53)$$

$$\text{(Auflösen)} \quad \Rightarrow \quad y(t) = -\frac{1}{t + \gamma}. \quad (54)$$

Der letzte Schritt ist nur zulässig, falls  $t + \gamma \neq 0$  für alle  $t \in (a, b)$ , d.h.  $-\gamma \notin (a, b)$ . Falls  $-\gamma \in (a, b)$  ergibt sich ein Widerspruch zu (53).

Gibt es weitere Lösungen, die **(A)** nicht erfüllen? Laut ÜA2 auf Blatt 1 gilt für jede Lösung der (DGL)

$$y(t_0) = 0 \quad \text{für ein } t_0 \in (a, b) \quad \Rightarrow \quad y \equiv 0. \quad (55)$$

Daher erfüllen alle Lösungen bis auf die Nullfunktion die Annahme **(A)** und

$$\mathbb{L} = \{0\} \cup \left\{ y \in C^1((a, b); \mathbb{R}) : y(t) = -\frac{1}{t + \gamma} \text{ für ein } \gamma \in \mathbb{R} : -\gamma \notin (a, b) \right\}. \quad (56)$$

Das vorige Beispiel liefert auch die Lösungsformel in Beispiel 5. Der folgende Satz formalisiert die vorhin kennengelernte Separationstechnik.

**Satz 12.** Sei  $g \in C^0(I; \mathbb{R})$ ,  $h \in C^0(\mathbb{R})$ ,  $h(z) \neq 0 \forall z \in \mathbb{R}$ . Gegeben sei

$$y'(t) = g(t)h(y(t)) \quad (t \in I). \quad (57)$$

Sei  $G$  eine Stammfunktion von  $g$  und  $H$  eine Stammfunktion von  $\frac{1}{h}$ . Dann ist  $H$  invertierbar und

$$\mathbb{L} = \{y \in C^1(I; \mathbb{R}) : y(t) = H^{-1}(G(t) + c), \text{ für ein } c \in \mathbb{R} \text{ sd. } G(I) + c \subset H(\mathbb{R})\}. \quad (58)$$

**Beweis.** Zu ‘ $H$  invertierbar’: siehe ÜA 3 auf Blatt 1. Zur Lösungsformel:

$$y'(t) = g(t)h(y(t)) \quad \forall t \in I. \quad (59)$$

$$\begin{array}{l} \iff \\ h \neq 0 \end{array} \quad \frac{y'(t)}{h(y(t))} = g(t) \quad \forall t \in I. \quad (60)$$

$$\iff \quad \exists c \in \mathbb{R} : \quad \int^t \frac{y'(s)}{h(y(s))} ds = G(t) + c \quad \forall t \in I. \quad (61)$$

$$\begin{array}{l} \iff \\ u=y(s) \end{array} \quad \exists c \in \mathbb{R} : \quad \int^{y(t)} \frac{1}{h(u)} du = G(t) + c \quad \forall t \in I. \quad (62)$$

$$\iff \quad \exists c \in \mathbb{R} : \quad H(y(t)) = G(t) + c \quad \forall t \in I. \quad (63)$$

$$\iff \quad \exists c \in \mathbb{R} : \quad H(\mathbb{R}) \subset G(I) + c \text{ und } y(t) = H^{-1}(G(t) + c) \quad \forall t \in I. \quad (64)$$

### 1.1.1 Eulerhomogene Differentialgleichungen

Nicht alle DGLs haben getrennte Veränderliche. Manche lassen sich aber auf eine solche Gestalt bringen.

**DGL-Typ 13.** Eine *eulerhomogene DGL* ist von der Form

$$z'(t) = k\left(\frac{z(t)}{t}\right) \quad (t \in I), \quad (65)$$

wobei  $k \in C^0(I; \mathbb{R})$ ,  $I \subset (0, \infty)$ .

**Lösungsstrategie 14.** Es löse  $z \in C^1(I; \mathbb{R})$  die Gleichung  $z'(t) = k\left(\frac{z(t)}{t}\right)$ ,  $(t \in I)$ .

**Substitution.** Setze  $y(t) := \frac{z(t)}{t}$ . Dann gilt

$$y'(t) = \frac{1}{t}z'(t) + \left(-\frac{1}{t^2}\right)z(t) = \frac{1}{t}k\left(\frac{z(t)}{t}\right) - \frac{1}{t}\frac{z(t)}{t} \quad (66)$$

$$= \frac{1}{t}k(y(t)) - \frac{1}{t}y(t) = \frac{1}{t}(k(y(t)) - y(t)) = g(t)h(y(t)), \quad (67)$$

wobei  $g(t) = \frac{1}{t}$  und  $h(z) = k(z) - z$ . Somit lässt sich  $y$  durch Lösen einer DGL mit getrennten Veränderlichen bestimmen. Resubstitution liefert eine Formel für  $z$ .

**Beispiel 15.** Betrachte

$$z'(t) = \frac{z(t)^2}{t^2} + \frac{z(t)}{t} + 1 \quad (t \in I), \quad (68)$$

d.h.  $k(z) := z^2 + z + 1$ .

**Substitution.** Dann löst  $y(t) := \frac{z(t)}{t}$

$$y'(t) = \frac{1}{t}(k(y(t)) - y(t)) = \frac{1}{t}(y(t)^2 + 1). \quad (69)$$

Das heißt

$$\frac{y'(t)}{1+y(t)^2} = \frac{1}{t} \quad \Rightarrow \quad \int^t \frac{y'(s)}{1+y(s)^2} ds = \log(t) + \gamma \quad \text{für ein } \gamma \in \mathbb{R}. \quad (70)$$

$$\Rightarrow \int^{y(t)} \frac{1}{1+u^2} du = \log(t) + \gamma. \quad \Rightarrow \quad \arctan(y(t)) = \log(t) + \gamma. \quad (71)$$

Man erhält  $y(t) = \tan(\log(t) + \gamma)$  für ein  $\gamma \in \mathbb{R}$  (so gewählt, dass der Ausdruck auf  $I$  definiert ist).

**Resubstitution.** Man hat

$$\frac{z(t)}{t} = \tan(\log(t) + \gamma) \quad (72)$$

und somit

$$z(t) = t \cdot \tan(\log(t) + \gamma). \quad (73)$$

Man beachte: Dies ist nur eine Lösung falls  $\gamma \in \mathbb{R}$  so, dass der Ausdruck auf ganz  $I$  definiert ist.

## 1.2 Lineare Differentialgleichungen - Teil 1

### 1.2.1 Lineare Homogene Differentialgleichungen

**DGL-Typ 16.** Eine *lineare homogene DGL* ist von der Form

$$y'(t) = a(t)y(t) \quad (t \in I) \quad (74)$$

für ein  $a \in C^0(I; \mathbb{C})$ , ( $I \subset \mathbb{R}$  Intervall).

Man beachte, dass wir hier  $a$  komplexwertig zulassen. Unsere Lösungen sind in diesem Fall auch in  $C^1(I; \mathbb{C})$  zu suchen. Die DGL heißt wegen folgender Beobachtung “linear”:

**Proposition 17.** Sei  $a \in C^0(I; \mathbb{C})$ . Dann ist

$$\mathbb{L} = \{y \in C^1(I; \mathbb{C}) : y'(t) = a(t)y(t) \quad \forall t \in I\} \quad (75)$$

ein linearer Unterraum von  $C^1(I; \mathbb{C})$ .

**Beweis.** Seien  $y_1, y_2 \in \mathbb{L}$  und  $\lambda, \nu \in \mathbb{C}$ .  $\forall \lambda y_1 + \mu y_2 \in \mathbb{L}$ .

$$(\lambda y_1 + \mu y_2)'(t) = \lambda y_1'(t) + \mu y_2'(t) = \lambda a(t)y_1(t) + \mu a(t)y_2(t) \quad (76)$$

$$= a(t)(\lambda y_1(t) + \mu y_2(t)) = a(t)(\lambda y_1 + \mu y_2)(t). \quad (77)$$

Analog zu Satz 8 formulieren wir

**Satz 18.** Es sei  $a \in C^0(I; \mathbb{C})$ . Gegeben sei die DGL

$$y'(t) = a(t)y(t) \quad (t \in I). \quad (78)$$

Dann gilt

$$\mathbb{L} = \left\{ y \in C^1(I; \mathbb{C}) : y(t) = D \exp \left( \int^t a(s) \, ds \right) \text{ für ein } D \in \mathbb{C} \right\}. \quad (79)$$

**Beweis.** Analog zu Satz 8.

Insbesondere sieht man an (79), dass  $\dim \mathbb{L} = 1$ .

### 1.2.2 Lineare Inhomogene Differentialgleichungen

**DGL-Typ 19.** Eine *lineare inhomogene DGL* ist von der Form

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t) \quad (t \in I), \quad (80)$$

wobei  $a, b \in C^0(I; \mathbb{C})$ .

**Satz 20.** Es seien  $a, b \in C^0(I; \mathbb{C})$  und die DGL  $y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$ ,  $(t \in I)$  gegeben. Dann gilt

$$\mathbb{L} = \left\{ y \in C^1(I; \mathbb{C}) : \exists c \in \mathbb{C} : y(t) = e(t) \left( c + \int^t \frac{b(u)}{e(u)} \, du \right) \right\}, \quad (81)$$

wobei

$$e(t) := \exp \left( \int^t a(s) \, ds \right). \quad (82)$$

**Beweis.** Zu '⊃'. Man rechnet leicht nach, dass  $e'(t) = a(t)e(t)$  für alle  $t \in I$ . Für  $z(t) := e(t) \left( c + \int^t \frac{b(u)}{e(u)} \, du \right)$  gilt dann

$$z'(t) = \underbrace{e'(t)}_{=a(t)e(t)} \left( c + \int^t \frac{b(u)}{e(u)} \, du \right) + e(t) \left( \frac{b(t)}{e(t)} \right) \quad (83)$$

$$= a(t)e(t) \left( c + \int^t \frac{b(u)}{e(u)} \, du \right) + b(t) = a(t)z(t) + b(t). \quad (84)$$

Zu 'C'. Sei  $y \in C^1(I; \mathbb{C})$  eine Lösung. Definiere

$$v(t) := \frac{y(t)}{e(t)} = \exp\left(-\int^t a(s) ds\right) y(t). \quad (85)$$

Dann gilt

$$v'(t) = -a(t) \exp\left(-\int^t a(s) ds\right) y(t) + \exp\left(-\int^t a(s) ds\right) \underbrace{y'(t)}_{=a(t)y(t)+b(t)} \quad (86)$$

$$= -a(t) \frac{1}{e(t)} y(t) + \frac{1}{e(t)} (a(t)y(t) + b(t)) = \frac{b(t)}{e(t)}. \quad (87)$$

Man integriert und erhält für ein  $c \in \mathbb{C}$

$$v(t) = c + \int^t \frac{b(u)}{e(u)} du. \quad \Rightarrow \quad \frac{y(t)}{e(t)} = c + \int^t \frac{b(u)}{e(u)} du. \quad (88)$$

**Anmerkung 21.** In (82) hat man eine Konstante frei zu wählen, da man eine beliebige Stammfunktion von  $a$  bilden muss. Hat man für  $y_0 \in \mathbb{R}$  man das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) = a(t)y(t) + b(t) & (t \in I) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (89)$$

gegeben, so ist es günstig,  $e(t) = e^*(t) := \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right)$  zu wählen. Die eindeutige Lösung ist dann gegeben durch

$$y(t) = e^*(t) \left( y_0 + \int_{t_0}^t \frac{b(u)}{e^*(u)} du \right). \quad (90)$$

In der Tat,

$$y(t_0) = \underbrace{e^*(t_0)}_{=1} \left( y_0 + \int_{t_0}^{t_0} \frac{b(u)}{e^*(u)} du \right) = y_0. \quad (91)$$

**Methode 22.** Anstatt sich die Formel aus Satz 20 zu merken, kann man alternativ die Methode der *Variation der Konstanten* verwenden.

**Beispiel.** Gegeben die DGL

$$\underbrace{y'(t)}_{(LS)} = \underbrace{\frac{1}{t}y(t) + t^3}_{(RS)} \quad (t \in (0, \infty)). \quad (92)$$

**Ansatz.**  $y(t) \stackrel{!}{=} e(t)c(t)$  für ein  $c \in C^1((0, \infty); \mathbb{C})$ . Hierbei ist wie in (82)

$$e(t) = \exp\left(\int^t \frac{1}{s} ds\right) = \exp(\log t) = t, \quad (93)$$

also  $y(t) \stackrel{!}{=} tc(t)$ . Man finde nun eine Funktion  $c$ , die  $y$  zu einer Lösung macht. Es gilt

$$(LS) = y'(t) = \frac{d}{dt}(tc(t)) = c(t) + tc'(t), \quad (94)$$

$$(RS) = \frac{1}{t}y(t) + t^3 = \frac{1}{t}(tc(t)) + t^3 = c(t) + t^3. \quad (95)$$

Die Gleichheit  $(LS) = (RS)$  gilt also genau dann wenn

$$c(t) + tc'(t) = c(t) + t^3. \quad \Leftrightarrow \quad tc'(t) = t^3. \quad \Leftrightarrow \quad c'(t) = t^2. \quad (96)$$

Somit folgt  $c(t) = c + \frac{1}{3}t^3$  für ein  $c \in \mathbb{C}$  und daher

$$y(t) = tc(t) = t\left(c + \frac{1}{3}t^3\right). \quad (97)$$

Dieselbe Lösungsformel hätten wir auch mit Satz 20 erhalten können.

**Beispiel 23.** Gegeben ist für  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$

$$y'(t) = \alpha y(t) + \gamma e^{\beta t} \quad (t \in \mathbb{R}). \quad (98)$$

**Ansatz.**  $y(t) \stackrel{!}{=} e(t)c(t)$ , wobei  $c \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$  gesucht und

$$e(t) = \exp\left(\int^t \alpha ds\right) = \exp(\alpha t) = e^{\alpha t}, \quad (99)$$

also  $y(t) \stackrel{!}{=} e^{\alpha t}c(t)$ . Berechnen von linker und rechter Seite der DGL liefert

$$y'(t) = \alpha e^{\alpha t}c(t) + e^{\alpha t}c'(t), \quad (100)$$

$$\alpha y(t) + \gamma e^{\beta t} = \alpha e^{\alpha t}c(t) + \gamma e^{\beta t}. \quad (101)$$

Somit gilt  $y'(t) = \alpha y(t) + \gamma e^{\beta t}$  genau dann wenn

$$\alpha e^{\alpha t}c(t) + e^{\alpha t}c'(t) = \alpha e^{\alpha t}c(t) + \gamma e^{\beta t}. \quad (102)$$

$$\Leftrightarrow e^{\alpha t}c'(t) = \gamma e^{\beta t}. \quad (103)$$

$$\Leftrightarrow c'(t) = \gamma e^{(\beta-\alpha)t}. \quad (104)$$

Integrieren liefert eine Formel für  $c(t)$ . Beachte hier den Sonderfall  $\beta = \alpha$ .

$$c(t) = \begin{cases} c + \frac{\gamma}{\beta - \alpha} e^{(\beta - \alpha)t} & \alpha \neq \beta \\ c + \gamma t & \alpha = \beta \end{cases} \quad \text{für ein } c \in \mathbb{C}. \quad (105)$$

Man erhält

$$y(t) = e(t)c(t) = \begin{cases} ce^{\alpha t} + \frac{\gamma}{\beta - \alpha} e^{\beta t} & \alpha \neq \beta \\ e^{\alpha t} c + \gamma t e^{\alpha t} & \alpha = \beta \end{cases} \quad \text{für ein } c \in \mathbb{C}. \quad (106)$$

### 1.2.3 Lineare Systeme (mit konstanten Koeffizienten)

**DGL-Typ 24.** Eine lineares homogenes DGL-System (mit konstanten Koeffizienten) ist von der Form

$$y'(t) = Ay(t) \quad (t \in \mathbb{R}), \quad (107)$$

wobei  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  eine (konstante) Matrix ist. Gesucht wird eine Lösung  $y \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}^n)$ .

**Beispiel 25.** Gegeben ist die DGL  $y'(t) = Ay(t)$ , ( $t \in \mathbb{R}$ ), wobei

$$A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{für } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}. \quad (108)$$

Mit  $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$ ,  $y'(t) = \begin{pmatrix} y'_1(t) \\ \vdots \\ y'_n(t) \end{pmatrix}$  gilt

$$\begin{pmatrix} y'_1(t) \\ \vdots \\ y'_n(t) \end{pmatrix} = y'(t) = Ay(t) = A \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 y_1(t) \\ \vdots \\ \lambda_n y_n(t) \end{pmatrix}. \quad (109)$$

Mit anderen Worten gilt  $y'_i(t) = \lambda_i y_i(t)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  und  $i = 1, \dots, n$ . Wir folgern aus Satz 18: Für alle  $i = 1, \dots, n$  existiert  $c_i \in \mathbb{C}$  mit

$$y_i(t) = c_i \exp\left(\int^t \lambda_i ds\right) = c_i e^{\lambda_i t}. \quad (110)$$

Somit

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}. \quad (111)$$

(Die letzte Gleichheit ist rückwärts gelesen wesentlich leichter zu verstehen als vorwärts!)  
 Man erhält

$$\mathbb{L} = \{y \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}^n) : y(t) = E(t)c \text{ für ein } c \in \mathbb{C}^n\} \quad (112)$$

wobei die Matrix  $E(t) \in \mathbb{C}^{n \times n}$  gegeben ist durch

$$E(t) := \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}. \quad (113)$$

**Beispiel 26.** Gegeben ist die DGL  $y'(t) = Ay(t)$ , ( $t \in \mathbb{R}$ ) mit  $A$  diagonalisierbar, d.h.

$$\exists S \in \mathbb{C}^{n \times n} \text{ invertierbar, s.d. } S^{-1}AS = D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \text{ für } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}. \quad (114)$$

Wir formen um

$$y'(t) = Ay(t) \Leftrightarrow y'(t) = SDS^{-1}y(t) \Leftrightarrow S^{-1}y'(t) = DS^{-1}y(t). \quad (115)$$

**Substitution.**  $z(t) := S^{-1}y(t)$ . Wir erhalten (für  $t \in \mathbb{R}$ )

$$z'(t) = S^{-1}y'(t) = DS^{-1}y(t) = D(S^{-1}y(t)) = Dz(t). \quad (116)$$

Da  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  folgt mit Beispiel 25

$$z(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \cdot c \quad \text{für ein } c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n. \quad (117)$$

**Resubstitution.**  $S^{-1}y(t) = z(t)$  folgt  $y(t) = Sz(t)$  und damit

$$y(t) = S \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \cdot c \quad \text{für ein } c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n. \quad (118)$$

Somit

$$\mathbb{L} = \{y \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}^n) : y(t) = E(t)c \text{ für ein } c \in \mathbb{C}^n\}, \quad (119)$$

wobei hier

$$E(t) = S \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}. \quad (120)$$



**Anmerkung 27.** Für ein *inhomogenes System*, d.h. ein System der Form

$$\underbrace{y'(t)}_{(LS)} = \underbrace{Ay(t) + b(t)}_{(RS)}. \quad (121)$$

für  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  diagonalisierbar führt der Ansatz der *Variation der Konstanten*

$$y(t) \stackrel{!}{=} E(t)c(t) \quad (122)$$

mit  $E(t)$  wie in (120) und  $c \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}^n)$  gesucht stets zum Ziel. Warum? Es sei  $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$  mit  $S^{-1}AS = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . Dann gilt nach (120)

$$E(t) = S \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}. \quad (123)$$

Somit gilt

$$E'(t) = S \begin{pmatrix} \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \stackrel{\text{lies rückwärts}}{=} S \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \quad (124)$$

$$= S \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \stackrel{(123)}{=} S \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) S^{-1} E(t) = AE(t). \quad (125)$$

Daher

$$(LS) = y'(t) = E'(t)c(t) + E(t)c'(t) = AE(t)c(t) + E(t)c'(t), \quad (126)$$

$$(RS) = Ay(t) + b(t) = A(E(t)c(t)) + b(t). \quad (127)$$

Setzen wir  $(LS) \stackrel{!}{=} (RS)$  und lösen auf, so erhalten wir  $E(t)c'(t) = b(t)$ . Dies lässt sich (weil  $E(t)$  invertierbar ist) stets nach  $c'(t)$  auflösen. Somit lässt sich das gesuchte  $c$  bestimmen.

Im Allgemeinen sind Matrizen nicht zwingend diagonalisierbar. Jedoch besitzen alle (über  $\mathbb{C}$ ) eine *Jordan-Normalform*. Diese werden wir nutzen, um alle linearen Systeme zu lösen.

**Wiederholung 28. JORDAN-NORMALFORM.** Es sei  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  beliebig. Dann gibt es  $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$  invertierbar mit

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} J_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & J_r \end{pmatrix}, \quad (128)$$

wobei  $J_m \in \mathbb{C}^{d_m \times d_m}$ ,  $d_m \geq 1$ ,  $d_1 + \dots + d_r = n$  sog. *Jordanblöcke*, d.h.

$$J_m = \begin{pmatrix} \lambda_m & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_m \end{pmatrix} = \lambda_m I + N, \quad (129)$$

mit  $N = (n_{ij})_{i,j=1,\dots,d_m} \in \mathbb{C}^{d_m \times d_m}$  mit

$$n_{ij} := \begin{cases} 1 & j = i + 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (130)$$

(Man beachte, dass aus  $d_m = 1$   $N = 0$  folgt.)

**Methode 29.** Gegeben eine DGL der Gestalt  $y'(t) = Ay(t)$ , ( $t \in \mathbb{R}$ ) mit  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  beliebig.

**Lösungsstrategie.** Finde die Jordan-Normalform von  $A$ , d.h.  $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$  invertierbar und Jordanblöcke  $J_m = \lambda_m I + N \in \mathbb{C}^{d_m \times d_m}$  (wobei  $N$  wie in (130)) derart, dass

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} J_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & J_r \end{pmatrix}. \quad (131)$$

Setze nun  $z(t) := S^{-1}y(t)$  und berechne

$$z'(t) = S^{-1}y'(t) = S^{-1}Ay(t) = S^{-1}AS(S^{-1}y(t)) = \begin{pmatrix} J_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & J_r \end{pmatrix} z(t) \quad (132)$$

Sei nun  $z_{(1)}$  die ersten  $d_1$  Komponenten von  $z$ ,  $z_{(2)}$  die darauffolgenden  $d_2$  Komponenten

usw... Das bedeutet  $z(t) = \begin{pmatrix} z_{(1)}(t) \\ \vdots \\ z_{(r)}(t) \end{pmatrix}$ . Dann gilt

$$\begin{pmatrix} z'_{(1)}(t) \\ \vdots \\ z'_{(r)}(t) \end{pmatrix} = z'(t) = \begin{pmatrix} J_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & J_r \end{pmatrix} z(t) \quad (133)$$

$$= \begin{pmatrix} J_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & J_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{(1)}(t) \\ \vdots \\ z_{(r)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1 z_{(1)}(t) \\ \vdots \\ J_r z_{(r)}(t) \end{pmatrix}, \quad (134)$$

also  $z'_{(m)}(t) = J_m z_{(m)}(t) = (\lambda_m I + N)z_{(m)}(t)$  für alle  $m = 1, \dots, r$ . Wir merken: Es genügt völlig, wenn wir für alle  $\lambda \in \mathbb{C}$  und  $d \in \mathbb{N}$  lineare Systeme der Form

$$z'(t) = (\lambda I + N)z(t) \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (135)$$

(für  $N \in \mathbb{C}^{d \times d}$  wie in (130)) lösen können. Wie man solche Systeme lösen kann werden wir im folgenden Beispiel besprechen.

**Beispiel 30.** Wir betrachten für  $\lambda \in \mathbb{C}$  und  $d = 2$  den  $d \times d$ -Jordanblock  $J = \lambda I + N$ , wobei  $N \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$  wie in (130). Also studieren wir

$$z'(t) = (\lambda I + N)z(t) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} z(t). \quad (136)$$

Wir haben also

$$\begin{pmatrix} z'_1(t) \\ z'_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} z'_1(t) = \lambda z_1(t) + z_2(t) \\ z'_2(t) = \lambda z_2(t) \end{cases}. \quad (137)$$

Aus der zweiten Gleichung folgt (mit Satz 8)  $z_2(t) = c_2 e^{\lambda t}$  für ein  $c_2 \in \mathbb{C}$ . Die erste Gleichung wird dann nach Einsetzen zu einer linearen inhomogenen DGL

$$z'_1(t) = \lambda z_1(t) + c_2 e^{\lambda t}. \quad (138)$$

Mit Beispiel 23 folgt

$$z_1(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t} \quad \text{für ein } c_1 \in \mathbb{C}. \quad (139)$$

Daher gilt

$$z(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} c_1 + t e^{\lambda t} c_2 \\ e^{\lambda t} c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & t e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad (140)$$

und somit

$$\mathbb{L} = \{z \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2) : z(t) = E(t)c \text{ für ein } c \in \mathbb{C}^2\}, \quad (141)$$

wobei

$$E(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & t e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}. \quad (142)$$

Für Jordanblöcke mit höherer Dimension  $d > 2$  kann man analog zum obigen Beispiel iterativ eine Formel herleiten.

**Proposition 30.** Es sei für  $\lambda \in \mathbb{C}$  das System  $z'(t) = (\lambda I + N)z(t)$  in  $\mathbb{C}^{d \times d}$  gegeben,

wobei  $N \in \mathbb{C}^{d \times d}$  wie in (130). Dann gilt für

$$M(t) := \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{t^2 e^{\lambda t}}{2} & \dots & \frac{t^{d-2} e^{\lambda t}}{(d-2)!} & \frac{t^{d-1} e^{\lambda t}}{(d-1)!} \\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \dots & \dots & \frac{t^{d-2} e^{\lambda t}}{(d-2)!} \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & & 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}, \quad (143)$$

d.h.  $M(t) = (m_{ij}(t))_{i,j=1,\dots,d}$  mit

$$m_{ij}(t) := \begin{cases} \frac{t^{j-i} e^{\lambda t}}{(j-i)!} & j \geq i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad (144)$$

dass

$$\mathbb{L} = \{z \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}^d) : z(t) = M(t)c \text{ für ein } c \in \mathbb{C}^d\}. \quad (145)$$

**Beweis.** Dies könnte man mit Induktion wie in Beispiel 30 folgern. Wir können aber ‘ $\supset$ ’ auch direkt nachrechnen. Definiert man

$$J := \lambda I + N = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \lambda \end{pmatrix} \quad (146)$$

Für alle  $\{i, j = 1, \dots, d\}$  mit  $i < j$  gilt nun nach der Produktregel

$$m'_{ij}(t) = \frac{t^{j-i-1} e^{\lambda t}}{(j-i-1)!} + \lambda \frac{t^{j-i} e^{\lambda t}}{(j-i)!} = m_{i+1,j}(t) + \lambda m_{ij}(t) = (e_{i+1} + \lambda e_i)^T \cdot \begin{pmatrix} m_{1j}(t) \\ \vdots \\ m_{dj}(t) \end{pmatrix}. \quad (147)$$

Beachte nun, dass für  $i < d$  der  $i$ -te Zeilenvektor von  $J$  gegeben ist durch  $e_{i+1} + \lambda e_i$ . Das bedeutet

$$J^T e_i = i\text{-te Spalte von } J^T = i\text{-te Zeile von } J = e_{i+1} + \lambda e_i. \quad (148)$$

Wir folgern für  $i, j \in \{1, \dots, d\}$  mit  $i < j$  (also insbesondere  $i < d$ )

$$m'_{ij}(t) = (e_{i+1} + \lambda e_i) \cdot \begin{pmatrix} m_{1j}(t) \\ \vdots \\ m_{dj}(t) \end{pmatrix} = (J^T e_i)^T \begin{pmatrix} m_{1j}(t) \\ \vdots \\ m_{dj}(t) \end{pmatrix} = e_i^T J \begin{pmatrix} m_{1j}(t) \\ \vdots \\ m_{dj}(t) \end{pmatrix} = e_i^T J M(t) e_j. \quad (149)$$

Mit anderen Worten gilt für  $i < j$

$$e_i^T M'(t) e_j = m'_{ij}(t) = e_i^T (JM(t)) e_j \quad (150)$$

Diese Gleichung gilt auch für  $i, j \in \{1, \dots, d\}$  mit  $i > j$  da alle o.g. Matrizen obere Dreiecksmatrizen sind und deswegen auf beiden Seiten von (150) Null steht. Für  $i = j$  ist es auch leicht, dies Gleichung nachzurechnen. Wir überlassen dies den Lesenden als Übungsaufgabe. Da  $e_i^T B e_j$  stets den  $i, j$ -ten Eintrag einer Matrix  $B$  liefert, folgern wir insgesamt  $M'(t) = JM(t)$ . Somit gilt für  $z_c(t) := M(t)c$  stets

$$z'_c(t) = M'(t)c = JM(t)c = Jz_c(t), \quad (151)$$

was ‘ $\supset$ ’ zeigt. Die andere Inklusion ‘ $\subset$ ’ muss (wie wir später herausfinden werden) gar nicht gezeigt werden, denn nach Korollar 122 ist  $\mathbb{L}$  ein Vektorraum der Dimension  $d$  und man überzeugt sich leicht wegen der Invertierbarkeit von  $M(t)$ , dass auch  $\{z \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}^d) : z(t) = M(t)c \text{ für ein } c \in \mathbb{C}^d\}$  auch ein Vektorraum der Dimension  $d$  ist. Die Gleichheit folgt.

Nun können wir also sämtliche Gleichungen der Form  $y'(t) = Ay(t)$  explizit lösen.

**Zusammenfassung 31.** Wir fassen hier den Spezialfall von linearen  $2 \times 2$ -Systemen zusammen. Weil es für  $2 \times 2$  Matrizen nicht so viele Möglichkeiten für Jordan-Normalformen gibt, finden wir explizite Lösungsformeln. Gegeben sei

$$y'(t) = Ay(t) \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (152)$$

für eine beliebige Matrix  $A \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ .

FALL 1.  $A$  diagonalisierbar, d.h.  $\exists S \in \mathbb{C}^{n \times n} : S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ ,  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ . Dann

$$\mathbb{L} = \{z \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2) : z(t) = E(t)c \text{ für ein } c \in \mathbb{C}^2\}, \quad E(t) = S \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}. \quad (153)$$

FALL 2.  $A$  nicht diagonalisierbar, d.h.  $\exists S \in \mathbb{C}^{n \times n} : S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Dann

$$\mathbb{L} = \{z \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2) : z(t) = E(t)c \text{ für ein } c \in \mathbb{C}^2\}, \quad E(t) = S \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}. \quad (154)$$

Wir sehen hier nochmal, dass es eine gute Idee war, in diesem Abschnitt über  $\mathbb{C}$  zu arbeiten – im Körper  $\mathbb{R}$  hat nämlich nicht jede Matrix eine Jordan-Normalform!

Ein Problem gibt es aber: Hat man eine DGL der Form  $y'(t) = Ay(t)$  mit einer reellwertigen(!) Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  gegeben, so hätte man auch gerne reellwertige Lösungen. Mit unseren Formeln bekommen wir das aber erstmal nicht: Hat  $A$  komplexe Eigenwerte, so ist zum Beispiel auch die Matrix  $E(t)$  in den Beispielen 25, 26 und 30 komplexwertig.

**Definition 32.** Es sei  $y'(t) = Ay(t)$ , ( $t \in \mathbb{R}$ ) mit einer Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  gegeben. Es sei  $\mathbb{L} \subset C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}^n)$  die allgemeine Lösung dieses Systems. Dann nennen wir  $\mathbb{L} \cap C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$  die *reelle allgemeine Lösung*.

Wir wollen eine Formel für die allgemeine reelle Lösung finden. Dazu benötigen wir:

**Lemma 33.** Gegeben sei  $y'(t) = Ay(t)$ , ( $t \in \mathbb{R}$ ) für ein  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Sei  $\mathbb{L} \subset C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}^n)$  die allgemeine Lösung. Dann ist  $\mathbb{L}$  ein linearer Unterraum von  $C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}^n)$ . Ferner ist für alle  $y \in \mathbb{L}$  auch  $\operatorname{Re}(y)$  und  $\operatorname{Im}(y)$  (komponentenweise gebildet) ein Element von  $\mathbb{L}$ .

**Beweis.** Die Unterraumeigenschaft zeigt man analog zu Proposition 17. Nun sei  $y \in \mathbb{L}$ .  $\mathbb{Z}$   $\operatorname{Re}(y) \in \mathbb{L}$ . Dies rechnet man mit den Eigenschaften aus Aufgabe 1 auf Blatt 3 nach:

$$\frac{d}{dt} \operatorname{Re}(y(t)) = \operatorname{Re}(y'(t)) = \operatorname{Re}(Ay(t)) \stackrel{A \in \mathbb{R}^{n \times n}}{=} A(\operatorname{Re}(y(t))). \quad (155)$$

Analog zeigt man  $\operatorname{Im}(y) \in \mathbb{L}$ .

Die folgende Proposition gibt eine Formel für die allgemeine reelle Lösung.

**Proposition 34.** Es sei für  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  das lineare System  $y'(t) = Ay(t)$ , ( $t \in \mathbb{R}$ ) gegeben. Die allgemeine Lösung habe die Gestalt

$$\mathbb{L} = \{y \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}^n) : y(t) = E(t)c \text{ für ein } c \in \mathbb{C}^n\} \quad (156)$$

mit  $E \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}^{n \times n})$  und (komponentenweise gelesen)

$$E(t) = \operatorname{Re}(E(t)) + i\operatorname{Im}(E(t)) \in \mathbb{C}^{n \times n} \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (157)$$

Dann gilt

$$\mathbb{L} \cap C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n) = \{y \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n) : y(t) = \operatorname{Re}(E(t))c_1 + \operatorname{Im}(E(t))c_2 \text{ für } c_1, c_2 \in \mathbb{R}^n\}. \quad (158)$$

**Beweis.** Zu ‘ $\subset$ ’. Sei  $y(t) \in \mathbb{L} \cap C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$ , d.h. zum Einen  $y(t) = E(t)c$  für ein  $c \in \mathbb{C}^n$  und zum Anderen  $y(t) = \operatorname{Re}(y(t))$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Nun

$$E(t)c = [\operatorname{Re}(E(t)) + i\operatorname{Im}(E(t))] [\operatorname{Re}(c) + i\operatorname{Im}(c)] \quad (159)$$

$$= \operatorname{Re}(E(t))\operatorname{Re}(c) - \operatorname{Im}(E(t))\operatorname{Im}(c) + i(\operatorname{Re}(E(t))\operatorname{Im}(c) + \operatorname{Im}(E(t))\operatorname{Re}(c)). \quad (160)$$

Mit  $c_1 := \operatorname{Re}(c)$  und  $c_2 := -\operatorname{Im}(c)$  folgt

$$y(t) = \operatorname{Re}(y(t)) = \operatorname{Re}(E(t))\operatorname{Re}(c) - \operatorname{Im}(E(t))\operatorname{Im}(c) = \operatorname{Re}(E(t))c_1 + \operatorname{Im}(E(t))c_2. \quad (161)$$

Zu ‘ $\supset$ ’. Es sei  $y(t) = \operatorname{Re}(E(t))c_1 + \operatorname{Im}(E(t))c_2$  für  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^n$ .  $\mathbb{Z}$   $y \in \mathbb{L}$ . Wegen (156) definieren  $z_1(t) := E(t)c_1$  und  $z_2(t) := E(t)c_2$  Elemente aus  $\mathbb{L}$ . Nach Lemma 33 sind auch

$\operatorname{Re}(z_1), \operatorname{Im}(z_2) \in \mathbb{L}$ . Wiederum nach Lemma 33 gilt auch  $\operatorname{Re}(z_1) + \operatorname{Im}(z_2) \in \mathbb{L}$ . Nun

$$(\operatorname{Re}(z_1) + \operatorname{Im}(z_2))(t) = \operatorname{Re}(z_1(t)) + \operatorname{Im}(z_2(t)) = \operatorname{Re}(E(t)c_1) + \operatorname{Im}(E(t)c_2) \quad (162)$$

$$\stackrel{c_1, c_2 \in \mathbb{R}^n}{=} \operatorname{Re}(E(t)c_1 + \operatorname{Im}(E(t))c_2). \quad (163)$$

Die Behauptung folgt.

Ein wenig unbefriedigend ist, dass wir gar nicht so genau wissen, ob für jedes lineare System die allgemeine Lösung die Gestalt aus (156) hat. Später werden wir dies aber beweisen. Daher ist es in der Praxis auch immer der Fall, siehe z.B. Zusammenfassung 31.

Am Ende noch ein Wort zu Anfangswertproblemen.

**Proposition 35.** Es sei die DGL  $y'(t) = Ay(t)$ , ( $t \in \mathbb{R}$ ) für ein  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  gegeben. Die allgemeine Lösung habe die Gestalt

$$\mathbb{L} = \{y \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}^n) : y(t) = E(t)c \text{ für ein } c \in \mathbb{C}^n\} \quad (164)$$

wobei  $E(t) \in \mathbb{C}^{n \times n}$  invertierbar für alle  $t$ . Dann hat für  $t_0 \in \mathbb{R}$  und  $y_0 \in \mathbb{C}^n$  das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \tilde{y}'(t) = A\tilde{y}(t) & (t \in \mathbb{R}) \\ \tilde{y}(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (165)$$

die eindeutige Lösung  $\tilde{y}(t) := E(t)(E(t_0)^{-1}y_0)$ . Ist ferner  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $y_0 \in \mathbb{R}^n$  so gilt  $\tilde{y} \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$ .

**Beweis.** Sei  $\tilde{y}$  eine Lösung von (165). Da  $\tilde{y}$  die DGL löst gibt es ein  $c \in \mathbb{C}^n$  mit  $\tilde{y}(t) = E(t)c$ . Damit gilt

$$\tilde{y}(t_0) = y_0 \Leftrightarrow E(t_0)c = y_0 \Leftrightarrow c = E(t_0)^{-1}y_0. \quad (166)$$

Das Anfangswertproblem (165) ist also genau dann erfüllt wenn  $\tilde{y}(t) = E(t)(E(t_0)^{-1}y_0)$  — die Lösung ist also eindeutig festgelegt. Nun zum zweiten Teil der Behauptung. Sei nun  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $y_0 \in \mathbb{R}^n$ . Sei  $\tilde{y} \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}^n)$  eine Lösung des AWP (165), d.h.  $\tilde{y} \in \mathbb{L}$  und  $\tilde{y}(t_0) = y_0$ . **Z:**  $\tilde{y} \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$ . Aus Lemma 33 schließen wir, dass auch  $\operatorname{Re}(\tilde{y}) \in \mathbb{L}$ . Ferner gilt

$$\operatorname{Re}(\tilde{y})(t_0) = \operatorname{Re}(y(t_0)) = \operatorname{Re}(y_0) = y_0. \quad (167)$$

Somit löst also  $\operatorname{Re}(\tilde{y})$  dasselbe Anfangswertproblem wie  $\tilde{y}$ , nämlich (165). Da dieses AWP aber eine eindeutige Lösung hat, schließen wir  $\tilde{y} = \operatorname{Re}(\tilde{y}) \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$ .

Etwas unglücklich ist bei der obigen Proposition wieder, dass die Invertierbarkeit von  $E(t)$  vorausgesetzt werden muss. Wir werden später sehen, dass diese Invertierbarkeit immer gegeben ist, daher ist die Voraussetzung in der Praxis immer erfüllt.

### 1.2.4 Lineare DGLs zweiter Ordnung (mit konstanten Koeffizienten)

**DGL-Typ 36.** Eine *lineare (homogene) DGL zweiter Ordnung (mit konstanten Koeffizienten)* ist von der Form

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0 \quad (t \in \mathbb{R}), \quad (168)$$

wobei  $a, b \in \mathbb{C}$ . Die allgemeine Lösung ist in diesem Fall gegeben durch

$$\mathbb{L} := \{y \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}) : y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0 \forall t \in \mathbb{R}\}. \quad (169)$$

**Methode 37.** Gegeben sei die DGL  $y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0$  für  $a, b \in \mathbb{C}$ . Sei  $y$  eine Lösung. Setze

$$\begin{cases} z_0(t) := y(t) \\ z_1(t) := y'(t) \end{cases}. \quad (170)$$

**Behauptung:**  $z(t) := \begin{pmatrix} z_0(t) \\ z_1(t) \end{pmatrix}$  löst ein lineares System. Dazu berechnen wir

$$z'_0(t) = y'(t) = z_1(t), \quad (171)$$

$$z'_1(t) = y''(t) \stackrel{(DGL)}{=} -ay'(t) - by(t) = -az_1(t) - bz_0(t). \quad (172)$$

Somit

$$z'(t) = \begin{pmatrix} z'_0(t) \\ z'_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ -az_1(t) - bz_0(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0(t) \\ z_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} z(t). \quad (173)$$

Das obige lineare System können wir nun mittels Zusammenfassung 31 explizit lösen, nennen wir dessen allgemeine Lösung  $\tilde{\mathbb{L}}$ . Schauen wir nun zurück auf Gleichung (170) so lernen wir: Jede Lösung  $y$  ist die *erste Komponente* eines Elementes von  $\tilde{\mathbb{L}}$ . Mit anderen Worten

$$\mathbb{L} \subset \left\{ y \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}) : y(t) = \langle z(t), e_1 \rangle \text{ für ein } z \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}^2) \text{ mit } z'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} z(t) \right\}. \quad (174)$$

Hierbei ist  $\langle v, w \rangle := v^T \bar{w}$  das Skalarprodukt in  $\mathbb{C}^n$  und  $e_1 = (1, 0)^T$ . (Deswegen  $\langle v, e_1 \rangle \hat{=}$  erste Komponente von  $v$ ). Auf Übungsblatt 4 zeigen Sie, dass oben auch Gleichheit gilt.

Da wir alle zweidimensionalen Systeme explizit lösen können wären wir an der Stelle fertig. Wir wollen aber (für  $a, b \in \mathbb{R}$ ) eine explizitere Formel.

**Satz 38.** Es seien  $a, b \in \mathbb{R}$  und  $y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0, (t \in \mathbb{R})$  gegeben. Dann gilt



(1) Falls  $\frac{a^2}{4} - b > 0$  so definiere  $\lambda_{1,2} := -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$ . Es gilt

$$\mathbb{L} = \{y \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}) : y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \text{ für } c_1, c_2 \in \mathbb{C}\}. \quad (175)$$

(2) Falls  $\frac{a^2}{4} - b < 0$  so definiere  $\lambda_{1,2} := -\frac{a}{2} \pm i\sqrt{b - \frac{a^2}{4}}$ . Es gilt

$$\mathbb{L} = \{y \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}) : y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \text{ für } c_1, c_2 \in \mathbb{C}\}. \quad (176)$$

(3) Falls  $\frac{a^2}{4} - b = 0$  so definiere  $\lambda := -\frac{a}{2}$ . Es gilt

$$\mathbb{L} = \{y \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}) : y(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t} \text{ für } c_1, c_2 \in \mathbb{C}\}. \quad (177)$$

**Beweis.** Zuerst zu Fall (1) und (2), d.h.  $\frac{a^2}{4} - b \neq 0$ . Sei  $y$  eine Lösung. Wir wissen aus Methode 37, dass

$$y(t) = \langle z(t), e_1 \rangle \quad \text{für ein } z \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}^2) \text{ mit } z'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} z(t). \quad (178)$$

Wir setzen nun  $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$  und bestimmen die allgemeine Lösung von  $z'(t) = Az(t)$ .

**Zwischenbehauptung.**  $A$  ist diagonalisierbar. Dazu berechnen wir das charakteristische Polynom.

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -b & -a - \lambda \end{pmatrix} = (-\lambda)(-a - \lambda) + b = \lambda^2 + a\lambda + b. \quad (179)$$

Man sieht, dass (sowohl in Fall (1) als auch in Fall (2)) die Nullstellen des char. Polynom gerade durch  $\lambda_1, \lambda_2$  gegeben sind. Da  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  ist  $A$  diagonalisierbar. Daher gibt es  $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$  invertierbar so, dass  $S^{-1}AS = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ . Mit Zusammenfassung 31 folgt

$$z(t) = S \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \quad \text{für } d_1, d_2 \in \mathbb{C}. \quad (180)$$

Daher

$$y(t) = \langle z(t), e_1 \rangle = \left\langle S \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}, e_1 \right\rangle \stackrel{\langle Mv, w \rangle = \langle v, \bar{M}^T w \rangle}{=} \left\langle \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}, \bar{S}^T e_1 \right\rangle \quad (181)$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} d_1 \\ e^{\lambda_2 t} d_2 \end{pmatrix}, \bar{S}^T e_1 \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} d_1 \\ e^{\lambda_2 t} d_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \text{wobei } \bar{S}^T e_1 =: \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}. \quad (182)$$

Wir erhalten  $y(t) = d_1 \bar{v}_1 e^{\lambda_1 t} + d_2 \bar{v}_2 e^{\lambda_2 t}$ . Setzt man  $c_1 := d_1 \bar{v}_1$  und  $c_2 := d_2 \bar{v}_2$  so erhält man  $y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$ . Final folgt

$$\mathbb{L} \subset \{y \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}) : y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \text{ für } c_1, c_2 \in \mathbb{C}\}. \quad (183)$$

Durch direktes Nachrechnen zeigt man auch ‘ $\supset$ ’.

Nun zu Fall (3). Sei  $y$  eine Lösung. Wir definieren  $A$  wie oben, betrachten das Hilfssystem  $z'(t) = Az(t)$  und berechnen das char. Polynom von  $A$  exakt wie in (179). Dieses hat wegen der Annahme, dass  $\frac{a^2}{4} - b = 0$  nur eine Nullstelle  $\lambda = -\frac{a}{2}$  mit (algebraischer) Vielfachheit 2.

**Zwischenbehauptung.**  $A$  ist nicht diagonalisierbar. Hierzu zeigen wir, dass die geometrische Vielfachheit von  $\lambda$  strikt kleiner 2 ist. Betrachte dazu

$$A - \lambda I = A + \frac{a}{2}I = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} & 1 \\ -b & -\frac{a}{2} \end{pmatrix}. \quad (184)$$

Dies ist nicht die Nullmatrix, hat also  $\text{Rang} \geq 1$ . Für die geom. Vielfachheit gilt dann

$$\Rightarrow \dim[\text{Ker}(A - \lambda I)] = 2 - \text{Rang}(A - \lambda I) = 2 - \text{Rang} \begin{pmatrix} \frac{a}{2} & 1 \\ -b & -\frac{a}{2} \end{pmatrix} \leq 1 < 2. \quad (185)$$

Die Matrix ist also nicht diagonalisierbar. Nach Zusammenfassung 31 gibt es  $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$  invertierbar mit  $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ . Es folgt mit Zusammenfassung 31

$$z(t) = S \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \text{ für gewisse } d_1, d_2 \in \mathbb{C}. \quad (186)$$

Man kann ab hier vorgehen wie in (187) ff.

$$y(t) = \langle z(t), e_1 \rangle = \left\langle S \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}, e_1 \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}, \bar{S}^T e_1 \right\rangle \quad (187)$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} e^{\lambda t} d_1 + te^{\lambda t} d_2 \\ e^{\lambda t} d_2 \end{pmatrix}, \bar{S}^T e_1 \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} e^{\lambda t} d_1 + te^{\lambda t} d_2 \\ e^{\lambda t} d_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\rangle, \text{ wobei } \bar{S}^T e_1 =: \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}. \quad (188)$$

Man erhält

$$y(t) = (e^{\lambda t} d_1 + te^{\lambda t} d_2) \bar{v}_1 + e^{\lambda t} d_2 \bar{v}_2 = \underbrace{(\bar{v}_1 d_1 + \bar{v}_2 d_2)}_{:=c_1} e^{\lambda t} + \underbrace{d_2 \bar{v}_1}_{:=c_2} te^{\lambda t}. \quad (189)$$

Man folgert  $y(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 te^{\lambda t}$  und somit

$$\mathbb{L} \subset \{y \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}) : y(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 te^{\lambda t} \text{ für } c_1, c_2 \in \mathbb{C}\}. \quad (190)$$

Von ‘ $\supset$ ’ überzeugt man sich auch durch direktes Nachrechnen: Dass  $t \mapsto e^{\lambda t}$  eine Lösung ist überlassen wir Ihnen. Dass  $t \mapsto te^{\lambda t}$  eine Lösung ist sehen wir so: Mit  $\frac{d}{dt}(te^{\lambda t}) = e^{\lambda t} + \lambda te^{\lambda t}$  und  $\frac{d^2}{dt^2}(te^{\lambda t}) = 2\lambda e^{\lambda t} + \lambda^2 te^{\lambda t}$  erhalten wir

$$\frac{d^2}{dt^2}(te^{\lambda t}) + a\frac{d}{dt}(te^{\lambda t}) + bte^{\lambda t} = \underbrace{(\lambda^2 + a\lambda + b)}_{=0 \text{ mit (179)}} te^{\lambda t} + \underbrace{(2\lambda + a)}_{=0 \text{ weil } \lambda = -\frac{a}{2}} e^{\lambda t} = 0. \quad (191)$$

Da  $\mathbb{L}$  ein Vektorraum ist, sind nun also auch Linearkombinationen von  $e^{\lambda t}$  und  $te^{\lambda t}$  Lösungen. Daraus folgt ‘ $\supset$ ’.

**Anmerkung 39.** Die in der Lösungsformel auftauchenden Werte  $\lambda_{1,2}$  sind gerade die Nullstellen von  $p(\lambda) := \lambda^2 + a\lambda + b$ . Dies geht aus der Rechnung in (179) hervor. Das Polynom  $p(\lambda)$  heißt fortan *charakteristisches Polynom* von  $y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0$ . Es bestimmt auch in welchem Fall wir in Satz 38 sind.

- Fall (1):  $p(\lambda)$  hat zwei verschiedene reellwertige Nullstellen.
- Fall (2):  $p(\lambda)$  hat zwei verschiedene nicht-reellwertige Nullstellen.
- Fall (3):  $p(\lambda)$  hat eine doppelte Nullstelle.

Als nächstes besprechen wir eine wichtige Anwendung, das *Federpendel*.

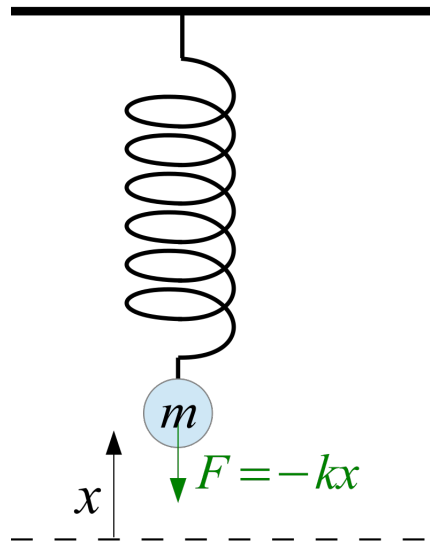


Abbildung 1: Das Federpendel

**Anwendung 40. DAS FEDERPENDEL (TEIL 1).** Ein Massestück (der Masse  $m > 0$ ) ist an einer Feder aufgehängt und schwingt dort. Die (zeitabhängige) Auslenkung aus der Ruhelage heißt  $x(t)$ , siehe Abbildung 1. Der Grund, dass das Teilchen schwingt ist, dass die Feder eine *Rückstellkraft*  $F(t)$  verursacht. Diese Rückstellkraft ist stets proportional zur Auslenkung, d.h.

$$F(t) = -kx(t) \quad \text{für eine Konstante } k > 0, \text{ Federkonstante genannt.} \quad (192)$$

In der Realität würden auch noch andere Kräfte (z.B. Reibung, Gravitation) wirken, diese vernachlässigen wir aber. Mit dem *Newton'schen Bewegungsgesetz* ( $F = ma$ ) gilt

$$F(t) = ma(t) = mx''(t). \quad (193)$$

Setzen wir (192) und (193) gleich so ergibt sich eine DGL für  $x(t)$ .

$$mx''(t) = -kx(t) \quad \Leftrightarrow \quad x''(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0. \quad (194)$$

Wir nennen  $\omega := \sqrt{\frac{k}{m}} > 0$  und erhalten die DGL

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0. \quad (195)$$

Diese DGL lässt sich mit Satz 38 lösen. Das charakteristische Polynom ist  $p(\lambda) = \lambda^2 + \omega^2$  und dessen Nullstellen sind  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ . Wir folgern aus Fall (2) von Satz 38

$$x(t) = c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t} \quad \text{für } c_1, c_2 \in \mathbb{C}. \quad (196)$$

Wir betrachten nun ein Federpendel mit *Anfangsort*  $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$  und *Anfangsgeschwindigkeit*  $x'(0) = v_0 \in \mathbb{R}$ , d.h. wir haben das *Anfangswertproblem*

$$\begin{cases} x''(t) + \omega^2 x(t) = 0 \\ x(0) = x_0 \\ x'(0) = v_0 \end{cases} \quad (197)$$

Mit (196) berechnen wir

$$x_0 = x(0) \stackrel{!}{=} c_1 e^{i\omega \cdot 0} + c_2 e^{-i\omega \cdot 0} = c_1 + c_2, \quad (198)$$

$$v_0 = x'(0) \stackrel{!}{=} c_1 i\omega e^{i\omega \cdot 0} + c_2 (-i\omega) e^{-i\omega \cdot 0} = i\omega(c_1 - c_2). \quad (199)$$

Dies führt auf das folgende lineare Gleichungssystem

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = x_0 \\ c_1 - c_2 = \frac{v_0}{i\omega} \end{cases} \quad \cdot \quad \begin{matrix} \xleftrightarrow{\text{(LGS) nach } c_1, c_2 \text{ lösen}} \\ \xleftrightarrow{\text{(LGS) nach } c_1, c_2 \text{ lösen}} \end{matrix} \quad \begin{cases} c_1 = \frac{1}{2}(x_0 + \frac{v_0}{i\omega}) \\ c_2 = \frac{1}{2}(x_0 - \frac{v_0}{i\omega}) \end{cases} \quad \cdot \quad (200)$$

Wir erhalten, dass die zeitliche Auslenkung  $x(t)$  des Pendels gegeben ist durch

$$x(t) = \frac{1}{2}(x_0 + \frac{v_0}{i\omega})e^{i\omega t} + \frac{1}{2}(x_0 - \frac{v_0}{i\omega})e^{-i\omega t} = x_0 \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} + \frac{v_0}{\omega} \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \quad (201)$$

$$= x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t). \quad (202)$$

Diese Formel beschreibt eine *Schwingung mit Frequenz*  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ . Diese Frequenz nennt man auch *Eigenfrequenz* des Pendels.

**Anmerkung 41.** Um eine eindeutige Lösung zu erhalten mussten wir in (197) *zwei* Anfangswerte vorschreiben, nämlich Anfangsort und Anfangsgeschwindigkeit. Warum reicht nicht nur ein Anfangswert? Wir erinnern uns (mit Methode 37), dass wir zu jeder linearen DGL zweiter Ordnung ein 2-dimensionales(!) System erster Ordnung assoziieren können. Nach Proposition 35 benötigt man bei einem zweidimensionalen System aber stets einen (2-dimensionalen) *Anfangswertevektor*, um eine eindeutige Lösung zu erhalten. Das erklärt warum hier 2 Anfangswerte vonnöten sind.

Der Rest dieser Sektion handelt von *inhomogenen* linearen DGLs zweiter Ordnung.

**DGL-Typ 42.** Eine *lineare inhomogene DGL zweiter Ordnung (mit konstanten Koeffizienten)* ist von der Form

$$y''(t) + ay(t) + by(t) = g(t) \quad (t \in I) \quad (203)$$

für  $a, b \in \mathbb{C}$  und  $g \in C^0(I; \mathbb{C})$ .

Für bestimmte Werte von  $a, b$  lässt sich eine schöne geschlossene Formel finden.

**Satz 43.** Es seien  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $\frac{a^2}{4} - b \neq 0$  und  $g \in C^0(I; \mathbb{C})$ . Sei  $y''(t) + ay'(t) + by(t) = g(t)$ , ( $t \in I$ ) gegeben. Seien  $\lambda_1, \lambda_2$  die beiden (verschiedenen) Nullstellen von  $p(\lambda) := \lambda^2 + a\lambda + b$ . Dann hat jede Lösung die Gestalt

$$y(t) = d_1 e^{\lambda_1 t} + d_2 e^{\lambda_2 t} + \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left( e^{\lambda_2 t} \int e^{-\lambda_2 s} g(s) ds - e^{\lambda_1 t} \int e^{-\lambda_1 s} g(s) ds \right) \quad (204)$$

für gewisse  $d_1, d_2 \in \mathbb{C}$ .

**Beweis.** Wir wandeln die DGL zunächst in ein (inhomogenes) System erster Ordnung um. Für eine Lösung  $y$  setzen wir also  $z_0(t) := y(t)$  und  $z_1(t) = y'(t)$  und berechnen

$$\begin{cases} z_0'(t) = y'(t) = z_1(t) \\ z_1'(t) = y''(t) = -ay'(t) - by(t) + g(t) = -az_1(t) - bz_0(t) + g(t) \end{cases} \quad (205)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} z_0'(t) \\ z_1'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0(t) \\ z_1(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ g(t) \end{pmatrix}. \quad (206)$$

Dieses lineare inhomogene System können wir lösen wie in Anmerkung 27. Wie in (179) zeigen wir zunächst, dass  $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$  diagonalisierbar ist und Eigenwerte  $\lambda_1, \lambda_2$  hat. Laut Anmerkung 27 ist dann jede Lösung von (206) gegeben durch

$$\begin{pmatrix} z_0(t) \\ z_1(t) \end{pmatrix} = E(t)d(t) \quad \text{für ein } d \in C^1(I; \mathbb{C}^2) \text{ mit } E(t)d'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ g(t) \end{pmatrix}. \quad (207)$$

Hierbei muss  $E(t)$  wie in (120) bestimmt werden, d.h.  $E(t) = S \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$ , wobei  $S$  eine Matrix ist, die  $A$  diagonalisiert.

**Zwischenbehauptung.** Die Matrix  $S := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}$  diagonalisiert  $A$ . Wir zeigen dazu, dass jede Spalte von  $S$  ein Eigenvektor von  $A$  ist. In der Tat gilt für  $i = 1, 2$  (mit  $p(\lambda)$  definiert wie in der Aussage)

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_i \\ -b - a\lambda_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_i \\ \lambda_i^2 - p(\lambda_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_i \\ \lambda_i^2 \end{pmatrix} = \lambda_i \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_i \end{pmatrix}. \quad (208)$$

Nun haben wir also

$$E(t) = S \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}. \quad (209)$$

Mit (207) können wir dann  $d(t)$  berechnen:

$$d'(t) = E(t)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ g(t) \end{pmatrix} \stackrel{(209)}{\underset{(MN)^{-1}=N^{-1}M^{-1}}{=}} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ g(t) \end{pmatrix} \quad (210)$$

$$\stackrel{\substack{\text{Invertierformel} \\ \text{für } 2 \times 2\text{-Matrizen}}}{=} \begin{pmatrix} e^{-\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{-\lambda_2 t} \end{pmatrix} \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ g(t) \end{pmatrix} \quad (211)$$

$$= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} e^{-\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{-\lambda_2 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -g(t) \\ g(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} -e^{-\lambda_1 t} g(t) \\ e^{-\lambda_2 t} g(t) \end{pmatrix}. \quad (212)$$

Das heißt

$$d(t) = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \int^t \begin{pmatrix} -e^{-\lambda_1 s} g(s) \\ e^{-\lambda_2 s} g(s) \end{pmatrix} ds \quad \text{für } d_1, d_2 \in \mathbb{C}. \quad (213)$$

Mit (207) folgt

$$\begin{pmatrix} z_0(t) \\ z_1(t) \end{pmatrix} = E(t)d(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \int^t \begin{pmatrix} -e^{-\lambda_1 s} g(s) \\ e^{-\lambda_2 s} g(s) \end{pmatrix} ds \right] \quad (214)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} d_1 e^{\lambda_1 t} \\ d_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} + \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} -e^{\lambda_1 t} \int^t e^{-\lambda_1 s} g(s) ds \\ e^{\lambda_2 t} \int^t e^{-\lambda_2 s} g(s) ds \end{pmatrix} \right]. \quad (215)$$

Wir betrachten nun nur die erste Komponente dieser Matrix-Vektor-Multiplikation und erhalten

$$y(t) = z_0(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^T \left[ \begin{pmatrix} d_1 e^{\lambda_1 t} \\ d_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} + \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} -e^{\lambda_1 t} \int^t e^{-\lambda_1 s} g(s) ds \\ e^{\lambda_2 t} \int^t e^{-\lambda_2 s} g(s) ds \end{pmatrix} \right] \quad (216)$$

$$= d_1 e^{\lambda_1 t} + d_2 e^{\lambda_2 t} + \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left( e^{\lambda_2 t} \int^t e^{-\lambda_2 s} g(s) ds - e^{\lambda_1 t} \int^t e^{-\lambda_1 s} g(s) ds \right). \quad (217)$$

**Anwendung 44. DAS FEDERPENDEL – TEIL II.** Betrachten wir nochmal das Federpendel mit derselben Notation wie in Anwendung 40. Diesmal wirkt aber neben der Rückstellkraft noch *externe Kraft*  $\tilde{h}(t)$ , z.B. gegeben durch Wind. Anstatt (192) haben wir also

$$F(t) = -kx(t) + \tilde{h}(t) \quad k > 0 \text{ Federkonstante, } \tilde{h}(t) \text{ zeitabhängige externe Kraft.} \quad (218)$$

Die Newton'sche Bewegungsgleichung  $F = ma$  liefert dann

$$mx''(t) = -kx(t) + \tilde{h}(t) \quad \Rightarrow \quad x''(t) + \frac{k}{m}x(t) = \frac{1}{m}\tilde{h}(t). \quad (219)$$

Wiederum mit  $\omega := \sqrt{\frac{k}{m}} > 0$  und  $h(t) := \frac{\tilde{h}(t)}{m}$  hat man

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = h(t). \quad (220)$$

Wir betrachten hier den Fall  $h(t) = de^{i\alpha t}$  für ein  $\alpha > 0$  und  $d \in \mathbb{C}$ . Mit Formel (204) können wir nun die Lösungen bestimmen. Beachte dazu dass  $p(\lambda) = \lambda^2 + \omega^2$  und daher  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ . Formel (204) liefert dann (für  $d_1, d_2 \in \mathbb{C}$ )

$$x(t) = d_1 e^{i\omega t} + d_2 e^{-i\omega t} - \frac{d}{2i\omega} \left( e^{-i\omega t} \int^t e^{i(\alpha+\omega)s} ds - e^{i\omega t} \int^t e^{i(\alpha-\omega)s} ds \right). \quad (221)$$

Falls  $\alpha \neq \omega$  so gilt

$$x(t) = d_1 e^{i\omega t} + d_2 e^{-i\omega t} - \frac{d}{2i\omega} \left( e^{-i\omega t} \frac{1}{i(\alpha+\omega)} e^{i(\alpha+\omega)t} - e^{i\omega t} \frac{1}{i(\alpha-\omega)} e^{i(\alpha-\omega)t} \right) \quad (222)$$

$$= d_1 e^{i\omega t} + d_2 e^{-i\omega t} + \frac{d}{2\omega} \left( \frac{1}{\alpha+\omega} - \frac{1}{\alpha-\omega} \right) e^{i\alpha t}. \quad (223)$$

Falls  $\alpha = \omega$  so folgt

$$x(t) = d_1 e^{i\omega t} + d_2 e^{-i\omega t} + \frac{d}{2i\omega} \left( e^{-i\omega t} \int^t e^{2i\omega s} ds - e^{i\omega t} \int^t 1 ds \right) \quad (224)$$

$$= d_1 e^{i\omega t} + d_2 e^{-i\omega t} - \frac{d}{2i\omega} \left( \frac{1}{2i\omega} e^{i\omega t} - t e^{i\omega t} \right) = d_1 e^{i\omega t} + d_2 e^{-i\omega t} + \frac{d}{4\omega^2} e^{i\omega t} - \frac{d}{2i\omega} t e^{i\omega t} \quad (225)$$

$$= \tilde{d}_1 e^{i\omega t} + d_2 e^{-i\omega t} - \frac{d}{2i\omega} t e^{i\omega t} \quad \text{mit } \tilde{d}_1 := d_1 + \frac{d}{4\omega^2}. \quad (226)$$

Obwohl die externe Kraft  $\tilde{h}(t) = mh(t) = mde^{i\alpha t}$  beschränkt ist, ist im Fall  $\alpha = \omega$  jede Lösung für  $t \rightarrow \infty$  unbeschränkt! Selbst kleine externe Kräfte können also unbeschränkt große Effekte auf das System haben. Man spricht von *Resonanzphänomenen*.

Die Lösungsformel aus (204) ist länglich. Manchmal kann man die Anwendung dieser Formel umgehen indem man eine Lösung *rät*.

**Proposition 45.** Es sei  $y''(t) + ay'(t) + by(t) = g(t)$ ,  $(t \in I)$  für  $a, b \in \mathbb{C}$ ,  $g \in C^0(I; \mathbb{C})$  gegeben. Wir bezeichnen die allgemeine Lösung dieser DGL mit  $\mathbb{L}$ . Sei nun  $y_p \in C^2(I; \mathbb{C})$  eine Lösung, d.h.  $y_p''(t) + ay_p'(t) + by_p(t) = g(t)$  für alle  $t \in I$  und

$$\mathbb{L}_{\text{hom}} := \{z \in C^2(I; \mathbb{C}) : z''(t) + az'(t) + bz(t) = 0 \text{ für alle } t \in I\}. \quad (227)$$

Dann gilt

$$\mathbb{L} = \{y \in C^2(I; \mathbb{C}) : y(t) = z(t) + y_p(t) \text{ für ein } z \in \mathbb{L}_{\text{hom}}\}. \quad (228)$$

Man schreibt  $\mathbb{L} = \mathbb{L}_{\text{hom}} + y_p$ .

Eine solche geratene Lösung  $y_p$  nennt man dann *partikuläre Lösung*.

**Beweis.** Zu ‘ $\subset$ ’. Sei  $y \in \mathbb{L}$ . Definiere  $\tilde{z} := y - y_p$ . Wir zeigen, dass  $\tilde{z} \in \mathbb{L}_{\text{hom}}$ .

$$\tilde{z}''(t) + a\tilde{z}'(t) + b\tilde{z}(t) = (y''(t) - y_p''(t)) + a(y'(t) - y_p'(t)) + b(y(t) - y_p(t)) \quad (229)$$

$$= y''(t) + ay'(t) + by(t) - (y_p''(t) - ay_p'(t) - by_p(t)) \quad (230)$$

$$= g(t) - g(t) = 0. \quad (231)$$

Somit  $\tilde{z} \in \mathbb{L}_{\text{hom}}$  und da  $y = y_p + \tilde{z}$  folgt ‘ $\supset$ ’. Zu ‘ $\supset$ ’. Sei  $y = y_p + z$  für ein  $z \in \mathbb{L}_{\text{hom}}$ . Dann gilt

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = (y_p''(t) + z''(t)) + a(y_p'(t) + z'(t)) + b(y_p(t) + z(t)) \quad (232)$$

$$= y_p''(t) + ay_p'(t) + by_p(t) + z''(t) + az'(t) + bz(t) = g(t) + 0 = g(t). \quad (233)$$

Somit ist  $y$  eine Lösung, d.h.  $y \in \mathbb{L}$ .



**Beispiel 46.** Wir lösen

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 17 \quad (t \in \mathbb{R}). \quad (234)$$

Wir raten eine partikuläre Lösung  $y_p(t) = \frac{17}{2}$ . In der Tat:

$$y_p''(t) + 3y_p'(t) + 2y_p(t) = 0 + 0 + 2 \frac{17}{2} = 17. \quad (235)$$

Nach Satz 38 (oder Übungsaufgabe 4 Blatt 3) wissen wir: Die allgemeine Lösung des homogenen Problems  $z''(t) + 3z'(t) + 2z(t) = 0$  ist

$$\mathbb{L}_{\text{hom}} = \{z \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}) : z(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} \text{ für } c_1, c_2 \in \mathbb{C}\}. \quad (236)$$

Wir folgern

$$\mathbb{L} = \{y \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}) : y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} + \frac{17}{2} \text{ für } c_1, c_2 \in \mathbb{C}\}. \quad (237)$$

**Beispiel 47.** Wir lösen

$$\underbrace{y''(t) + 3y'(t) + 2y(t)}_{(LS)} = \underbrace{4 + 5t}_{(RS)} \quad (t \in \mathbb{R}). \quad (238)$$

Wir raten eine partikuläre Lösung mithilfe eines Ansatzes.

$$\mathbf{Ansatz:} \quad y_p(t) \stackrel{!}{=} \theta_0 + \theta_1 t \quad \text{für } \theta_0, \theta_1 \in \mathbb{C}. \quad (239)$$

Wir suchen passende  $\theta_0, \theta_1$ . Einsetzen in  $(LS)$  liefert

$$(LS) : \quad y_p''(t) + 3y_p'(t) + 2y_p(t) = 0 + 3\theta_1 + 2(\theta_0 + \theta_1 t) = (3\theta_1 + 2\theta_0) + 2\theta_1 t. \quad (240)$$

Damit ist  $(LS) = (RS)$  äquivalent zu

$$(3\theta_1 + 2\theta_0) + 2\theta_1 t = 4 + 5t \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3\theta_1 + 2\theta_0 = 4 \\ 2\theta_1 = 5 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3\theta_1 + 2\theta_0 = 4 \\ 2\theta_1 = 5 \end{cases}. \quad (241)$$

Man erhält  $\theta_1 = \frac{5}{2}$  und  $\theta_0 = \frac{7}{6}$ . Somit ist  $y_p(t) = \frac{7}{6} + \frac{5}{2}t$  eine partikuläre Lösung. Wie im vorigen Beispiel gilt

$$\mathbb{L}_{\text{hom}} = \{z \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}) : z(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} \text{ für } c_1, c_2 \in \mathbb{C}\}. \quad (242)$$

Wir folgern

$$\mathbb{L} = \{y \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}) : y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} + \frac{7}{6} + \frac{5}{2}t \text{ für } c_1, c_2 \in \mathbb{C}\}. \quad (243)$$

Dies hätte man auch mit Satz 43 herausfinden können, wäre aber mehr Arbeit gewesen.

### 1.2.5 Lineare DGLs zweiter Ordnung (mit zeitabhängigen Koeffizienten)

**DGL-Typ 48.** Eine *lineare homogene DGL zweiter Ordnung* ist von der Form

$$y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0 \quad (t \in I), \quad (244)$$

für  $a, b \in C^0(I; \mathbb{C})$ .

Unsere Methode hier beruht auf der folgenden Beobachtung, die wir später beweisen.

**Proposition 49.** Es sei für  $a, b \in C^0(I; \mathbb{C})$  die DGL  $y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0$ , ( $t \in I$ ), gegeben. Dann ist die allgemeine Lösung  $\mathbb{L} \subset C^2(I; \mathbb{C})$  stets ein  $\mathbb{C}$ -linearer Unterraum der Dimension 2.

**Beweis.** Später.

Um die allgemeine Lösung zu beschreiben benötigen wir also zwei linear unabhängige Lösungen.

**Definition 50.** Es sei für  $a, b \in C^0(I; \mathbb{C})$  die DGL  $y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0$ , ( $t \in I$ ), gegeben. Seien  $y_1, y_2 \in C^2(I; \mathbb{C})$  zwei Lösungen. Dann definieren wir die *Wronski-Funktion* von  $w[y_1, y_2] : I \rightarrow \mathbb{C}$  durch

$$w[y_1, y_2](t) := y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t) \quad (t \in I). \quad (245)$$

**Proposition 51.** Es sei für  $a, b \in C^0(I; \mathbb{C})$  die DGL  $y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0$ , ( $t \in I$ ), gegeben. Seien  $y_1, y_2 \in C^2(I; \mathbb{C})$  zwei Lösungen. Dann gibt es  $c \in \mathbb{C}$  mit

$$w[y_1, y_2](t) = c \exp\left(-\int^t a(s) ds\right). \quad (246)$$

Falls  $c \neq 0$  so sind  $y_1, y_2$  linear unabhängig.

**Beweis.** Beachte

$$y_i''(t) + a(t)y_i'(t) + b(t)y_i(t) = 0 \quad \forall t \in I \quad \forall i = 1, 2. \quad (247)$$

Setze  $w := w[y_1, y_2]$ . Wir leiten zunächst eine DGL für  $w$  her.

$$w'(t) = \frac{d}{dt}(y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t)) \quad (248)$$

$$= y_1'(t)y_2'(t) + y_1(t)y_2''(t) - y_2'(t)y_1'(t) - y_2(t)y_1''(t) \quad (249)$$

$$= y_1(t)y_2''(t) - y_2(t)y_1''(t) \quad (250)$$

$$\stackrel{(247)}{=} y_1(t)(-a(t)y_2'(t) - b(t)y_2(t)) - y_2(t)(-a(t)y_1'(t) - b(t)y_1(t)) \quad (251)$$

$$= -a(t)y_1(t)y_2'(t) - b(t)y_1(t)y_2(t) + a(t)y_2(t)y_1'(t) + b(t)y_2(t)y_1(t) \quad (252)$$

$$= -a(t)(y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t)) = -a(t)w(t). \quad (253)$$

Also gilt  $w'(t) = -a(t)w(t)$ . Aus Satz 8 folgt dann

$$w(t) = c \exp\left(-\int^t a(s) ds\right) \quad \text{für ein } c \in \mathbb{C}. \quad (254)$$

Wir zeigen jetzt noch, dass lineare Abhängigkeit von  $y_1, y_2$  zu  $c = 0$  führt. Seien also  $y_1, y_2$  linear abhängig. Ist  $y_1 = 0$  oder  $y_2 = 0$  so gilt klarerweise  $w = w[y_1, y_2] = 0$ , was zu  $c = 0$  führt. Sind  $y_1, y_2 \neq 0$  so gilt (wegen linearer Abhängigkeit)  $y_1 = \lambda y_2$  für ein  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Daher

$$w(t) = w[y_1, y_2](t) = y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t) = \lambda y_2(t)y_2'(t) - y_2(t)(\lambda y_2)'(t) \quad (255)$$

$$= \lambda y_2(t)y_2'(t) - \lambda y_2(t)y_2'(t) = 0. \quad (256)$$

Es folgt also  $c = 0$ .

**Methode 52.** Es sei für  $a, b \in C^0(I; \mathbb{C})$  die DGL  $y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0, (t \in I)$ , gegeben. Nehmen wir auch an, wir haben eine Lösung  $y_1$  der Gleichung (z.B. geraten) mit  $y_1(t) \neq 0$  für  $t \in I$  (OBdA  $y_1 > 0$ , sonst betrachte  $-y_1$ ). Wir beschaffen uns nun eine zweite linear unabhängige Lösung  $y_2$ . Nach Proposition 51 erfüllt jede weitere linear unabhängige Lösung  $y_2$

$$y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t) = c \exp\left(-\int^t a(s) ds\right) \quad (257)$$

für ein  $c \neq 0$ . Sagen wir mal  $c = 1$  (ansonsten betrachte ein geeignetes Vielfaches von  $y_2$ ). Teilen wir nun durch  $y_1$  so erhalten wir eine lineare inhomogene DGL:

$$y_2'(t) - \left(\frac{y_1'(t)}{y_1(t)}\right) y_2(t) = \frac{1}{y_1(t)} \exp\left(-\int^t a(s) ds\right), \quad (258)$$

$$\Leftrightarrow y_2'(t) = \left(\frac{y_1'(t)}{y_1(t)}\right) y_2(t) + \frac{1}{y_1(t)} \exp\left(-\int^t a(s) ds\right) = \tilde{a}(t)y_2(t) + \tilde{b}(t), \quad (259)$$

mit  $\tilde{a}(t) = \frac{y_1'(t)}{y_1(t)}, \tilde{b}(t) = \frac{1}{y_1(t)} \exp\left(-\int^t a(s) ds\right)$ . Die DGL  $y_2'(t) = \tilde{a}(t)y_2(t) + \tilde{b}(t)$  lässt sich

dann mit Satz 20 lösen. Es gilt für ein  $\tilde{c} \in \mathbb{C}$

$$y_2(t) = \tilde{e}(t) \left( \tilde{c} + \int^t \frac{\tilde{b}(u)}{\tilde{e}(u)} du \right), \quad (260)$$

wobei

$$\tilde{e}(t) = \exp \left( \int^t \tilde{a}(s) ds \right) = \exp \left( \int^t \frac{y_1'(s)}{y_1(s)} ds \right) \quad (261)$$

$$= \exp \left( \int^t \frac{d}{ds} \log y_1(s) ds \right) = \exp(\log y_1(s)) = y_1(s). \quad (262)$$

Das bedeutet

$$y_2(t) = y_1(t) \left( \tilde{c} + \int^t \frac{1}{y_1(u)^2} \exp \left( - \int^u a(s) ds \right) \right) \quad (263)$$

$$= \tilde{c}y_1(t) + y_1(t) \int^t \frac{1}{y_1(u)^2} \exp \left( - \int^u a(s) ds \right) du. \quad (264)$$

Wir können getrost  $\tilde{c} = 0$  wählen, denn  $-\tilde{c}y_1$  ist bereits eine Lösung darf daher hinzuaddiert werden ohne  $\mathbb{L}$  zu verlassen (weil  $\mathbb{L}$  ja ein Vektorraum ist, siehe Proposition 49).

Damit

$$y_2(t) = y_1(t) \int^t \frac{1}{y_1(u)^2} \exp \left( - \int^u a(s) ds \right) du. \quad (265)$$

Wegen Proposition 49 muss dann (aus Dimensionsgründen) jede weitere Lösung eine Linearkombination aus  $y_1$  und  $y_2$  sein, d.h.

$$\mathbb{L} = \{y \in C^2(I; \mathbb{C}) : y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) \text{ für } c_1, c_2 \in \mathbb{C}\}. \quad (266)$$

**Beispiel 53.** Wir betrachten die *Legendre-Gleichung*

$$(1 - t^2)y''(t) - 2ty'(t) + 2y(t) = 0 \quad (t \in (0, 1)), \quad (267)$$

oder äquivalent

$$y''(t) - \frac{2t}{1-t^2}y'(t) + \frac{2}{1-t^2}y(t) = 0 \quad (t \in (0, 1)). \quad (268)$$

Man rät leicht, dass  $y_1(t) = t$  eine Lösung ist. Um eine linear unabhängige Lösung zu finden benutzen wir (265) mit  $a(s) = \frac{-2s}{1-s^2}$ . Beachte

$$\exp \left( - \int^u a(s) ds \right) = \exp \left( \int^u \frac{2s}{1-s^2} \right) = \exp(-\log(1-u^2)) = \frac{1}{1-u^2}. \quad (269)$$

Somit liefert (265)

$$y_2(t) = t \int \frac{1}{u^2} \cdot \frac{1}{1-u^2} du \stackrel{\text{Partialbruchzerlegung}}{=} t \int \left( \frac{1}{u^2} + \frac{1}{1-u^2} \right) du \quad (270)$$

$$= t \left( \left[ -\frac{1}{t} \right] + \int \frac{1}{1-u^2} du \right) = t \left( \left[ -\frac{1}{t} \right] + \int \frac{1}{(1-u)(1+u)} du \right) \quad (271)$$

$$\stackrel{\text{Partialbruchzerlegung}}{=} t \left( \left[ -\frac{1}{t} \right] + \int \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u} \right) du \right) \quad (272)$$

$$= t \left( \left[ -\frac{1}{t} \right] + \left[ -\frac{1}{2} \log(1-t) + \frac{1}{2} \log(1+t) \right] \right) \quad (273)$$

$$= -1 + \frac{t}{2} \log(1+t) - \frac{t}{2} \log(1-t). \quad (274)$$

Damit gilt

$$\mathbb{L} = \left\{ y \in C^2(I; \mathbb{C}) : y(t) = c_1 t + c_2 \left( -1 + \frac{t}{2} \log(1+t) - \frac{t}{2} \log(1-t) \right) \text{ für } c_1, c_2 \in \mathbb{C} \right\}. \quad (275)$$

Natürlich bleibt in solchen Situationen immer das Problem, dass  $y_1$  geraten werden muss. Dafür können zum Beispiel alle Polynome bis zu einem gewissen Grad durchprobiert werden. Weiter denkbar ist der sogenannte *Potenzreihenansatz*, d.h. man sucht  $(c_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{C}$  so dass

$$p(t) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k \quad \text{eine Lösung ist.} \quad (276)$$

Einsetzen in die DGL liefert stets eine Rekursionsgleichung für  $(c_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ .

### 1.3 Integrale der Bewegung

Eine Möglichkeit, Differentialgleichungen zu lösen ist durch das Finden von *Integralen der Bewegung*.

**Definition 54.** Es sei für  $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^n)$ ,  $G \subset \mathbb{R}^n$ , die Differentialgleichung

$$(DGL) \quad y'(t) = f(t, y(t)) \quad (t \in I) \quad (277)$$

gegeben. Eine Funktion  $g \in C^1(I \times G; \mathbb{R})$ ,  $g \not\equiv \text{const.}$ , heißt *Integral der Bewegung* (IDB) oder *Erhaltungsgröße* falls für jede Lösung  $y$  von (DGL) gilt

$$g(t, y(t)) \equiv \text{const.} \quad \text{auf } I. \quad (278)$$

**Anmerkung 55.** Gegeben sei die DGL  $y'(t) = f(t, y(t))$ ,  $(t \in I)$ . Ist  $g \in C^1(I \times G; \mathbb{R})$ .

Dann ist  $g = g(\tau, z)$  ein Integral der Bewegung genau dann wenn

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}g(t, y(t)) \stackrel{\text{mehrdim. Kettenregel}}{=} Dg(t, y(t)) \begin{pmatrix} 1 \\ y'(t) \end{pmatrix} = (\partial_\tau g \quad D_z g)(t, y(t)) \begin{pmatrix} 1 \\ y'(t) \end{pmatrix} \\ &= \partial_\tau g(t, y(t)) + D_z g(t, y(t)) \cdot y'(t) = \partial_\tau g(t, y(t)) + D_z g(t, y(t)) \cdot f(t, y(t)). \end{aligned} \quad (279)$$

Zusammengefasst:  $g = g(\tau, z)$  ist IDB für  $y'(t) = f(t, y(t))$ ,  $(t \in I)$  falls

$$\partial_\tau g(\tau, z) + D_z g(\tau, z) \cdot f(\tau, z) = 0. \quad (280)$$

**Beispiel 56.** Für die DGL  $y'(t) = ay(t)$  definiert  $g(\tau, z) := e^{-a\tau} z$  ein Integral der Bewegung. In der Tat: Mit  $f(\tau, z) = az$  berechnen wir

$$\partial_\tau g(\tau, z) + D_z g(\tau, z) \cdot f(\tau, z) = -ae^{-a\tau} z + e^{-a\tau}(az) = 0. \quad (281)$$

Oft lässt sich die Gleichung  $g(t, y(t)) = c$  nach  $y(t)$  umstellen. Daher können Integrale der Bewegung helfen, Lösungen explizit zu bestimmen. Wie konstruiert man IDBs?

### 1.3.1 Exakte Differentialgleichungen

Den nachfolgenden DGL-Typ werden wir durch Finden eines Integrals der Bewegung lösen. Um dieses zu konstruieren benötigen wir einen kleinen Exkurs zu *Gradientenfeldern*.

#### Einschub: Gradientenfelder.

**Definition 57.** Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$  ein Gebiet. Ein Vektorfeld  $F \in C^0(\Omega; \mathbb{R}^n)$  heißt *Gradientenfeld*, wenn es eine Funktion  $\phi \in C^1(\Omega; \mathbb{R})$  gibt mit  $F = \nabla\phi$ . Eine solche Funktion  $\phi$  heißt *Stammfunktion* oder auch *Potential*.

Ist  $n = 1$ , so haben alle  $F \in C^0(\Omega; \mathbb{R})$  eine Stammfunktion, gegeben durch

$$\phi(z) = \int^z F(s) ds. \quad (282)$$

Für  $n > 1$  gibt es nicht zwingend eine Stammfunktion, wie wir später sehen werden.

**Beispiel 58.** Gegeben sei  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$F(\tau, z) = \begin{pmatrix} 4\tau^3 z \\ z^2 + 1 + \tau^4 \end{pmatrix}. \quad (283)$$

Wir fragen uns, ob  $F$  ein Gradientenfeld ist. Gäbe es nun  $\phi = \phi(\tau, z) \in C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$  mit  $\nabla\phi = F$  so wäre

$$\partial_\tau \phi(\tau, z) = F_1(\tau, z) = 4\tau^3 z, \quad (284)$$

$$\partial_z \phi(\tau, z) = F_2(\tau, z) = z^2 + 1 + \tau^4. \quad (285)$$

Wir integrieren die erste Gleichung (für festgehaltenes  $z$ ) nach  $\tau$  und erhalten

$$\phi(\tau, z) = \tau^4 z + c(z), \quad (286)$$

wobei  $c(z)$  eine Integrationskonstante ist (die für jedes  $z$  eine andere sein darf!). Wir leiten den Ausdruck in (286) nun nach  $z$  ab und vergleichen mit (285). Einerseits

$$(286) \Rightarrow \partial_z \phi(\tau, z) = \tau^4 + c'(z) \quad \text{und andererseits} \quad (285) \Rightarrow \partial_z \phi(\tau, z) = \tau^4 + z^2 + 1. \quad (287)$$

Wir können beide Folgerungen wahr machen wenn  $\tau^4 + c'(z) = \tau^4 + z^2 + 1$ . Das bedeutet  $c'(z) = z^2 + 1$ , also  $c(z) = \frac{1}{3}z^3 + z + c_0$  für ein  $c_0 \in \mathbb{R}$ . Wir erhalten mit (286)

$$\phi(\tau, z) = \tau^4 z + \frac{1}{3}z^3 + z + c_0 = \frac{1}{3}z^3 + (\tau^4 + 1)z + c_0. \quad (288)$$

Die obige Rechnung muss nicht immer aufgehen: Wäre  $F$  kein Gradientenfeld, so wäre es unmöglich, beide Bedingungen in (287) zu erfüllen. Das *Lemma von Poincare* gibt ein Kriterium, ob ein Gradientenfeld vorliegt.

**Satz 59. LEMMA VON POINCARÉ.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$  ein Gebiet und  $F = (F_1, \dots, F_n)^T \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$  ein Vektorfeld.

1. Ist  $F$  ein Gradientenfeld, so gilt  $\partial_i F_j = \partial_j F_i$  für alle  $i, j = 1, \dots, n$
2. Ist  $\Omega$  sternförmig und  $\partial_i F_j = \partial_j F_i$  für alle  $i, j = 1, \dots, n$ , so ist  $F$  ein Gradientenfeld.

**Teilbeweis.** Wir beweisen nur Teil 1. Sei  $F$  Gradientenfeld, etwa  $F = \nabla \phi$  für ein  $\phi \in C^1(\Omega; \mathbb{R})$ . Das heißt  $F_k = \partial_k \phi$  für alle  $k = 1, \dots, n$ . Da  $F \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$  gilt  $\phi \in C^2(\Omega; \mathbb{R})$ . Mit dem Satz von Schwarz sieht man dann

$$\partial_i F_j = \partial_i(\partial_j \phi) = \partial_j(\partial_i \phi) = \partial_j F_i. \quad (289)$$

In der Praxis genügt es übrigens, das Kriterium  $\partial_i F_j = \partial_j F_i$  nur für  $i \neq j$  zu überprüfen: Für  $i = j$  ist es automatisch erfüllt.

**DGL-Typ 60.** Eine *exakte DGL* ist eine DGL der Form

$$p(t, y(t)) + q(t, y(t))y'(t) = 0 \quad (t \in I) \quad (290)$$

wobei  $p, q \in C^0(I \times J; \mathbb{R})$ , ( $J \subset \mathbb{R}$  Intervall) so, dass  $F = (p, q)^T \in C^0(I \times J; \mathbb{R}^2)$  ein Gradientenfeld ist.

**Proposition 61.** Es sei die exakte DGL  $p(t, y(t)) + q(t, y(t))y'(t) = 0, (t \in I)$  gegeben und  $F = (p, q)^T$ . Dann ist jede Stammfunktion von  $F$  ein Integral der Bewegung.

**Beweis.** Es sei  $\phi \in C^1(I \times J; \mathbb{R})$  mit  $\nabla\phi = F = (p, q)^T$ . Schreibe  $\phi = \phi(\tau, z)$ , d.h.  $\partial_\tau\phi = p$  und  $\partial_z\phi = q$ . Sei nun  $y \in C^1(I; \mathbb{R})$  eine Lösung. Dann gilt

$$\frac{d}{dt}\phi(t, y(t)) \stackrel{\text{mehrdim. Kettenregel}}{=} D\phi(t, y(t)) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ y'(t) \end{pmatrix} = (\partial_\tau\phi \quad \partial_z\phi)(t, y(t)) \begin{pmatrix} 1 \\ y'(t) \end{pmatrix} \quad (291)$$

$$= \partial_\tau\phi(t, y(t)) + \partial_z\phi(t, y(t))y'(t) = p(t, y(t)) + q(t, y(t))y'(t) = 0. \quad (292)$$

**Beispiel 62, Teil 1.** Gegeben ist die DGL

$$4t^3y(t) + (y(t)^2 + 1 + t^4)y'(t) = 0 \quad (t \in I). \quad (293)$$

Das bedeutet  $p(\tau, z) = 4\tau^3z$  und  $q(\tau, z) = z^2 + 1 + \tau^4$ . Also gilt

$$F(\tau, z) := \begin{pmatrix} p(\tau, z) \\ q(\tau, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\tau^3z \\ z^2 + 1 + \tau^4 \end{pmatrix}. \quad (294)$$

Nach Beispiel 58 ist  $F$  ein Gradientenfeld, mit Stammfunktion  $\phi(\tau, z) = \frac{1}{3}z^3 + (\tau^4 + 1)z$ . Die DGL ist also exakt und  $\phi$  ist nach Proposition 61 ein IDB. Daher gilt für jede Lösung  $y \in C^1(I; \mathbb{R})$

$$\phi(t, y(t)) = \frac{1}{3}y(t)^3 + (t^4 + 1)y(t) = c \quad \text{für ein } c \in \mathbb{R}. \quad (295)$$

Diese *kubische Gleichung* würden wir gerne nach  $y(t)$  auflösen, um eine Formel für  $y$  zu erhalten.

**Lemma 63. CARDANO-FORMEL.** Es seien  $a, b \in \mathbb{R}, a > 0$ . Dann hat die Gleichung  $x^3 + ax + b = 0$  genau eine reellwertige Lösung, gegeben durch

$$x = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}. \quad (296)$$

**Beweis.** Für beliebige  $u, v \in \mathbb{R}$  berechne zunächst

$$(u + v)^3 = u^3 + v^3 + 3u^2v + 3uv^2 = 3uv(u + v) + (u^3 + v^3). \quad (297)$$

Setzt man nun  $x := u + v$  so gilt stets

$$x^3 - 3uvx - (u^3 + v^3) = 0 \quad (298)$$



Wir suchen nun  $u, v \in \mathbb{R}$  mit

$$\begin{cases} -3uv = a \\ -(u^3 + v^3) = b \end{cases} \quad (299)$$

Haben wir diese gefunden, so gilt nach (298)  $x^3 + ax + b = 0$  (für  $x = u + v$ ). Für Zahlen  $u, v$  wie in (299) würde gelten

$$-u^3v^3 = (-1)^3u^3v^3 = (-uv)^3 \stackrel{(299)}{=} \left(\frac{a}{3}\right)^3 = \frac{a^3}{27}, \quad (300)$$

$$u^3 + v^3 \stackrel{(299)}{=} -b. \quad (301)$$

Beachte, dass dann für alle  $z \in \mathbb{R}$  gilt

$$(z - u^3)(z - v^3) = z^2 - (u^3 + v^3)z + u^3v^3 \stackrel{(300),(301)}{=} z^2 + bz - \frac{a^3}{27}. \quad (302)$$

Somit sind  $u^3$  und  $v^3$  die (beiden reellen(!)) Nullstellen von  $z^2 + bz - \frac{a^3}{27}$ , d.h.

$$\{u^3, v^3\} = \left\{ -\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}, -\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}} \right\}. \quad (303)$$

Ziehen der dritten Wurzel (in  $\mathbb{R}$ ) liefert

$$\{u, v\} = \left\{ \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}, \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} \right\} \quad (304)$$

und somit

$$x = u + v = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}. \quad (305)$$

**Beispiel 62, Teil 2.** Gegeben ist wieder die DGL

$$4t^3y(t) + (y(t)^2 + 1 + t^4)y'(t) = 0 \quad (t \in I). \quad (306)$$

Wir wissen bereits aus Beispiel 62 (Teil 1), dass für jede Lösung  $y \in C^1(I; \mathbb{R})$  gilt

$$\frac{1}{3}y(t)^3 + (t^4 + 1)y(t) = c \quad \text{für ein } c \in \mathbb{R}, \quad (307)$$

d.h.

$$y(t)^3 + 3(t^4 + 1)y(t) - 3c = 0. \quad (308)$$

Mit der Cardiani-Formel (Lemma 63) (mit  $a = 3(t^4 + 1) > 0, b = -3c$ ) gilt

$$y(t) = \sqrt[3]{\frac{3c}{2} + \sqrt{\frac{9c^2}{4} + (t^4 + 1)^3}} + \sqrt[3]{\frac{3c}{2} - \sqrt{\frac{9c^2}{4} + (t^4 + 1)^3}} \quad \text{für ein } c \in \mathbb{R}. \quad (309)$$

Das Auflösen war länglich. Lohnt sich der Aufwand? Nicht immer, denn aus dem IDB (307) lassen sich schon sehr viele Eigenschaften von Lösungen rauslesen. Ein Beispiel:

**Frage.** Ist für  $I = \mathbb{R}$  jede Lösung  $y \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$  beschränkt? Mit der expliziten Formel (309) wäre die Beantwortung dieser Frage nicht leicht! Mit dem IDB (307) sieht man es sofort: Es gilt für ein  $c \in \mathbb{R}$

$$y(t) \left( \frac{1}{3}y(t)^2 + 1 + t^4 \right) = c \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (310)$$

und somit gilt für alle  $t \in \mathbb{R}$

$$|c| = \left| y(t) \left( \frac{1}{3}y(t)^2 + 1 + t^4 \right) \right| = |y(t)| \underbrace{\left( \frac{1}{3}y(t)^2 + 1 \right)}_{\geq 0} + \underbrace{t^4}_{\geq 0} \geq |y(t)| \cdot 1. \Rightarrow |y(t)| \leq |c|. \quad (311)$$

**Methode 64.** Gegeben ist für  $p, q \in C^1(I \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$  eine DGL der Form

$$p(t, y(t)) + q(t, y(t))y'(t) = 0 \quad (t \in I) \quad (312)$$

Ist  $F = (p, q)^T$  kein Gradientenfeld, so ist die DGL nicht exakt. Was können wir in einem solchen Fall tun?

**Versuch.** Finde  $m \in C^1(I; \mathbb{R})$  so, dass  $m(t)p(t, y(t)) + m(t)q(t, y(t))y'(t) = 0$  exakt ist. (313)

Jede Lösung von (312) ist auch eine Lösung von (313), denn es wurde ja nur mit  $m(t)$  multipliziert. Damit (313) exakt ist muss  $\tilde{F}(\tau, z) := (m(\tau)p(\tau, z), m(\tau)q(\tau, z))^T$  ein Gradientenfeld sein. Nach Satz 59 ist dies äquivalent zu  $\partial_z \tilde{F}_1 = \partial_\tau \tilde{F}_2$ , d.h.

$$\partial_z(m(\tau)p(\tau, z)) = \partial_\tau(m(\tau)q(\tau, z)). \quad (314)$$

$$\Leftrightarrow m(\tau)\partial_z p(\tau, z) = m'(\tau)q(\tau, z) + m(\tau)\partial_\tau q(\tau, z). \quad (315)$$

$$\Leftrightarrow m'(\tau)q(\tau, z) = m(\tau)(\partial_z p(\tau, z) - \partial_\tau q(\tau, z)). \quad (316)$$

Ist nun  $q(\tau, z) \neq 0$  so kann man durch  $q$  teilen. Ist ferner  $\frac{\partial_z p - \partial_\tau q}{q}(\tau, z)$  nur von  $\tau$  und nicht von  $z$  abhängig, etwa  $r(\tau) := \frac{\partial_z p - \partial_\tau q}{q}(\tau, z)$ , so erhalten wir

$$m'(\tau) = r(\tau)m(\tau). \quad (317)$$

Mit Satz 8 folgt, dass für alle  $c \in \mathbb{R}$

$$m(\tau) := c \exp \left( \int^{\tau} r(s) \, ds \right) \quad \text{die DGL in (313) exakt macht.} \quad (318)$$

Aber eben nur unter der Bedingung, dass  $r(\tau) := \frac{\partial_z p(\tau, z) - \partial_\tau q(\tau, z)}{q(\tau, z)}$  nicht von  $z$  abhängt. Man nennt  $m$  einen *integrierenden Faktor*.

### 1.3.2 Gleichungen mit Energieerhaltung

**DGL-Typ 65.** Ein *autonomes newton'sches System mit ortsabhängiger Kraft* ist eine DGL von der Form

$$y''(t) = F(y(t)) \quad (t \in I) \quad (319)$$

für ein  $F \in C^0(G; \mathbb{R}^n)$ , genannt *Kraftfeld*. Gesucht wird eine Lösung  $y \in C^2(I; \mathbb{R}^n)$ .

Der Name der Gleichung stammt vom *newton'schen Gesetz*  $F = ma [= my'']$ .

Wir suchen Integrale der Bewegung. Für DGLs zweiter Ordnung haben diese stets die Form

$$g(t, y(t), y'(t)) \equiv \text{const} \quad (t \in I) \quad (320)$$

**Proposition 66.** Es sei die DGL  $y''(t) = F(y(t))$ ,  $(t \in I)$  für ein  $F \in C^0(G; \mathbb{R}^n)$  gegeben. Es sei zusätzlich  $F$  ein Gradientenfeld mit Stammfunktion  $-U$ , d.h.  $F = -\nabla U$ . Dann ist für jede Lösung  $y \in C^2(I; \mathbb{R}^n)$

$$\mathcal{E}(y(t), y'(t)) = \frac{1}{2}|y'(t)|^2 + U(y(t)) \equiv \text{const.} \quad (321)$$

Das IDB  $\mathcal{E}$  heißt *Gesamtenergie*. Der erste Summand heißt *kinetische Energie* und der zweite heißt *potentielle Energie*.

**Beweis.** Die DGL besagt

$$y''(t) = F(y(t)) = -\nabla U(y(t)). \quad (322)$$

Wir nehmen das Skalarprodukt mit  $y'(t)$  und erhalten

$$\underbrace{\langle y''(t), y'(t) \rangle}_{(LS)} = -\underbrace{\langle \nabla U(y(t)), y'(t) \rangle}_{(RS)}. \quad (323)$$

Nun beachte

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}|y'(t)|^2 \right) = \frac{1}{2} \cdot 2 \langle y'(t), y''(t) \rangle = (LS). \quad (324)$$

$$-\frac{d}{dt} U(y(t)) = -DU(y(t)) \cdot y'(t) = \langle -\nabla U(y(t)), y'(t) \rangle = (RS). \quad (325)$$

Damit

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} |y'(t)|^2 \right) = -\frac{d}{dt} U(y(t)). \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} |y'(t)|^2 + U(y(t)) \right) = 0. \quad (326)$$

**Methode 67.** Wir betrachten hier die DGL  $y''(t) = F(y(t))$ , ( $t \in I$ ) im Spezialfall  $n = 1$ . Dann hat also jedes  $F \in C^0(J; \mathbb{R})$  eine Stammfunktion  $-U$  und es gilt  $-U(z) = \int^z F(s) ds$ . Gleichung (321) wird dann (für festes  $c \in \mathbb{R}$ ) zu

$$\frac{1}{2} y'(t)^2 + U(y(t)) = c. \quad \Rightarrow \quad y'(t)^2 = 2c - 2U(y(t)). \quad (327)$$

Umgestellt bedeutet dies

$$y'(t) = \pm \sqrt{2c - 2U(y(t))} \quad (t \in I). \quad (328)$$

Falls  $\pm = +$ , so können wir diese Gleichung als DGL mit getrennten Veränderlichen lösen. Genauso falls  $\pm = -$ . Es könnte aber passieren, dass sich das Vorzeichen auf  $I$  mehrmals wechselt. Dann kann man nur abschnittsweise lösen. Leider weiß man aber a priori nicht wie viele Vorzeichenwechsel stattfinden.

Etwas einfacher ist es wenn  $F > 0$ : Dann ist  $y'' > 0$  und somit  $y'$  streng monoton. Das bedeutet:  $y'$  kann maximal einmal das Vorzeichen wechseln.

**Beispiel 68.** Ein Teufel hält den Mond an und bringt ihn damit aus seiner Umlaufbahn. Danach lässt er ihn einfach los und verschwindet. Sei  $z(t)$  der Abstand von Mond und Erde. Auf den Mond wirkt dann nur noch die *Erdbanziehungskraft*

$$F(z(t)) = -G \frac{mM}{z(t)^2}, \quad G \text{ Graviationskonstante, } m \text{ Mondmasse, } M \text{ Erdmasse.} \quad (329)$$

Der Mond fliegt radial auf die Erde zu. Nach dem Newton'schen Gesetz erfüllt der Mond die Bewegungsgleichung  $F = ma = mz''(t)$ , d.h.

$$mz''(t) = F(z(t)) = -G \frac{mM}{z(t)^2}. \quad \Rightarrow \quad z''(t) = -\frac{GM}{z(t)^2}. \quad (330)$$

Wir haben auch noch Anfangsbedingungen, nämlich  $z(0) = R > 0$  (die Anfangshöhe) und  $z'(0) = 0$  (weil der Mond nach dem Eingriff des Teufels keine Geschwindigkeit hat). Also gilt

$$\begin{cases} z''(t) = -\frac{GM}{z(t)^2} & t \in (0, t_a) \\ z(0) = R \\ z'(0) = 0 \end{cases} \quad (331)$$

Hierbei ist  $t_a > 0$  die Zeit, bei der der Mond auf die Erde kracht. Wir berechnen zunächst

$$-U(z) = \int_R^z F(s) \, ds = - \int_R^z \frac{GM}{s^2} \, ds = GM \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{R} \right). \quad (332)$$

Daher gilt für ein  $c \in \mathbb{R}$  nach Proposition 66

$$c = \mathcal{E}(z(t), z'(t)) = \frac{1}{2}|z'(t)|^2 + U(z(t)) = \frac{1}{2}z'(t)^2 - GM \left( \frac{1}{z(t)} - \frac{1}{R} \right). \quad (333)$$

Setzen wir nun  $t = 0$  ein, so erhalten wir

$$c = \frac{1}{2}z'(0)^2 - GM \left( \frac{1}{z(0)} - \frac{1}{R} \right) = 0 - GM \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R} \right) = 0. \quad (334)$$

Dadurch erhalten wir mit (333)

$$\frac{1}{2}z'(t)^2 = GM \left( \frac{1}{z(t)} - \frac{1}{R} \right). \quad \Rightarrow \quad z'(t)^2 = 2GM \left( \frac{1}{z(t)} - \frac{1}{R} \right). \quad (335)$$

Jetzt müssen wir Wurzelziehen. Welches Vorzeichen entsteht dabei? Laut der DGL (331) ist  $z''(t) < 0$  für alle  $t$ . Somit ist  $z'$  monoton fallend. Da  $z'(0) = 0$  gilt  $z'(t) < 0$  für alle  $t \in (0, t_a)$ . Damit haben wir das Vorzeichen:

$$z'(t) = -\sqrt{2GM \left( \frac{1}{z(t)} - \frac{1}{R} \right)} \quad \forall t \in (0, t_a). \quad (336)$$

Wir lösen durch Separation.

$$\int_0^t \frac{z'(s)}{\sqrt{\frac{1}{z(s)} - \frac{1}{R}}} \, ds = -\sqrt{2GM}t. \quad \Rightarrow \quad \int_R^{z(t)} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{u} - \frac{1}{R}}} \, du = -\sqrt{2GM}t \quad (337)$$

Substituiert man  $v = \frac{u}{R}$  so erhält man

$$R^{\frac{3}{2}} \int_1^{\frac{z(t)}{R}} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{v} - 1}} \, dv = -\sqrt{2GM}t. \quad \Rightarrow \quad R^{\frac{3}{2}} \int_1^{\frac{z(t)}{R}} \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{1-v}} \, dv = -\sqrt{2GM}t. \quad (338)$$

Wir formen um und verwenden eine weitere Substitution:

$$R^{\frac{3}{2}} \int_1^{\frac{z(t)}{R}} \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{1-v}} dv = 2R^{\frac{3}{2}} \int_1^{\frac{z(t)}{R}} \frac{1}{2\sqrt{v}} \frac{v}{\sqrt{1-v}} dv \stackrel{w=\sqrt{v}}{=} 2R^{\frac{3}{2}} \int_1^{\sqrt{\frac{z(t)}{R}}} \frac{w^2}{\sqrt{1-w^2}} dw \quad (339)$$

$$= 2R^{\frac{3}{2}} \int_1^{\sqrt{\frac{z(t)}{R}}} \frac{w^2 - 1 + 1}{\sqrt{1-w^2}} dw = 2R^{\frac{3}{2}} \left( - \int_1^{\sqrt{\frac{z(t)}{R}}} \sqrt{1-w^2} dw + \int_1^{\sqrt{\frac{z(t)}{R}}} \frac{1}{\sqrt{1-w^2}} dw \right). \quad (340)$$

Beachte nun, dass  $\int^{\bar{w}} \frac{1}{\sqrt{1-w^2}} dw = \arcsin(\bar{w}) + C$  und

$$\int^{\bar{w}} \sqrt{1-w^2} dw \stackrel{w=\sin \varphi}{=} \int^{\arcsin(\bar{w})} \sqrt{1-\sin^2(\varphi)} \cos(\varphi) d\varphi = \int^{\arcsin \bar{w}} \cos^2 \varphi d\varphi \quad (341)$$

$$= \int^{\arcsin \bar{w}} \frac{1}{2}(1 + \cos(2\varphi)) d\varphi = \frac{1}{2} \arcsin \bar{w} + \frac{1}{4} \sin(2 \arcsin \bar{w}) + C. \quad (342)$$

Nun liefert (340) und die vorigen Nebenrechnungen

$$R^{\frac{3}{2}} \int_1^{\frac{z(t)}{R}} \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{1-v}} dv = 2R^{\frac{3}{2}} \left[ -\frac{1}{2} \arcsin \bar{w} - \frac{1}{4} \sin(2 \arcsin \bar{w}) + \arcsin \bar{w} \right]_{\bar{w}=1}^{\bar{w}=\sqrt{\frac{z(t)}{R}}} \quad (343)$$

$$= 2R^{\frac{3}{2}} \left[ \frac{1}{2} \arcsin \bar{w} - \frac{1}{4} \sin(2 \arcsin \bar{w}) \right]_{\bar{w}=1}^{\bar{w}=\sqrt{\frac{z(t)}{R}}} \quad (344)$$

$$\stackrel{\arcsin(1)=\frac{\pi}{2}}{=} 2R^{\frac{3}{2}} \left( \frac{1}{2} \arcsin \sqrt{\frac{z(t)}{R}} - \frac{1}{4} \sin \left( 2 \arcsin \sqrt{\frac{z(t)}{R}} \right) - \frac{\pi}{4} \right). \quad (345)$$

Mit (338) sehen wir

$$2R^{\frac{3}{2}} \left( \frac{1}{2} \arcsin \sqrt{\frac{z(t)}{R}} - \frac{1}{4} \sin \left( 2 \arcsin \sqrt{\frac{z(t)}{R}} \right) - \frac{\pi}{4} \right) = -\sqrt{2GM}t. \quad (346)$$

Dies ist schwer nach  $z(t)$  aufzulösen, daher lassen wir es an der Stelle. Man kann aber einiges schon an (346) ablesen. Zum Beispiel den Zeitpunkt  $t_a$  an dem Mond und Erde zusammenkrachen. Dieser erfüllt  $z(t_a) = 0$ . Eingesetzt in (346):

$$2R^{\frac{3}{2}} \left( \frac{1}{2} \arcsin 0 - \frac{1}{4} \sin \arcsin 0 - \frac{\pi}{4} \right) = -\sqrt{2GM}t_a. \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi}{2} R^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2GM}t_a. \quad (347)$$

Also gilt

$$t_a = \frac{\pi R^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{2}\sqrt{GM}}. \quad (348)$$

### 1.3.3 Das Fadenpendel

Wir kommen nun zu einer speziellen Anwendung, nämlich der Beschreibung des *Fadenpendels*.

**Herleitung 69.** An einem pendelnden Stab der Länge  $l > 0$  hängt ein Massepunkt der Masse  $m > 0$ , siehe Abbildung 2. Die zeitliche Bewegung des Pendels wird durch den Ortsvektor

$$\vec{x}(t) = l \begin{pmatrix} \sin \varphi(t) \\ -\cos \varphi(t) \end{pmatrix} \quad (349)$$

beschrieben. Hierbei ist der Ursprung  $(0, 0)^T$  am Aufhängepunkt des Pendels, d.h.  $\varphi(t) = 0$  würde heißen, dass das Pendel in der Ruhelage  $(0, -l)^T$  ist. Die Kraft, die die Pendelbewegung verursacht ist die *Gewichtskraft*

$$\vec{F} = mg \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (350)$$

Die Newton'schen Bewegungsgleichungen lesen sich dann  $\vec{F} = m\vec{a} = m\vec{x}''(t)$ . Wir berechnen nun  $\vec{x}''$ :

$$\vec{x}'(t) = l\varphi'(t) \begin{pmatrix} \cos \varphi(t) \\ \sin \varphi(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{x}''(t) = l\varphi''(t) \begin{pmatrix} \cos \varphi(t) \\ \sin \varphi(t) \end{pmatrix} + l\varphi'(t)^2 \begin{pmatrix} -\sin \varphi(t) \\ \cos \varphi(t) \end{pmatrix}. \quad (351)$$

Schreiben wir also  $m\vec{x}'' = \vec{F}$  aus, so ergibt sich

$$ml\varphi''(t) \begin{pmatrix} \cos \varphi(t) \\ \sin \varphi(t) \end{pmatrix} + ml\varphi'(t)^2 \begin{pmatrix} -\sin \varphi(t) \\ \cos \varphi(t) \end{pmatrix} = mg \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (352)$$

Wir vereinfachen: Nimm beide Seiten im Skalarprodukt mit  $v(t) := \begin{pmatrix} \cos \varphi(t) \\ \sin \varphi(t) \end{pmatrix}$ . Mit

$$\left\langle \begin{pmatrix} \cos \varphi(t) \\ \sin \varphi(t) \end{pmatrix}, v(t) \right\rangle = 1, \quad \left\langle \begin{pmatrix} -\sin \varphi(t) \\ \cos \varphi(t) \end{pmatrix}, v(t) \right\rangle = 0, \quad \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, v(t) \right\rangle = -\sin \varphi(t) \quad (353)$$

ergibt sich eine DGL:

$$ml\varphi''(t) = -mg \sin \varphi(t). \quad (354)$$

Teilen wir durch  $ml$  und definieren wir  $\omega := \sqrt{\frac{g}{l}} > 0$  so erhalten wir

$$\varphi''(t) = -\omega^2 \sin \varphi(t). \quad (355)$$

Für kleine Auslenkungswinkel  $\varphi(t)$  kann man " $\sin \varphi(t) \approx \varphi(t)$ " annähern. Dann wird (355) zu der aus Anwendung 40 bekannten Gleichung  $\varphi''(t) + \omega^2 \varphi(t) = 0$ . Wir wollen diese *Kleinwinkelnäherung* aber im Folgenden nicht verwenden.

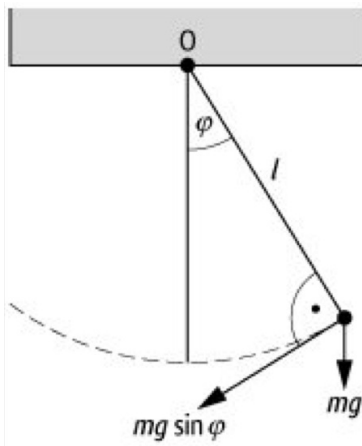


Abbildung 2: Das Fadenpendel

**Lemma 70.** Betrachte für  $\omega, \alpha_0 > 0$  das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \varphi''(t) = -\omega^2 \sin \varphi(t) & (t \in \mathbb{R}) \\ \varphi(0) = 0 \\ \varphi'(0) = \alpha_0 \end{cases} . \quad (356)$$

Dann gilt

$$\varphi'(t)^2 = 2\omega^2 \cos(\varphi(t)) + \alpha_0^2 - 2\omega^2 \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (357)$$

**Beweis.** Wir verwenden Proposition 66 mit  $F(z) = -\omega^2 \sin(z)$ . Wir berechnen eine Stammfunktion

$$-U(z) = \int^z F(s) \, ds = -\omega^2 \int^z \sin(s) \, ds = \omega^2 \cos(s). \quad (358)$$

Proposition 66 besagt dann

$$\frac{1}{2}\varphi'(t)^2 - \omega^2 \cos \varphi(t) = \text{const.} = \frac{1}{2}\varphi'(0)^2 - \omega^2 \cos \varphi(0) = \frac{1}{2}\alpha_0^2 - \omega^2. \quad (359)$$

Multiplizieren mit 2 und Umstellen liefert die Behauptung.

Anhand von (357) wollen wir verstehen, ob das Pendel nur schwingt, oder ob es einen *Überschlag* macht. Wir benötigen als Vorbereitung dafür ein Hilfsresultat über konvexe Funktionen.

**Proposition 71.** Es sei  $f \in C^1((a, b); \mathbb{R})$  konvex (bzw. konkav).

1. Dann gilt für alle  $x, x_0 \in (a, b)$ , dass  $f(x) \underset{\text{(bzw. } \leq \text{)}}{\geq} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ .



2. Gilt für ein  $x_0 \in (a, b)$ , dass  $f'(x_0) = 0$ , so ist  $x_0$  eine globale Minimumsstelle (bzw. Maximumsstelle) von  $f$  auf  $(a, b)$ .

**Beweis.** Blatt 5 Aufgabe 3.

**Satz 72.** Es seien  $\omega, \alpha_0 > 0$  und  $\varphi \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$  Lösung von

$$\begin{cases} \varphi''(t) = -\omega^2 \sin \varphi(t) & (t \in \mathbb{R}) \\ \varphi(0) = 0 \\ \varphi'(0) = \alpha_0 \end{cases} . \quad (360)$$

Dann tritt genau einer der folgenden drei Fälle auf

1. (*Überschlag*)  $\alpha_0^2 > 4\omega^2$ . Dann ist  $\varphi$  unbeschränkt, genauer  $\varphi(t) \geq t\sqrt{\alpha_0^2 - 4\omega^2}$  für alle  $t \in [0, \infty)$ .
2. (*Schwingung*)  $\alpha_0^2 < 4\omega^2$ . Dann gibt es  $\varphi_{max} \in (0, \pi)$  mit  $\varphi(t) \in [-\varphi_{max}, \varphi_{max}]$  für alle  $t \in [0, \infty)$ . Genauer gilt  $\varphi_{max} = \arccos(1 - \frac{\alpha_0^2}{2\omega^2})$ .
3. (*Aufstellen*)  $\alpha_0^2 = 4\omega^2$ . Dann ist  $\varphi$  monoton wachsend, beschränkt und  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \pi$ . Genauer  $\varphi(t) = 2 \arctan(\sinh(\frac{\alpha_0}{2}t))$  für alle  $t \in [0, \infty)$ .

**Beweis.** FALL 1.  $\alpha_0^2 > 4\omega^2$ . Mit Lemma 70 gilt

$$\varphi'(t)^2 = 2\omega^2 \cos \varphi(t) + \alpha_0^2 - 2\omega^2 \geq 2\omega^2(-1) + \alpha_0^2 - 2\omega^2 = \alpha_0^2 - 4\omega^2. \quad (361)$$

Wir erhalten  $|\varphi'(t)| \geq \sqrt{\alpha_0^2 - 4\omega^2} > 0$ . Somit kann  $\varphi'(t)$  niemals Null werden. Also kann  $\varphi'$  auch nicht das Vorzeichen wechseln (nach dem Zwischenwertsatz). Mit  $\varphi'(0) = \alpha_0 > 0$  folgt  $\varphi'(t) > 0$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  und damit

$$\varphi'(t) = |\varphi'(t)| \geq \sqrt{\alpha_0^2 - 4\omega^2}. \quad (362)$$

Integrieren liefert

$$\varphi(t) = \varphi(t) - \varphi(0) = \int_0^t \varphi'(s) ds \geq \int_0^t \sqrt{\alpha_0^2 - 4\omega^2} ds = t\sqrt{\alpha_0^2 - 4\omega^2}. \quad (363)$$

FALL 2.  $\alpha_0^2 < 4\omega^2$ . Sei wie in der Aussage  $\varphi_{max} := \arccos(1 - \frac{\alpha_0^2}{2\omega^2}) \in (0, \pi)$  und sei  $\varepsilon \in (0, \pi - \varphi_{max})$  beliebig vorgegeben. Setze

$$\bar{t}_\varepsilon := \sup\{t \in [0, \infty) : |\varphi(s)| \leq \varphi_{max} + \varepsilon \forall s \in [0, t]\}. \quad (364)$$

Wir zeigen  $\bar{t}_\varepsilon = \infty$ . Angenommen  $\bar{t}_\varepsilon < \infty$ , dann wäre (aus Stetigkeitsgründen)  $|\varphi(\bar{t}_\varepsilon)| = (\varphi_{max} + \varepsilon)$ , d.h.  $\varphi(\bar{t}_\varepsilon) = \pm(\varphi_{max} + \varepsilon)$ . Im Fall ' $\pm = +$ ' gibt es (wieder aus Stetigkeitsgründen)

$s_\varepsilon, \underline{t}_\varepsilon \in \mathbb{R}$  mit  $0 \leq s_\varepsilon < \underline{t}_\varepsilon < \bar{t}_\varepsilon$  so, dass  $\varphi(\underline{t}_\varepsilon) = \varphi_{max}$  und  $\varphi|_{(s_\varepsilon, \bar{t}_\varepsilon)} > 0$ . Nun gilt mit Lemma 70 und der Definition von  $\varphi_{max}$

$$\varphi'(\underline{t}_\varepsilon)^2 = 2\omega^2 \cos \varphi(\underline{t}_\varepsilon) + \alpha_0^2 - 2\omega^2 = 2\omega^2 \cos(\varphi_{max}) + \alpha_0^2 - 2\omega^2 \quad (365)$$

$$= 2\omega^2(1 - \frac{\alpha_0^2}{2\omega^2}) + \alpha_0^2 - 2\omega^2 = 0. \quad \Rightarrow \varphi'(\underline{t}_\varepsilon) = 0. \quad (366)$$

Außerdem gilt für  $t \in (s_\varepsilon, \bar{t}_\varepsilon)$

$$\varphi''(t) = -\omega^2 \sin \varphi(t) < 0, \quad \text{da} \quad 0 < \varphi(t) \leq \varphi_{max} + \varepsilon < \pi \quad \text{für alle } t \in (s_\varepsilon, \bar{t}_\varepsilon). \quad (367)$$

Deshalb ist  $\varphi$  konkav auf  $(s_\varepsilon, \bar{t}_\varepsilon)$  und laut (366) gilt  $\varphi'(\underline{t}_\varepsilon) = 0$ . Nach Proposition 71 ist dann  $\underline{t}_\varepsilon$  eine globale Maximumsstelle von  $\varphi$  auf  $(s_\varepsilon, \bar{t}_\varepsilon)$ , d.h.  $\varphi(t) \leq \varphi(\underline{t}_\varepsilon) = \varphi_{max}$  für alle  $t \in (s_\varepsilon, \bar{t}_\varepsilon)$ . Lässt man nun  $t \uparrow \bar{t}_\varepsilon$  streben so erhält man den Widerspruch  $\varphi_{max} + \varepsilon \leq \varphi_{max}$ . Den Fall ‘ $\pm = -$ ’ behandelt man analog. Man schließt also  $\bar{t}_\varepsilon = \infty$  und daher (nach Definition von  $\bar{t}_\varepsilon$ )

$$|\varphi(t)| \leq \varphi_{max} + \varepsilon \quad \forall t \in (0, \infty). \quad (368)$$

Lässt man  $\varepsilon$  gegen null gehen so folgert man  $|\varphi(t)| \leq \varphi_{max}$  for  $t \in (0, \infty)$ .

FALL 3.  $\alpha_0^2 = 4\omega^2$ . Mit Lemma 70 folgt wieder

$$\varphi'(t)^2 = 2\omega^2 \cos \varphi(t) + \alpha_0^2 - 2\omega^2 = 2\omega^2 \cos \varphi(t) + 2\omega^2 = 2\omega^2(1 + \cos \varphi(t)). \quad (369)$$

Beachte nun

$$1 + \cos z = (\cos^2 \frac{z}{2} + \sin^2 \frac{z}{2}) + (\cos^2 \frac{z}{2} - \sin^2 \frac{z}{2}) = 2 \cos^2 \frac{z}{2}. \quad (370)$$

Daher gilt mit (369)

$$\varphi'(t)^2 = 4\omega^2 \cos^2 \frac{\varphi(t)}{2} = \alpha_0^2 \cos^2 \frac{\varphi(t)}{2}. \quad (371)$$

Definiere

$$M := \sup\{m \in [0, \infty) : \varphi'(t) > 0, \varphi(t) < \pi \quad \forall t \in [0, m]\}. \quad (372)$$

Beachte, dass  $M > 0$  da  $\varphi(0) = 0 < \pi$  und  $\varphi'(0) = \alpha_0 > 0$ . Für alle  $t \in [0, M]$  können wir in (371) Wurzelziehen (mit Vorzeichen ‘+’). Daher gilt für  $t \in (0, M)$

$$\varphi'(t) = \alpha_0 \cos \frac{\varphi(t)}{2} = \alpha_0 \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \frac{\varphi(t)}{2}}}, \quad (373)$$

wobei wir für alle  $z \in [0, \frac{\pi}{2})$   $\cos(z) = \frac{\cos z}{\sqrt{\cos^2 z + \sin^2 z}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 z}}$  umgeformt haben. Man hat

$$\varphi'(t) \sqrt{1 + \tan^2 \frac{\varphi(t)}{2}} = \alpha_0, \quad (374)$$

$$\Rightarrow \int_0^t \varphi'(s) \sqrt{1 + \tan^2 \frac{\varphi(s)}{2}} ds = \alpha_0 t, \quad (375)$$

$$\Rightarrow \int_0^{\varphi(t)} \sqrt{1 + \tan^2 \frac{u}{2}} du = \alpha_0 t \quad \forall t \in (0, M). \quad (376)$$

Nun berechnen wir

$$\int^z \sqrt{1 + \tan^2 \frac{u}{2}} du = \int^z \frac{1 + \tan^2 \frac{u}{2}}{\sqrt{1 + \tan^2 \frac{u}{2}}} du = 2 \int^z \frac{\frac{1}{2}(1 + \tan^2 \frac{u}{2})}{\sqrt{1 + \tan^2 \frac{u}{2}}} du \quad (377)$$

$$\stackrel{\substack{v = \tan \frac{u}{2} \\ \frac{dv}{du} = \frac{1}{2}(1 + \tan^2 \frac{u}{2})}}{=} 2 \int^{\tan \frac{z}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 + v^2}} dv = 2 \operatorname{Arsinh} \left( \tan \frac{z}{2} \right) + C. \quad (378)$$

Man erhält mit (376)

$$2 \operatorname{Arsinh} \left( \tan \frac{\varphi(t)}{2} \right) = \alpha_0 t \quad \forall t \in (0, M). \quad (379)$$

Umgeformt ergibt sich

$$\varphi(t) = 2 \arctan \left( \sinh \frac{\alpha_0 t}{2} \right) \quad \forall t \in (0, M). \quad (380)$$

Noch  $\mathbf{Z}_2$ :  $M = \infty$ . Nehmen wir nun an  $M < \infty$ . Dann gilt nach (372) entweder  $\varphi(M) = \pi$  oder  $\varphi'(M) = 0$ . Im ersten Fall hat man dann mit (380)

$$\pi = \varphi(M) = \lim_{t \uparrow M, t < M} \varphi(t) = \lim_{t \uparrow M, t < M} 2 \arctan \left( \sinh \frac{\alpha_0 t}{2} \right) = 2 \arctan \left( \sinh \frac{\alpha_0 M}{2} \right). \quad (381)$$

Da  $\arctan(w) < \frac{\pi}{2}$  für alle  $w \in \mathbb{R}$ , also auch  $2 \arctan(w) < \pi$  für alle  $w \in \mathbb{R}$  ergibt sich ein Widerspruch. Im zweiten Fall (d.h. falls  $\varphi'(M) = 0$ ) hätte man auch mit (380)

$$0 = \varphi'(M) = \lim_{t \uparrow M, t < M} \varphi'(t) = \lim_{t \uparrow M, t < M} \frac{d}{dt} 2 \arctan \left( \sinh \frac{\alpha_0 t}{2} \right) \quad (382)$$

$$= \lim_{t \uparrow M, t < M} 2 \frac{1}{1 + \sinh^2 \frac{\alpha_0 t}{2}} \frac{\alpha_0}{2} \cosh \frac{\alpha_0 t}{2} = \alpha_0 \frac{1}{1 + \sinh^2 \frac{\alpha_0 M}{2}} \cosh \frac{\alpha_0 M}{2} > 0. \quad (383)$$

Ein Widerspruch. Es folgt  $M = \infty$  und dann impliziert (380) die Behauptung.

## 2 Existenz, Eindeutigkeit, Globalität und Wohlgestelltheit

Sei in diesem Kapitel wieder stets  $I \subset \mathbb{R}$  offenes Intervall und  $G \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet. Im Folgenden untersuchen wir für  $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^n)$ ,  $t_0 \in I$  und  $y_0 \in G$  Anfangswertprobleme der Form

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & (t \in I) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (384)$$

Wir nennen nach wie vor eine Funktion  $y \in C^1(I; G)$ , die beide Eigenschaften in (384) erfüllt eine *Lösung* von (384).

### 2.1 Existenz und Eindeutigkeit

#### 2.1.1 Thematischer Überblick

In dieser Sektion geben wir zunächst einen Überblick über die Resultate die wir beweisen wollen. Die Beweise folgen dann im Laufe der Sektion.

**Fragestellungen 73.** Gegeben sei für  $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^n)$ ,  $t_0 \in I$  und  $y_0 \in G$  das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & (t \in I) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (385)$$

1. Existiert stets eine Lösung  $y \in C^1(I; G)$ ?
2. Falls nein: Gibt es ein (größtmögliches) Teilintervall  $\tilde{I} \subset I$ ,  $t_0 \in \tilde{I}$  so, dass

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & (t \in \tilde{I}) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (386)$$

eine Lösung besitzt?

3. Falls ja: Sind Lösungen eindeutig?

**Zu Frage 1.** Im Allgemeinen ist die Antwort ‘nein’: In Beispiel 5 haben wir gezeigt, dass

$$\begin{cases} y'(t) = y(t)^2 & (t \in \mathbb{R}) \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (387)$$

keine Lösung besitzt. Unter manchen Bedingungen an  $f$  existiert jedoch schon eine Lösung auf ganz  $I$ :

**Definition 74.** GLOBALE LIPSCHITZ-BEDINGUNG. Eine Funktion  $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^n)$

erfüllt eine globale Lipschitzbedingung auf  $I$ , falls es ein  $L > 0$  gibt mit

$$|f(\tau, z_2) - f(\tau, z_1)| \leq L|z_2 - z_1| \quad \forall \tau \in I \quad \forall z_1, z_2 \in G. \quad (388)$$

In diesem Fall heißt  $L$  eine *Lipschitzkonstante* für  $f$ .

Eine solche globale Lipschitz-Bedingung ist hinreichend für (eindeutige) Existenz von Lösungen:

**Satz 75. SATZ VON PICARD-LINDELÖF I – GLOBALE VERSION.** Es sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall und  $f \in C^0(I \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$  erfülle eine globale Lipschitzbedingung (auf  $G = \mathbb{R}^n$  (!)). Dann hat für alle  $t_0 \in I$  und  $y_0 \in \mathbb{R}^n$  das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & (t \in I) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (389)$$

eine eindeutige Lösung  $y \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$ .

Es geht sogar mit noch schwächeren Bedingungen an  $f$ , dazu später mehr im Kapitel 2.2.

**Zu Frage 2.** Die Antwort ist ‘ja’. ‘Größtmöglich’ ist hierbei in folgendem Sinne zu verstehen.

**Definition 76. NICHTFORTSETZBARE LÖSUNG.** Es seien  $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^n)$ ,  $t_0 \in I$  und  $y_0 \in G$ . Für ein offenes Teilintervall  $\tilde{I} \subset I$ ,  $t_0 \in \tilde{I}$  heißt eine Lösung  $y \in C^1(\tilde{I}; G)$  von

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & (t \in \tilde{I}) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (390)$$

*nichtfortsetzbare Lösung*, falls es keine Funktion  $z \in C^1(J; G)$  gibt mit  $J \supsetneq \tilde{I}$  offenes Intervall,  $z|_{\tilde{I}} = y$  und

$$\begin{cases} z'(t) = f(t, z(t)) & (t \in J) \\ z(t_0) = y_0 \end{cases}. \quad (391)$$

Wie bereits angekündigt, finden wir immer nichtfortsetzbare Lösungen.

**Satz 77. SATZ VON PEANO.** Es sei  $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^n)$ ,  $t_0 \in I$ ,  $y_0 \in G$ . Dann existiert  $\tilde{I} \subset I$  mit  $t_0 \in \tilde{I}$  und mit einer nichtfortsetzbaren Lösung  $y \in C^1(\tilde{I}; G)$  des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & (t \in \tilde{I}) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (392)$$

Dies werden wir nicht komplett beweisen. Lückenlos werden wir aber eine leicht schwächere Existenzaussage zeigen. Hierzu müssen wir die *lokale Lipschitzbedingung* einführen.

**Definition 77.** LOKALE LIPSCHITZBEDINGUNG. Eine Funktion  $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^n)$  erfüllt eine lokale Lipschitzbedingung auf  $I$  falls es zu jedem  $(\tau_0, z_0) \in I \times G$  ein  $\varepsilon > 0, r > 0$  und  $L > 0$  gibt mit  $(\tau_0 - \varepsilon, \tau_0 + \varepsilon) \subset I, B_r(z_0) \subset G$  und

$$|f(\tau, z_1) - f(\tau, z_2)| \leq L|z_1 - z_2| \quad \forall t \in (\tau_0 - \varepsilon, \tau_0 + \varepsilon), z_1, z_2 \in B_r(z_0). \quad (393)$$

Damit können das Existenzresultat formulieren, welches für diese Vorlesung ausreichen wird.

**Satz 78.** ABGESCHWÄCHTER SATZ VON PEANO. Es erfülle  $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^n)$  eine lokale Lipschitzbedingung. Sei dazu  $t_0 \in I$  und  $y_0 \in G$ . Dann existiert ein Teilintervall  $\tilde{I} \subset I$  mit  $t_0 \in \tilde{I}$  und mit einer nichtfortsetzbaren Lösung  $y \in C^1(\tilde{I}; G)$  des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & (t \in \tilde{I}) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (394)$$

Wir werden später sehen, dass diese nichtfortsetzbare Lösung sogar eindeutig ist.

**Zu Frage 3.** Im Allgemeinen ist die Antwort wieder ‘nein’: In Beispiel 4 haben wir gezeigt, dass das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) = 2\sqrt{|y(t)|} & (t \in \mathbb{R}) \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad (395)$$

sogar unendlich viele Lösungen besitzt. Lösungen sind also nicht eindeutig. Wie wir aber in Satz 75 schon gesehen haben, können wir unter einer globalen Lipschitzbedingung Eindeutigkeit erreichen. Es geht sogar noch besser:

**Satz 79.** EINDEUTIGKEITSSATZ. Es erfülle  $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^n)$  eine lokale Lipschitzbedingung, sei  $t_0 \in I$  und  $y_0 \in G$ . Seien  $I_1, I_2 \subset I$  Teilintervalle mit  $t_0 \in I_1 \cap I_2$  und  $y_j \in C^1(I_j; G)$  ( $j = 1, 2$ ) Lösungen von

$$\begin{cases} y_j'(t) = f(t, y_j(t)) & (t \in I_j) \\ y_j(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (j = 1, 2). \quad (396)$$

Dann gilt  $y_1|_{I_1 \cap I_2} = y_2|_{I_1 \cap I_2}$ .

**Ein Supersatz zu Frage 2 und 3.** Die lokale Lipschitzbedingung ist relevant sowohl bei unserem Existenzsatz als auch bei unserem Eindeutigkeitssatz. Wir können beide Sätze kombinieren und erhalten mit etwas Arbeit die Existenz einer eindeutigen sogenannten *maximalen Lösung*.

**Definition 80.** MAXIMALE LÖSUNG. Es seien  $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^n)$ ,  $t_0 \in I$  und  $y_0 \in G$ .

Eine Funktion  $y \in C^1(\hat{I}; G)$  ( $\hat{I} \subset I, t_0 \in \hat{I}$ ) heißt *maximale Lösung* von

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (397)$$

falls  $y$  auf  $\hat{I}$  eine Lösung ist und für alle weiteren Lösungen  $z \in C^1(J; G)$  von

$$\begin{cases} z'(t) = f(t, z(t)) & (t \in J) \\ z(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (398)$$

gilt, dass  $J \subset \hat{I}$  und  $y|_J = z$ .

In Worten: Falls eine maximale Lösung existiert, so ist jede weitere Lösung eine Einschränkung der maximalen Lösung.

Mit diesem Konzept formulieren wir nun den wohl zentralsten Satz der Vorlesung.

**Satz 81. SATZ VON PICARD-LINDELÖF II - LOKALE VERSION.** Es erfülle  $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^n)$  eine lokale Lipschitzbedingung, sei  $t_0 \in I$  und  $y_0 \in G$ . Dann gibt es eine eindeutige maximale Lösung  $y \in C^1(\hat{I}; G)$ , ( $\hat{I} \subset I, t_0 \in \hat{I}$ ) von

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (399)$$

In Abschnitt 2.2 soll es darum gehen, zu verstehen, wie groß diese maximale Lösung sein muss, d.h. was bei einem Randpunkt von  $\hat{I}$  *schiefgehen* muss, damit die Lösung aufhört zu existieren.

### 2.1.2 Lipschitz-Bedingungen

Der folgende Abschnitt soll die oben aufgetauchten *Lipschitz-Bedingungen* ein wenig plastischer machen.

Funktion	Lok. Lip-bed.?	Glob. Lip-bed.?	Beschränkt?
$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(\tau, z) = z^2$	✓	×	×
$f : \mathbb{R} \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(\tau, z) = \sin \frac{1}{z}$	✓	×	✓
$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(\tau, z) = 2\sqrt{ z }$	×	×	×
$f : \mathbb{R} \times (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(\tau, z) = 2\sqrt{ z }$	✓	✓	×

Tabelle 1: Eine Zusammenfassung von Übungsaufgabe 2 Blatt 6.

**Zur lokalen Lipschitzbedingung.** Zuerst zeigen wir ein Kriterium, mit dem sich die lokale Lipschitzbedingung überprüfen lässt.

**Proposition 82.** Es sei  $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^n)$  so, dass für alle  $\tau \in I$  die Abbildung  $f^{(\tau)} : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $f^{(\tau)}(z) := f(\tau, z)$  differenzierbar ist. Ferner sei die Abbildung  $(\tau, z) \mapsto D_z f^{(\tau)}(z) [= D_z f(\tau, z)]$  stetig auf  $I \times G$ . Dann erfüllt  $f$  eine lokale Lipschitzbedingung auf  $I$ .

**Beweis.** Sei  $(\tau_0, z_0) \in I \times G$ . Wähle  $\varepsilon > 0$ ,  $r > 0$  mit  $[\tau_0 - \varepsilon, \tau_0 + \varepsilon] \subset I$  und  $\overline{B_r(z_0)} \subset G$  (solche  $r, \varepsilon$  existieren wegen der Offenheit von  $I$  und  $G$ ). Da  $[\tau_0 - \varepsilon, \tau_0 + \varepsilon] \times \overline{B_r(z_0)}$  kompakt ist und für alle  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  die Abbildung  $(\tau, z) \mapsto |\partial_{z_j} f_i(\tau, z)|$  stetig ist, gilt nach dem Satz von Weierstraß

$$\tilde{L} := \max_{i,j=1,\dots,n} \max_{(\tau,z) \in [\tau_0-\varepsilon, \tau_0+\varepsilon] \times \overline{B_r(z_0)}} |\partial_{z_j} f_i(\tau, z)| < \infty. \quad (400)$$

Nun sei  $\tau \in [\tau_0 - \varepsilon, \tau_0 + \varepsilon]$  und  $z_1, z_2 \in \overline{B_r(z_0)}$  fix. Definiere für  $i \in \{1, \dots, n\}$  die Hilfsfunktion  $h_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $h_i(\lambda) := f_i(\tau, z_1 + \lambda(z_2 - z_1))$ . Nun gilt

$$|f_i(\tau, z_2) - f_i(\tau, z_1)| = |h_i(1) - h_i(0)| = \left| \int_0^1 h_i'(\lambda) \, d\lambda \right| \quad (401)$$

$$= \left| \int_0^1 \frac{d}{d\lambda} [f_i(\tau, z_1 + \lambda(z_2 - z_1))] \, d\lambda \right| \quad (402)$$

$$\stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \left| \int_0^1 D_z f_i(\tau, z_1 + \lambda(z_2 - z_1)) \cdot (z_2 - z_1) \, d\lambda \right| \quad (403)$$

$$\stackrel{\Delta\text{-Üngl.}}{\leq} \int_0^1 |D_z f_i(\tau, z_1 + \lambda(z_2 - z_1)) \cdot (z_2 - z_1)| \, d\lambda \quad (404)$$

$$\stackrel{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \int_0^1 |D_z f_i(\tau, z_1 + \lambda(z_2 - z_1))| |z_2 - z_1| \, d\lambda. \quad (405)$$

Beachte nun, dass  $z_1, z_2 \in \overline{B_r(z_0)}$  impliziert, dass für alle  $\lambda \in [0, 1]$  gilt  $z_1 + \lambda(z_2 - z_1) = \lambda z_2 + (1 - \lambda)z_1 \in \overline{B_r(z_0)}$ . Wir folgern für alle  $\lambda \in [0, 1]$

$$|D_z f_i(\tau, z_1 + \lambda(z_2 - z_1))| = \sqrt{\sum_{j=1}^n |\partial_{z_j} f_i(\tau, z_1 + \lambda(z_2 - z_1))|^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^n \tilde{L}^2} = \tilde{L}\sqrt{n}. \quad (406)$$

Mit (405) gilt

$$|f_i(\tau, z_2) - f_i(\tau, z_1)| \leq \int_0^1 \tilde{L}\sqrt{n} |z_2 - z_1| \, d\lambda = \tilde{L}\sqrt{n} |z_2 - z_1| \quad (407)$$



und somit

$$|f(\tau, z_2) - f(\tau, z_1)| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |f_i(\tau, z_2) - f_i(\tau, z_1)|^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \tilde{L}^2 n |z_2 - z_1|^2} = n\tilde{L}|z_2 - z_1|. \quad (408)$$

Die Behauptung folgt mit  $L := n\tilde{L}$ .

Wir zeigen nun, dass die lokale Lipschitzbedingung nicht nur eine Lipschitzabschätzung auf kleinen Bällen, sondern auch auf beliebigen Kompakta liefert.

**Proposition 83.** Es erfülle  $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^n)$  eine lokale Lipschitzbedingung. Es sei nun  $A \subset I$  kompakt und  $K \subset G$  kompakt. Dann gibt es  $L^* > 0$  (abhängig von  $A$  und  $K$ ) mit

$$|f(\tau, z_2) - f(\tau, z_1)| \leq L^* |z_2 - z_1| \quad \forall \tau \in A, \forall z_1, z_2 \in K. \quad (409)$$

**Beweis.** Seien  $A$  und  $K$  wie in der Aussage. Angenommen es gibt kein  $L^* > 0$  für welches (409) erfüllt ist. Dann gibt es zu jedem  $k \in \mathbb{N}$  ein  $\tau^{(k)} \in A$ ,  $z_1^{(k)}, z_2^{(k)} \in K$  so, dass

$$|f(\tau^{(k)}, z_2^{(k)}) - f(\tau^{(k)}, z_1^{(k)})| > k |z_2^{(k)} - z_1^{(k)}|. \quad (410)$$

Daraus folgt für alle  $k \in \mathbb{N}$

$$|z_2^{(k)} - z_1^{(k)}| \leq \frac{1}{k} |f(\tau^{(k)}, z_2^{(k)}) - f(\tau^{(k)}, z_1^{(k)})| \stackrel{\Delta\text{-Üngl.}}{\leq} \frac{1}{k} (|f(\tau^{(k)}, z_2^{(k)})| + |f(\tau^{(k)}, z_1^{(k)})|) \quad (411)$$

Beachte, dass (wegen der Kompaktheit von  $A \times K$ ) gilt, dass  $M := \max_{(\tau, z) \in A \times K} |f(\tau, z)| < \infty$  (Satz von Weierstraß). Man folgert

$$|z_2^{(k)} - z_1^{(k)}| \stackrel{(411)}{\leq} \frac{2M}{k} \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (412)$$

Wegen der Kompaktheit von  $K$  hat  $(z_1^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  nun eine konvergente Teilfolge  $(z_1^{(l_k)})_{k \in \mathbb{N}}$ . (Beachte insbesondere  $l_k \rightarrow \infty$  für  $k \rightarrow \infty$ ). Sei etwa  $z_0 \in K$  der Grenzwert dieser Teilfolge. Beachte

$$|z_2^{(l_k)} - z_0| \leq |z_2^{(l_k)} - z_1^{(l_k)}| + |z_1^{(l_k)} - z_0| \stackrel{(412)}{\leq} \frac{2M}{l_k} + \underbrace{|z_1^{(l_k)} - z_0|}_{\rightarrow 0, \text{ da } z_1^{(l_k)} \rightarrow z_0} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 + 0 = 0. \quad (413)$$

Somit gilt auch  $z_2^{(l_k)} \rightarrow z_0$ . Nun konvergiert wegen der Kompaktheit von  $A$  auch eine Teilfolge von  $(\tau^{(l_k)})_{k \in \mathbb{N}}$ , etwa konvergiere  $(\tau^{(\tilde{l}_k)})_{k \in \mathbb{N}}$  gegen ein  $\tau_0 \in A$ . Nun gilt  $(\tau_0, z_0) \in A \times K \subset I \times G$  und daher gibt es  $\varepsilon > 0$  und  $r > 0$  und  $L > 0$  so, dass

$$|f(\tau, z_2) - f(\tau, z_1)| \leq L |z_2 - z_1| \quad \forall \tau \in (\tau_0 - \varepsilon, \tau_0 + \varepsilon), z_1, z_2 \in B_r(z_0). \quad (414)$$

Wegen den oben genannten Konvergenzen gibt es ein  $k_0 \in \mathbb{N}$  so, dass

$$|\tau^{(\tilde{l}_k)} - \tau_0| < \varepsilon, \quad |z_1^{(\tilde{l}_k)} - z_0| < r, \quad |z_2^{(\tilde{l}_k)} - z_0| < r \quad \forall k \geq k_0. \quad (415)$$

Daher gilt für  $k \geq k_0$ , dass  $\tau^{(\tilde{l}_k)} \in (\tau_0 - \varepsilon, \tau_0 + \varepsilon)$ ,  $z_1^{(\tilde{l}_k)}, z_2^{(\tilde{l}_k)} \in B_r(z_0)$ . Somit impliziert (414)

$$|f(\tau^{(\tilde{l}_k)}, z_2^{(\tilde{l}_k)}) - f(\tau^{(\tilde{l}_k)}, z_1^{(\tilde{l}_k)})| \leq L|z_2^{(\tilde{l}_k)} - z_1^{(\tilde{l}_k)}|. \quad (416)$$

Damit und mit (410) folgern wir

$$\tilde{l}_k |z_2^{(\tilde{l}_k)} - z_1^{(\tilde{l}_k)}| < |f(\tau^{(\tilde{l}_k)}, z_2^{(\tilde{l}_k)}) - f(\tau^{(\tilde{l}_k)}, z_1^{(\tilde{l}_k)})| \leq L|z_2^{(\tilde{l}_k)} - z_1^{(\tilde{l}_k)}| \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (417)$$

Subtrahieren wir die rechte Seite von der linken Seite erhalten wir

$$(\tilde{l}_k - L)|z_2^{(\tilde{l}_k)} - z_1^{(\tilde{l}_k)}| < 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (418)$$

Dies gilt nur wenn  $\tilde{l}_k - L < 0$  d.h.  $\tilde{l}_k < L$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Da aber  $\tilde{l}_k$  eine Teilfolge ist muss  $\tilde{l}_k \rightarrow \infty$  gelten. Ein Widerspruch.

**Zur globalen Lipschitzbedingung.** Wir haben die globale Lipschitzbedingung in Definition 74 für Funktionen  $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^n)$ , definiert auf einem beliebigen Gebiet  $G \subset \mathbb{R}^n$  betrachtet. Für den Satz von Picard-Lindelöf musste aber  $f \in C^0(I \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ , d.h.  $G = \mathbb{R}^n$  gelten. Spannenderweise kann man  $G = \mathbb{R}^n$  immer durch Wahl einer *Fortsetzung* erreichen, (jedenfalls wenn  $G$  beschränkt ist).

**Satz 84. SATZ VON KIRSZBRAUN-VALENTINE.** Es sei  $G \subset \mathbb{R}^n$  offen und beschränkt sowie  $I \subset \mathbb{R}$  offen. Es sei  $m \in \mathbb{N}$  und  $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^m)$  erfülle

$$|f(\tau, z_2) - f(\tau, z_1)| \leq L|z_2 - z_1| \quad \forall \tau \in I, \forall z_1, z_2 \in G. \quad (419)$$

Dann gibt es  $F \in C^0(I \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$  mit  $F|_{I \times G} = f$  und

$$|F(\tau, z_2) - F(\tau, z_1)| \leq \sqrt{m}L|z_2 - z_1| \quad \forall \tau \in I, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{R}^n. \quad (420)$$

**Beweis.** Wir zeigen nur den Fall  $m = 1$ . Der Fall  $m > 1$  ist eine Folgerung und Gegenstand von Übung 3 auf Blatt 7. Es sei  $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^1)$  wie in der Aussage. Für  $(\tau, z) \in I \times \mathbb{R}^n$  setze

$$F(\tau, z) := \inf_{w \in G} \{f(\tau, w) + L|w - z|\} \quad (421)$$

Wir zeigen, dass  $F$  eine Funktion in  $C^0(I \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$  definiert, die das Gewünschte leistet.

**Schritt 1.**  $F$  ist reellwertig, d.h. das Infimum in (421) ist nie  $-\infty$ . Dies werden Sie in Übung 3 auf Blatt 7 zeigen.

**Schritt 2.**  $F|_{I \times G} = f$ . Sei etwa  $(\tau, z) \in I \times G$ .  $\mathbb{Z} : F(\tau, z) = f(\tau, z)$ . Nun gilt zunächst

$$F(\tau, z) = \inf_{w \in G} \{f(\tau, w) + L|w - z|\} \leq_{w=z \in G} f(\tau, z) + L|z - z| = f(\tau, z). \quad (422)$$

Für die umgekehrte Ungleichung rechnen für ein beliebiges  $w \in G$

$$f(\tau, w) + L|w - z| = f(\tau, w) - f(\tau, z) + L|w - z| + f(\tau, z) \quad (423)$$

$$\geq -|f(\tau, w) - f(\tau, z)| + L|w - z| + f(\tau, z) \quad (424)$$

$$\stackrel{(580)}{\geq} -L|w - z| + L|w - z| + f(\tau, z) = f(\tau, z). \quad (425)$$

Nehmen wir nun in dieser Ungleichung das Infimum über alle  $w \in G$  so folgt

$$F(\tau, z) = \inf_{w \in G} \{f(\tau, w) + L|w - z|\} = f(\tau, z). \quad (426)$$

Zusammen mit (422) folgt die Behauptung.

**Schritt 3.** Wir zeigen die Lipschitzabschätzung (581) (im Spezialfall  $m = 1$ ). Seien  $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^n$  und sei  $\varepsilon > 0$  beliebig vorgegeben. Nun gibt es ein  $w_\varepsilon \in G$  mit

$$f(t, w_\varepsilon) + L|w_\varepsilon - z_2| \leq \inf_{w \in G} \{f(\tau, w) + L|w - z|\} + \varepsilon = F(t, z_2) + \varepsilon. \quad (427)$$

Damit gilt

$$F(\tau, z_1) - F(\tau, z_2) \stackrel{(427)}{\leq} F(\tau, z_1) - (f(\tau, w_\varepsilon) + L|w_\varepsilon - z_2|) + \varepsilon \quad (428)$$

$$\stackrel{(421)}{\leq} [f(\tau, w_\varepsilon) + L|w_\varepsilon - z_1|] - f(t, w_\varepsilon) - L|w_\varepsilon - z_2| + \varepsilon \quad (429)$$

$$= (L|w_\varepsilon - z_1| - L|w_\varepsilon - z_2|) + \varepsilon \leq L(|w_\varepsilon - z_1| - |w_\varepsilon - z_2|) + \varepsilon \quad (430)$$

$$= L(|w_\varepsilon - z_2 + z_2 - z_1| - |w_\varepsilon - z_2|) + \varepsilon \quad (431)$$

$$\stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} L(|w_\varepsilon - z_2| + |z_2 - z_1| - |w_\varepsilon - z_2|) + \varepsilon = L|z_2 - z_1| + \varepsilon. \quad (432)$$

Lässt man auf der linken und rechten Seite  $\varepsilon \rightarrow 0+$  gehen, so folgt

$$F(\tau, z_1) - F(\tau, z_2) \leq L|z_2 - z_1|. \quad (433)$$

Vertauscht man die Rollen von  $z_1, z_2$  so zeigt man analog

$$F(\tau, z_2) - F(\tau, z_1) \leq L|z_2 - z_1| \quad (434)$$

und folgert dann zusammen mit (432)

$$|F(\tau, z_2) - F(\tau, z_1)| \leq L|z_2 - z_1|. \quad (435)$$

**Schritt 4.** Wir zeigen  $F \in C^0(I \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ . **Schritt 4a.** Wir zeigen zuerst Stetigkeit nur in der ersten Variablen. Sei dazu  $(\tau_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset I$  eine Folge mit  $\tau_j \rightarrow \tau$  und sei  $z \in \mathbb{R}^n$  fix. Für fest vorgegebenes  $\varepsilon > 0$  gibt es (nach (421)) ein  $w \in G$  mit

$$f(\tau, w) + L|w - z| \leq F(\tau, z) + \varepsilon. \quad (436)$$

Dann gilt

$$F(\tau_j, z) - F(\tau, z) \stackrel{(436)}{\leq} F(\tau_j, z) - (f(\tau, w) + L|w - z|) + \varepsilon \quad (437)$$

$$\stackrel{(421)}{\leq} [f(\tau_j, w) + L|w - z|] - (f(\tau, w) + L|w - z|) + \varepsilon \quad (438)$$

$$= f(\tau_j, w) - f(\tau, w) + \varepsilon. \quad (439)$$

Aus der Stetigkeit von  $f$  folgt  $f(\tau_j, w) \rightarrow f(\tau, w)$  mit  $j \rightarrow \infty$ . Daher

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} (F(\tau_j, z) - F(\tau, z)) \leq \varepsilon. \quad \Rightarrow_{\varepsilon \rightarrow 0+} \quad \limsup_{j \rightarrow \infty} (F(\tau_j, z) - F(\tau, z)) \leq 0. \quad (440)$$

Wir zeigen nun auch  $\limsup_{j \rightarrow \infty} (F(\tau, z) - F(\tau_j, z)) \leq 0$ . Man kann zunächst eine Teilfolge  $(\tilde{\tau}_j)_{j \in \mathbb{N}}$  von  $(\tau_j)_{j \in \mathbb{N}}$  wählen, so, dass

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} (F(\tau, z) - F(\tau_j, z)) = \lim_{j \rightarrow \infty} (F(\tau, z) - F(\tilde{\tau}_j, z)). \quad (441)$$

Wähle nun zuerst für festes  $\varepsilon > 0$  und für alle  $j \in \mathbb{N}$  ein  $w_j \in G$  mit

$$f(\tilde{\tau}_j, w_j) + L|w_j - z| \leq F(\tilde{\tau}_j, z) + \varepsilon. \quad (442)$$

Nun ist die Folge  $(w_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset G$  beschränkt (weil  $G$  beschränkt ist) und daher besitzt sie (nach Bolzano-Weierstraß) eine konvergente Teilfolge. Etwa gelte  $w_{j_k} \rightarrow w_0$  für ein  $w_0 \in \mathbb{R}^n$  (welches nicht zwingend in  $G$  liegen muss). Wir berechnen

$$F(\tau, z) - F(\tilde{\tau}_{j_k}, z) \stackrel{(442)}{\leq} F(\tau, z) - (f(\tilde{\tau}_{j_k}, w_{j_k}) + L|w_{j_k} - z|) + \varepsilon \quad (443)$$

$$\stackrel{(421)}{\leq} [f(\tau, w_{j_k}) + L|w_{j_k} - z|] - (f(\tilde{\tau}_{j_k}, w_{j_k}) + L|w_{j_k} - z|) + \varepsilon \quad (444)$$

$$= f(\tau, w_{j_k}) - f(\tilde{\tau}_{j_k}, w_{j_k}) + \varepsilon. \quad (445)$$

Würde  $w_{j_k}$  gegen ein Element von  $G$  konvergieren, könnten wir zum Grenzwert übergehen und wären fertig. Wie aber oben schon gesagt liegt  $w_0$  nicht zwingend in  $G$ . Fixiere nun ein  $l \in \mathbb{N}$  beliebig und schreibe

$$F(\tau, z) - F(\tilde{\tau}_{j_k}, z) \leq f(\tau, w_{j_k}) - f(\tilde{\tau}_{j_k}, w_{j_k}) + \varepsilon \quad (446)$$

$$\leq [f(\tau, w_{j_k}) - f(\tau, w_{j_l})] + [f(\tau, w_{j_l}) - f(\tilde{\tau}_{j_k}, w_{j_l})] + [f(\tilde{\tau}_{j_k}, w_{j_l}) - f(\tilde{\tau}_{j_k}, w_{j_k})] + \varepsilon. \quad (447)$$

Wegen (580) gilt  $f(\tau, w_{j_k}) - f(\tau, w_{j_l}) \leq L|w_{j_k} - w_{j_l}|$  und  $f(\tilde{\tau}_{j_k}, w_{j_l}) - f(\tilde{\tau}_{j_k}, w_{j_k}) \leq L|w_{j_k} - w_{j_l}|$ . Wir erhalten

$$F(\tau, z) - F(\tilde{\tau}_{j_k}, z) \leq 2L|w_{j_k} - w_{j_l}| + [f(\tau, w_{j_l}) - f(\tilde{\tau}_{j_k}, w_{j_l})] + \varepsilon. \quad (448)$$

Wir lassen nun  $k \rightarrow \infty$  gehen. Da  $l \in \mathbb{N}$  fixiert ist gilt  $f(\tau, w_{j_l}) - f(\tilde{\tau}_{j_k}, w_{j_l}) \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$  (denn  $f$  ist stetig und  $(\tilde{\tau}_{j_k})_{k \in \mathbb{N}}$  strebt als Teilfolge von  $(\tau_j)_{j \in \mathbb{N}}$  gegen  $\tau$ ). Wir folgern

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} (F(\tau, z) - F(\tau_j, z)) \stackrel{(442)}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} (F(\tau, z) - F(\tilde{\tau}_{j_k}, z)) \stackrel{(448)}{\leq} 2L|w_0 - w_{j_l}| + \varepsilon. \quad (449)$$

Jetzt lassen wir  $l \rightarrow \infty$  gehen und schließen (da  $w_{j_l} \rightarrow w_0$ )

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} (F(\tau, z) - F(\tau_j, z)) \leq \varepsilon. \quad \xRightarrow{\varepsilon \rightarrow 0+} \limsup_{j \rightarrow \infty} (F(\tau, z) - F(\tau_j, z)) \leq 0. \quad (450)$$

Nun haben wir

$$0 \geq \limsup_{j \rightarrow \infty} (F(\tau, z) - F(\tau_j, z)) \geq \liminf_{j \rightarrow \infty} (F(\tau, z) - F(\tau_j, z)) \quad (451)$$

$$\geq \liminf_{j \rightarrow \infty} -(F(\tau_j, z) - F(\tau, z)) \geq -\limsup_{j \rightarrow \infty} (F(\tau_j, z) - F(\tau, z)) \stackrel{(440)}{\geq} 0. \quad (452)$$

Es folgt  $\limsup_{j \rightarrow \infty} (F(\tau, z) - F(\tau_j, z)) = \liminf_{j \rightarrow \infty} (F(\tau, z) - F(\tau_j, z)) = 0$  und daher gilt  $\lim_{j \rightarrow \infty} (F(\tau, z) - F(\tau_j, z)) = 0$ . Somit folgt die Stetigkeit in der ersten Variablen.

**Schritt 4b.** Nun zur Stetigkeit in beiden Variablen. Sei  $((\tau_j, z_j))_{j \in \mathbb{N}} \subset I \times G$  mit  $(\tau_j, z_j) \rightarrow (\tau, z)$  in  $I \times G$  (d.h.  $\tau_j \rightarrow \tau, z_j \rightarrow z$ ). Dann gilt

$$F(\tau_j, z_j) - F(\tau, z) = [F(\tau_j, z_j) - F(\tau_j, z)] + [F(\tau_j, z) - F(\tau, z)]. \quad (453)$$

Wir wissen bereits nach Schritt 4a, dass  $F(\tau_j, z) - F(\tau, z) \rightarrow 0$  mit  $j \rightarrow \infty$ . Nach Schritt 3 gilt auch

$$|F(\tau_j, z_j) - F(\tau_j, z)| \leq L|z_j - z| \rightarrow 0 \quad (j \rightarrow \infty). \quad (454)$$

Nun gilt also

$$F(\tau_j, z_j) - F(\tau, z) = \underbrace{[F(\tau_j, z_j) - F(\tau_j, z)]}_{\rightarrow 0} + \underbrace{[F(\tau_j, z) - F(\tau, z)]}_{\rightarrow 0} \rightarrow 0 \quad (j \rightarrow \infty). \quad (455)$$

Dies zeigt nun auch die Stetigkeit in beiden Variablen.

### 2.1.3 Anfangswertprobleme als Fixpunktgleichung

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns damit, wie wir Anfangswertprobleme als Fixpunktgleichungen auffassen können. Fixpunktgleichungen haben wir schon in der Analysis mit dem *Banach'schen Fixpunktsatz* studieren können, den wir hier auch wiederholen werden.

**Proposition 85.** Es sei  $I \subset \mathbb{R}$  offenes Intervall und  $f \in C^0(I \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$  sowie  $t_0 \in I$  und  $y_0 \in \mathbb{R}^n$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent

(1)  $y \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$  ist Lösung von

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & (t \in I) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}. \quad (456)$$

(2)  $y \in C^0(I; \mathbb{R}^n)$  erfüllt

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) \, ds \quad \forall t \in I. \quad (457)$$

**Beweis.** Zu '(1)  $\Rightarrow$  (2)'. Es sei  $y \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$  wie in (1). Dann gilt für  $t \in I$

$$y(t) = y(t) - y(t_0) + y(t_0) = \int_{t_0}^t y'(s) \, ds + y(t_0) \stackrel{(456)}{=} \int_{t_0}^t f(s, y(s)) \, ds + y_0. \quad (458)$$

Zu '(2)  $\Rightarrow$  (1)'. Es gelte (457) für ein  $y \in C^0(I; \mathbb{R}^n)$ . Dann gilt

$$y(t_0) = y_0 + \int_{t_0}^{t_0} f(s, y(s)) \, ds = y_0. \quad (459)$$

Wir zeigen jetzt, dass  $y \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$ . Beachte:  $s \mapsto f(s, y(s))$  ist stetig auf  $I$ , da  $f$  und  $y$  stetig sind. Mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist dann die Abbildung

$$h : I \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad h : t \mapsto \int_{t_0}^t f(s, y(s)) \, ds \quad (460)$$

stetig differenzierbar auf  $I$  und ihre Ableitung ist gegeben durch  $h'(t) = f(t, y(t))$ , ( $t \in I$ ). Nun gilt mit (457)  $y(t) = y_0 + h(t)$ . Es folgt, dass  $y \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$  und

$$y'(t) = h'(t) = f(t, y(t)) \quad \forall t \in I. \quad (461)$$

Somit ist gezeigt, dass  $y \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$  (456) erfüllt.

**Definition 86.** PICARD'SCHE ITERIERTE. Es sei  $f \in C^0(I \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$  und  $t_0 \in I$ ,  $y_0 \in \mathbb{R}^n$ . Wir definieren für  $u \in C^0(I; \mathbb{R}^n)$  die *Picard'sche Iterierte*  $T[u] \in C^0(I; \mathbb{R}^n)$  durch

$$(T[u])(t) := y_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) \, ds \quad \forall t \in I. \quad (462)$$

Dies definiert dann eine Abbildung  $T : C^0(I; \mathbb{R}^n) \rightarrow C^0(I; \mathbb{R}^n)$ ,  $T : u \mapsto T[u]$ .

**Methode 87.** Es sei  $T : C^0(I; \mathbb{R}^n) \rightarrow C^0(I; \mathbb{R}^n)$  wie in Definition 86. Aus Proposition 85 folgt, dass

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & (t \in I) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \Leftrightarrow T[y] = y \quad \text{in } C^0(I; \mathbb{R}^n). \quad (463)$$

Wir haben also ein Anfangswertproblem auf ein *Fixpunktproblem* reduziert.

Wir wiederholen nun einen Satz aus der Analysis-Vorlesung, mit dem wir bereits Existenz und sogar Eindeutigkeit von Fixpunkten gezeigt haben.

**Wiederholung 88. BANACH'SCHER FIXPUNKTSATZ.** Es sei  $(X, d)$  ein vollständiger metrischer Raum und  $T : X \rightarrow X$  eine *strikte Kontraktionsabbildung*, d.h.  $\exists q \in [0, 1)$  mit  $d(T[u], T[v]) \leq qd(u, v)$  für alle  $u, v \in X$ . Dann gibt es ein eindeutiges  $u_0 \in X$  mit  $T[u_0] = u_0$ .

**Algorithmus zum Finden des Fixpunktes.** Wähle  $u \in X$  beliebig und definiere für alle  $k \in \mathbb{N}$  die *Iteration*  $v_k := T^k[u] := \underbrace{(T \circ \dots \circ T)}_{k\text{-mal}}[u]$ . Dann gilt  $\lim_{k \rightarrow \infty} v_k = u_0$ .

Wir benötigen hier sogar eine leichte Verschärfung.

**Korollar 89. BANACH'SCHER FIXPUNKTSATZ – VERSCHÄRFUNG.** Es sei  $(X, d)$  ein vollständiger metrischer Raum und  $T : X \rightarrow X$  eine Abbildung so, dass für ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  die Abbildung  $T^{n_0}$  eine strikte Kontraktionsabbildung ist (d.h.  $\exists q \in [0, 1)$  so, dass  $d(T^{n_0}[u], T^{n_0}[v]) \leq qd(u, v)$  für alle  $u, v \in X$ ). Dann gibt es ein eindeutiges  $u_0 \in X$  mit  $T[u_0] = u_0$ .

**Beweis.**

**Existenz eines Fixpunktes.** Nach dem Banach'schen Fixpunktsatz gibt es ein eindeutiges  $\tilde{u}_0 \in X$  mit  $T^{n_0}[\tilde{u}_0] = \tilde{u}_0$ . Es sei  $u_1 := T[\tilde{u}_0]$ . Wir zeigen  $u_1 = \tilde{u}_0$ . Dazu berechnen wir

$$T^{n_0}[u_1] = T^{n_0}[T[\tilde{u}_0]] = T^{n_0+1}[\tilde{u}_0] = T(T^{n_0}[\tilde{u}_0]) = T[\tilde{u}_0] = u_1 \quad (464)$$

Somit ist auch  $u_1$  ein Fixpunkt von  $T^{n_0}$ . Aus der Eindeutigkeit des Fixpunktes von  $T^{n_0}$  folgt  $u_1 = \tilde{u}_0$ , d.h.  $T[\tilde{u}_0] = \tilde{u}_0$ .

**Eindeutigkeit des Fixpunktes.** Wir haben nun bereits einen Fixpunkt  $\tilde{u}_0 \in X$ . Gäbe es einen weiteren Fixpunkt  $u_0 \in X$  von  $T$  (d.h.  $T[u_0] = u_0$ ) so wäre

$$T^{n_0}[u_0] = T^{n_0-1}[T u_0] = T^{n_0-1}[u_0] = \dots = T^1[u_0] = u_0. \quad (465)$$

Also ist  $u_0$  auch Fixpunkt von  $T^{n_0}$ . Da es aber nur einen Fixpunkt von  $T^{n_0}$  geben kann, folgt  $u_0 = \tilde{u}_0$ .

Um diesen Satz anwenden zu können brauchen wir vor allem einen vollständigen metrischen Raum  $X$  und eine strikte Kontraktionsabbildung darauf. Mit Methode 87 ist hier nicht alles getan: Man würde vielleicht am liebsten  $X = C^0(I; \mathbb{R}^n)$  und  $T : X \rightarrow X$  wie in Definition 86 wählen. Dabei gäbe es aber Probleme mit der Vollständigkeit von  $X$  (bzgl. welcher Metrik überhaupt!?) und Kontraktivität. Daher wählen wir ein leicht anderes Setup.

**Definition 90.** DER RAUM  $C_b^0(I; \mathbb{R}^n)$ . Es sei  $I \subset \mathbb{R}^n$  ein (hier ausnahmsweise nicht zwingend offenes) Intervall. Definiere

$$C_b^0(I; \mathbb{R}^n) := \{u \in C^0(I; \mathbb{R}^n) : u \text{ beschränkt auf } I\}. \quad (466)$$

Für  $u, v \in C_b^0(I; \mathbb{R}^n)$  definieren wir auch den *Supremumsabstand*

$$d_\infty(u, v) := d_\infty^{(I)}(u, v) := \sup_{t \in I} |u(t) - v(t)|. \quad (467)$$

Man beachte: Da  $\sup_{t \in I} |u(t)| < \infty$  für alle  $u \in C_b^0(I; \mathbb{R}^n)$  gilt  $d_\infty(u, v) \in \mathbb{R}$  für alle  $u, v \in C_b^0(I; \mathbb{R}^n)$ . Insbesondere ist der Ausdruck in (467) wohldefiniert.

**Anmerkung 91.** Die Konvergenz in  $(C_b^0(I; \mathbb{R}^n); d_\infty)$  bezüglich  $d_\infty$  ist gerade die gleichmäßige Konvergenz auf  $I$ . Dazu:

$$u_j \longrightarrow u \quad \text{in } (C_b^0(I; \mathbb{R}^n), d_\infty) \quad (j \rightarrow \infty). \quad (468)$$

$$\Leftrightarrow d_\infty(u_j, u) \rightarrow 0 \quad (j \rightarrow \infty). \quad (469)$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \quad d_\infty(u_j, u) \leq \varepsilon \quad \forall j \geq n_0(\varepsilon). \quad (470)$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \quad \sup_{x \in I} |u_j(x) - u(x)| \leq \varepsilon \quad \forall j \geq n_0(\varepsilon). \quad (471)$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \quad |u_j(x) - u(x)| \leq \varepsilon \quad \forall j \geq n_0(\varepsilon) \quad \forall x \in I. \quad (472)$$

$$\Leftrightarrow u_j \longrightarrow u \quad \text{gleichmäßig auf } I \quad (j \rightarrow \infty). \quad (473)$$

**Proposition 92.** Das Paar  $(C_b^0(I; \mathbb{R}^n), d_\infty)$  definiert einen vollständigen metrischen Raum.

**Beweis. Schritt 1.**  $(C_b^0(I; \mathbb{R}^n), d_\infty)$  ist ein metrischer Raum. Symmetrie und Definitheit überlasse ich Ihnen. Zur Dreiecksungleichung. Seien  $u, v, w \in C_b^0(I; \mathbb{R}^n)$ . Dann gilt für  $t \in I$

$$|u(t) - v(t)| = |u(t) - w(t) + w(t) - v(t)| \leq \underbrace{|u(t) - w(t)|}_{\leq \sup_{x \in I} |u(x) - w(x)|} + \underbrace{|w(t) - v(t)|}_{\leq \sup_{x \in I} |w(x) - v(x)|} \quad (474)$$

$$\leq \sup_{x \in I} |u(x) - w(x)| + \sup_{x \in I} |w(x) - v(x)| = d_\infty(u, w) + d_\infty(w, v). \quad (475)$$

Nehmen wir auf der linken Seite das Supremum über alle  $t \in I$  so erhalten wir

$$d_\infty(u, v) \leq d_\infty(u, w) + d_\infty(w, v). \quad (476)$$



**Schritt 2.** Zur Vollständigkeit. Es sei  $(u_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset C_b^0(I; \mathbb{R}^n)$  eine Cauchy-Folge bezüglich  $d_\infty$ .  $\underline{Z}$ :  $\exists u \in C_b^0(I; \mathbb{R}^n) : d_\infty(u_j, u) \rightarrow 0$ . Wegen der Cauchy-Eigenschaft folgt

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \quad d_\infty(u_j, u_m) < \varepsilon \quad \forall j, m \geq n_0(\varepsilon). \quad (477)$$

Sei nun  $x \in I$  beliebig. Dann gilt für  $j, m \in \mathbb{N}$ , dass  $|u_j(x) - u_m(x)| \leq d_\infty(u_j, u_m)$ . Mit (477) folgt

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \quad |u_j(x) - u_m(x)| < \varepsilon \quad \forall j, m \geq n_0(\varepsilon). \quad (478)$$

Das bedeutet, dass für jedes  $x \in I$  die Folge  $(u_j(x))_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  eine Cauchy-Folge in  $(\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$  ist. Da  $(\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$  vollständig ist, existiert  $\lim_{j \rightarrow \infty} u_j(x)$  für alle  $x \in I$ . Definiere  $u : I \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $u(x) := \lim_{j \rightarrow \infty} u_j(x)$ . Noch  $\underline{Z}$ :  $u \in C_b^0(I; \mathbb{R}^n)$  und  $d_\infty(u_j, u) \rightarrow 0$ . Berechne nun

$$\sup_{x \in I} |u_j(x) - u(x)| = \sup_{x \in I} \lim_{m \rightarrow \infty} \underbrace{|u_j(x) - u_m(x)|}_{\leq \sup_{t \in I} |u_j(t) - u_m(t)|} \quad (479)$$

$$\leq \sup_{x \in I} \limsup_{m \rightarrow \infty} d_\infty(u_j, u_m) = \limsup_{m \rightarrow \infty} d_\infty(u_j, u_m) = \limsup_{m \rightarrow \infty, m > j} d_\infty(u_j, u_m). \quad (480)$$

Beachte: Wählt man für  $\varepsilon > 0$  nun  $n_0(\varepsilon)$  wie in (477), so folgt für alle  $j \geq n_0(\varepsilon)$

$$\sup_{x \in I} |u_j(x) - u(x)| \leq \limsup_{m \rightarrow \infty, m > j} d_\infty(u_j, u_m) \leq \varepsilon. \quad (481)$$

Man folgert, dass  $u_j \rightarrow u$  gleichmäßig konvergent ist für  $j \rightarrow \infty$ . Aus der Analysis 2 folgt dann  $u \in C^0(I; \mathbb{R}^n)$ , da gleichmäßige Konvergenz die Stetigkeit vererbt. Zur Beschränktheit von  $u$  berechnen wir

$$\sup_{x \in I} |u(x)| \stackrel{\Delta\text{-Üngl.}}{\leq} \underbrace{\sup_{x \in I} |u(x) - u_{n_0(1)}(x)|}_{\leq 1, \text{ siehe (481)}} + \underbrace{|u_{n_0(1)}(x)|}_{\leq \sup_{t \in I} |u_{n_0(1)}(t)|} \leq 1 + \sup_{t \in I} |u_{n_0(1)}(t)| < \infty, \quad (482)$$

da  $u_{n_0(1)} \in C_b^0(I; \mathbb{R}^n)$ . Wir folgern  $u \in C_b^0(I; \mathbb{R}^n)$ . Nun folgt aus (481), dass

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \quad d_\infty(u_j, u) = \sup_{x \in I} |u_j(x) - u(x)| \leq \varepsilon \quad \forall j \geq n_0(\varepsilon). \quad (483)$$

Mit anderen Worten  $d_\infty(u_j, u) \rightarrow 0$  mit  $j \rightarrow \infty$ .

Zusammengefasst: Wir haben in 87 ein Fixpunktproblem aufgestellt. Statt in  $C^0(I; \mathbb{R}^n)$  müssen wir dieses Fixpunktproblem aber aus Vollständigkeitsgründen in  $(C_b^0(I; \mathbb{R}^n), d_\infty)$  betrachten. Wichtig für den Fixpunktsatz ist, dass  $T$  dann noch eine *Selbstabbildung* ist, d.h.  $C_b^0(I; \mathbb{R}^n)$  nach  $C_b^0(I; \mathbb{R}^n)$  abbildet.

**Proposition 93. ZUR SELBSTABBILDUNGSEIGENSCHAFT.** Es sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall,  $f \in C^0(I \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$  und  $J \subset I$  beschränkt so, dass  $\bar{J} \subset I$ . Für  $u \in C^0(J; \mathbb{R}^n)$

definiere  $T[u] \in C^0(J; \mathbb{R}^n)$  durch

$$(T[u])(t) := y_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) \, ds \quad \text{für alle } t \in J. \quad (484)$$

Ist  $u \in C_b^0(J; \mathbb{R}^n)$  so gilt auch  $T[u] \in C_b^0(J; \mathbb{R}^n)$ . Insbesondere ist  $T : C_b^0(J; \mathbb{R}^n) \rightarrow C_b^0(J; \mathbb{R}^n)$  eine Selbstabbildung.

**Beweis.** Sei etwa  $J \subset I$  wie in der Aussage und  $u \in C_b^0(J; \mathbb{R}^n)$ . Von der Stetigkeit von  $T[u]$  überzeugt man sich leicht. Nun zur Beschränktheit. Da  $u \in C_b^0(J; \mathbb{R}^n)$  gibt es ein  $R > 0$  so, dass  $u(t) \in \overline{B_R(0)}$  für alle  $t \in J$ . Nun gilt (wegen der Kompaktheit von  $\overline{J} \times \overline{B_R(0)}$ )

$$L := \sup_{(\tau, z) \in \overline{J} \times \overline{B_R(0)}} |f(\tau, z)| < \infty. \quad (485)$$

Es folgt für beliebiges  $t \in J$

$$|(T[u])(t)| = \left| y_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) \, ds \right| \leq |y_0| + \left| \int_{t_0}^t f(s, u(s)) \, ds \right| \quad (486)$$

$$= |y_0| + \left| \int_{\min(t_0, t)}^{\max(t_0, t)} f(s, u(s)) \, ds \right| \leq |y_0| + \int_{\min(t_0, t)}^{\max(t_0, t)} |f(s, u(s))| \, ds, \quad (487)$$

wobei wir im letzten Schritt die vektorwertige Dreiecksungleichung (Aufgabe 1 auf Blatt 8) verwendet haben. Mit (485) gilt  $|f(s, u(s))| \leq L$  für alle  $s \in J$  und daher

$$|(T[u])(t)| \leq |y_0| + L(\max(t_0, t) - \min(t_0, t)) = |y_0| + L|t - t_0| = |y_0| + L(b - a). \quad (488)$$

Weil  $t \in J$  beliebig war folgt  $T[u] \in C_b^0(I; \mathbb{R}^n)$ .

Eine Unannehmlichkeit ist hier hinzugekommen: Scheinbar muss hier das Intervall  $I$  verkleinert werden zu einem beschränkten Intervall  $J$  mit  $\overline{J} \subset I$ . Diese Unannehmlichkeit werden wir im Folgenden durch *Ausschöpfung* beseitigen.

**Proposition 94. AUSSCHÖPFUNG.** Es sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall,  $t_0 \in I$ . Dann gibt es eine Folge  $(J_k)_{k \in \mathbb{N}}$  von offenen beschränkten Teilintervallen von  $I$  mit  $t_0 \in J_k$ ,  $\overline{J}_k \subset I$ ,  $J_k \subset J_{k+1}$  für alle  $k$  und

$$I = \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k. \quad (489)$$

**Beweis.** Übungsblatt 8.

### 2.1.4 Beweis des (globalen) Satzes von Picard-Lindelöf

Nun können wir endlich den globalen Satz von Picard-Lindelöf beweisen.

**Lemma 95.** KONTRAKTIONSEIGENSCHAFT - I. Es erfülle  $f \in C^0(I \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$  eine globale Lipschitzbedingung auf  $I$  mit Lipschitzkonstante  $L > 0$ . Es sei  $T : C^0(I; \mathbb{R}^n) \rightarrow C^0(I; \mathbb{R}^n)$  wie in Definition 86. Dann gilt für alle  $j \in \mathbb{N}_0$  und  $u, v \in C_b^0(I; \mathbb{R}^n)$

$$|(T^j[u])(t) - (T^j[v])(t)| \leq \frac{L^j |t - t_0|^j}{j!} d_\infty^{(I)}(u, v) \quad \forall t \in I. \quad (490)$$

(Wir treffen für diese Aussage die Konvention  $T^0[u] := u$  für alle  $u \in C_b^0(I; \mathbb{R}^n)$ .)

**Beweis.** Induktion nach  $j \in \mathbb{N}_0$ . Der Induktionsanfang  $j = 0$  ist klar, da in diesem Fall  $\frac{L^0 |t - t_0|^0}{0!} = 1$  und

$$|(T^j[u])(t) - (T^j[v])(t)| = |u(t) - v(t)| \leq d_\infty(u, v) = 1 \cdot d_\infty(u, v) = \frac{L^j |t - t_0|^j}{j!} d_\infty(u, v). \quad (491)$$

Nun zum Induktionsschritt  $j \rightarrow j + 1$ . Es gelte (490) für ein  $j \in \mathbb{N}$ . Definiere  $u_j := T^j[u]$  und  $v_j := T^j[v]$ . Wir berechnen

$$|(T^{j+1}[u])(t) - (T^{j+1}[v])(t)| = |(T[T^j[u]])(t) - (T[T^j[v]])(t)| = |(T[u_j])(t) - (T[v_j])(t)| \quad (492)$$

$$\stackrel{\text{Definition 86}}{=} \left| y_0 + \int_{t_0}^t f(s, u_j(s)) \, ds - \left( y_0 + \int_{t_0}^t f(s, v_j(s)) \, ds \right) \right| \quad (493)$$

$$= \left| \int_{t_0}^t [f(s, u_j(s)) - f(s, v_j(s))] \, ds \right| = \left| \int_{\min(t_0, t)}^{\max(t_0, t)} [f(s, u_j(s)) - f(s, v_j(s))] \, ds \right| \quad (494)$$

$$\leq \int_{\min(t_0, t)}^{\max(t_0, t)} |f(s, u_j(s)) - f(s, v_j(s))| \, ds \leq \int_{\min(t_0, t)}^{\max(t_0, t)} L |u_j(s) - v_j(s)| \, ds. \quad (495)$$

Mit der Induktionshypothese gilt für alle  $s \in [\min(t_0, t), \max(t_0, t)]$

$$|u_j(s) - v_j(s)| = |(T^j[u])(s) - (T^j[v])(s)| \stackrel{\text{Ind.hyp}}{\leq} \frac{L^j |s - t_0|^j}{j!} d_\infty(u, v). \quad (496)$$

Wir folgern mit (495)

$$|(T^{j+1}[u])(t) - (T^{j+1}[v])(t)| \leq \int_{\min(t_0, t)}^{\max(t_0, t)} L \frac{L^j |s - t_0|^j}{j!} \, ds = \frac{L^{j+1}}{j!} \int_{\min(t_0, t)}^{\max(t_0, t)} |s - t_0|^j \, ds \quad (497)$$

Wir berechnen nun das Integral auf der rechten Seite. Falls  $t \geq t_0$  so gilt

$$\frac{L^{j+1}}{j!} \int_{\min(t_0, t)}^{\max(t_0, t)} |s - t_0|^j ds = \frac{L^{j+1}}{j!} \int_{t_0}^t (s - t_0)^j ds = \frac{L^{j+1}}{j!} \frac{(t - t_0)^{j+1}}{j+1} = \frac{L^{j+1} |t - t_0|^{j+1}}{(j+1)!} \quad (498)$$

und falls  $t < t_0$  so gilt

$$\frac{L^{j+1}}{j!} \int_{\min(t_0, t)}^{\max(t_0, t)} |s - t_0|^j ds = \frac{L^{j+1}}{j!} \int_t^{t_0} (t_0 - s)^j ds = \frac{L^{j+1}}{j!} \frac{(t_0 - t)^{j+1}}{j+1} = \frac{L^{j+1} |t - t_0|^{j+1}}{(j+1)!}. \quad (499)$$

In beiden Fällen hat man also

$$|(T^{j+1}[u])(t) - (T^{j+1}[v])(t)| \leq \frac{L^{j+1} |t - t_0|^{j+1}}{(j+1)!}. \quad (500)$$

**Korollar 96. KONTRAKTIONSEIGENSCHAFT - II.** Es erfülle  $f \in C^0(I \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$  eine globale Lipschitzbedingung auf  $I$  mit Lipschitzkonstante  $L > 0$ . Es sei  $J = (a, b) \subset I$  beschränkt mit  $\bar{J} \subset I$ . Es sei  $T : C_b^0(J; \mathbb{R}^n) \rightarrow C_b^0(J; \mathbb{R}^n)$  wie in Proposition 93. Dann gilt für alle  $u, v \in C_b^0(J; \mathbb{R}^n)$  und  $m \in \mathbb{N}$ , dass  $T^m[u], T^m[v] \in C_b^0(J; \mathbb{R}^n)$  und

$$d_\infty^{(J)}(T^m[u], T^m[v]) \leq \frac{L^m (b-a)^m}{m!} d_\infty^{(J)}(u, v). \quad (501)$$

Insbesondere gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit

$$d_\infty^{(J)}(T^{n_0}[u], T^{n_0}[v]) \leq \frac{1}{2} d_\infty^{(J)}(u, v) \quad \forall u, v \in C_b^0(J; \mathbb{R}^n). \quad (502)$$

**Beweis.** Dass  $T^m[u], T^m[v] \in C_b^0(J; \mathbb{R}^n)$  folgt direkt induktiv aus Proposition 93. Nun gilt mit Lemma 95 (angewandt mit  $I = J$ ), dass für alle  $t \in J = (a, b)$

$$|(T^m[u])(t) - (T^m[v])(t)| \leq \frac{L^m |t - t_0|^m}{m!} d_\infty^{(J)}(u, v) \leq \frac{L^m (b-a)^m}{m!} d_\infty^{(J)}(u, v). \quad (503)$$

Nimmt man nun das Supremum über alle  $t \in J$  so gilt

$$d_\infty^{(J)}(T^m[u], T^m[v]) \leq \frac{L^m (b-a)^m}{m!} d_\infty^{(J)}(u, v). \quad (504)$$

Damit ist (501) gezeigt. Für (502) genügt es dann zu zeigen, dass es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  gibt mit  $\frac{L^{n_0} (b-a)^{n_0}}{(n_0)!} < \frac{1}{2}$ . Beobachte dazu, dass

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{L^m (b-a)^m}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{[L(b-a)]^m}{m!} = e^{L(b-a)}, \quad (505)$$

d.h. die Reihe  $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{L^m(b-a)^m}{j!}$  ist konvergent. Nach einem Satz aus der Analysis muss dass  $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{L^m(b-a)^m}{m!} = 0$  gelten. Daraus folgt die Existenz von  $n_0 \in \mathbb{N}$  wie oben behauptet.

Jetzt können wir den globalen Satz von Picard-Lindelöf zeigen. Wir wiederholen zunächst die Aussage.

**Wiederholung Satz 75. SATZ VON PICARD-LINDELÖF I – GLOBALE VERSION.** Es sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall und  $f \in C^0(I \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$  erfülle eine globale Lipschitzbedingung. Dann hat für alle  $t_0 \in I$  und  $y_0 \in \mathbb{R}^n$  das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & (t \in I) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (506)$$

eine eindeutige Lösung  $y \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$ .

**Beweis (von Satz 75).** Nach Proposition 94 gibt es beschränkte Intervalle  $J_1 \subset J_2 \subset \dots \subset I$  mit  $t_0 \in J_k$ ,  $\overline{J_k} \subset I$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  und  $I = \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k$ . Definiere  $T_k : C_b^0(J_k; \mathbb{R}^n) \rightarrow C_b^0(J_k; \mathbb{R}^n)$ ,  $u \mapsto T_k[u]$  durch

$$(T_k[u])(t) := y_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) \, ds \quad (t \in J_k). \quad (507)$$

Nach Proposition 93 ist  $T_k$  wohldefiniert für alle  $k \in \mathbb{N}$  (d.h. wirklich eine Selbstabbildung). Nach Korollar 96 gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  so, dass  $(T_k)^{n_0}$  eine strikte Kontraktionsabbildung im Sinne von Korollar 89 ist. Nach Korollar 89 hat  $T_k$  damit für alle  $k \in \mathbb{N}$  einen eindeutigen Fixpunkt. Etwa sei  $u_k \in C_b^0(J_k; \mathbb{R}^n)$  das eindeutige Element mit  $T_k[u_k] = u_k$ . **Nun zur Existenz einer Lösung.** Wir werden diese  $u_k$ 's nun zu einer Lösung des AWP *zusammenkleben*. Dazu zeigen wir die folgende

**Zwischenbehauptung.** Für  $m \geq k$  gilt  $u_m|_{J_k} = u_k$ . Wir werden sehen, dass  $u_m|_{J_k}$  ein weiterer Fixpunkt von  $T_k$  ist. Dazu sei  $t \in J_k$  beliebig. Dann gilt (weil  $J_k$  ein Intervall ist) auch  $[t_0, t] \subset J_m$  und somit

$$T_k[u_m|_{J_k}](t) \stackrel{(507)}{=} y_0 + \int_{t_0}^t f(s, u_m|_{J_k}(s)) \, ds \quad (508)$$

$$= y_0 + \int_{t_0}^t f(s, u_m(s)) \, ds \stackrel{(507)}{=} T_m[u_m](t) = u_m(t) = (u_m|_{J_k})(t). \quad (509)$$

Also ist  $u_m|_{J_k}$  ein Fixpunkt von  $T_k$  und daher aufgrund der Eindeutigkeit  $u_m|_{J_k} = u_k$ .

**Ende der Zwischenbehauptung.**

Nun definiere  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  durch

$$y(t) := u_{k_t}(t) \quad \text{wobei } k_t := \min\{m \in \mathbb{N} : t \in J_m\}. \quad (510)$$

Beachte, dass dann  $y|_{J_l} = u_l$  für alle  $l \in \mathbb{N}$  — denn schließlich gilt für ein beliebiges  $t \in J_l$ , dass  $k_t \leq l$  (d.h. auch  $J_{k_t} \subset J_l$ ). Deswegen hat man  $y(t) = u_{k_t}(t) \stackrel{\text{Zw.beh.}}{=} (u_l|_{J_{k_t}})(t) = u_l(t)$ .

Wir behaupten, dass

(A)  $y \in C^0(I; \mathbb{R}^n)$  und

(B)  $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) \, ds$  für alle  $t \in I$ .

**Zu (A).** Es sei  $t \in I$  beliebig. Dann ist  $t \in J_l$  für ein  $l \in \mathbb{N}$ . Da  $y|_{J_l} = u_l$  und  $u_l \in C^0(J_l; \mathbb{R}^n)$  ist  $y$  auf  $J_l$  stetig und damit haben wir auch Stetigkeit bei  $t$ . **Zu (B).** Es sei  $t \in I$ , etwa  $t \in J_l$  für ein  $l \in \mathbb{N}$ . Beachte, dass dann auch  $[t_0, t] \in J_l$ , weil  $J_l$  ein Intervall ist. Nun berechnen wir

$$y(t) = (y|_{J_l})(t) \stackrel{y|_{J_l}=u_l}{=} u_l(t) = (T_l[u_l])(t) \stackrel{(507)}{=} y_0 + \int_{t_0}^t f(s, u_l(s)) \, ds \quad (511)$$

$$\stackrel{\frac{[t_0, t] \subset J_l}{y|_{J_l}=u_l}}{=} y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) \, ds. \quad (512)$$

Die Behauptung folgt, da  $t \in I$  beliebig war. Nun sind also (A) und (B) gezeigt und damit die Voraussetzungen von Aussage (2) in Proposition 85 erfüllt. Aus Proposition 85 “(2)  $\Rightarrow$  (1)” folgt nun, dass  $y$  das gegebene Anfangswertproblem löst.

**Zur Eindeutigkeit einer Lösung.** Angenommen es gäbe eine weitere Lösung  $\tilde{y} \neq y$ . Das heißt es gibt ein  $t_1 \in I$  mit  $\tilde{y}(t_1) \neq y(t_1)$ . Nun gibt es ein  $l \in \mathbb{N}$  mit  $t_1 \in J_l$ . Da  $\tilde{y}$  auf  $J_l$  das Anfangswertproblem löst, gilt nach Proposition 85, dass

$$\tilde{y}(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, \tilde{y}(s)) \, ds \quad \forall t \in J_l, \quad \text{d.h.} \quad T_l[\tilde{y}|_{J_l}] = \tilde{y}|_{J_l}. \quad (513)$$

Wir folgern, (aus der Eindeutigkeit des Fixpunktes von  $T_l$ ), dass  $\tilde{y}|_{J_l} = u_l = y|_{J_l}$ . Somit wäre aber  $\tilde{y}(t_1) = y(t_1)$ , ein Widerspruch.

Zum Schluss noch ein Wort zur *numerischen Approximation* von Lösungen.

**Definition 97. PICARD-ITERATION.** Es sei  $f \in C^0(I \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$  und  $u \in C^0(I; \mathbb{R}^n)$ . Es sei  $T : C^0(I; \mathbb{R}^n) \rightarrow C^0(I; \mathbb{R}^n)$  wie in Definition 86. Dann heißt die (Funktionen-)Folge  $(T^j[u])_{j \in \mathbb{N}}$  die *Picard-Iteration* mit Startwert  $u$ .

**Methode 98. NUMERISCHE APPROXIMATION.** Es erfülle  $f \in C^0(I \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$  eine globale Lipschitzbedingung. Es sei  $y \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$  die (nach Satz 75) eindeutige Lösung von

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & (t \in I) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}. \quad (514)$$

**Behauptung.** Es sei  $J = (a, b) \subset I$  ein beschränktes Intervall mit  $\bar{J} \subset I$ . Dann konvergiert für ein beliebiges  $u \in C^0(I; \mathbb{R}^n)$  die Picard-Iteration  $(T^j[u])_{j \in \mathbb{N}}$  gleichmäßig auf  $J$

gegen  $y$ .

**Begründung.** Beachte zunächst, dass  $u, y \in C_b^0(J; \mathbb{R}^n)$ , denn  $u, y$  sind beide stetig auf dem Kompaktum  $\bar{J}$  (und daher beschränkt nach dem Satz von Weierstraß). Wir erinnern uns daran, dass nach Methode 87  $T[y] = y$  und somit auch  $T^m[y] = y$  für alle  $m \in \mathbb{N}$ . Daher

$$d_\infty^{(J)}(T^m[u], y) = d_\infty^{(J)}(T^m[u], T^m[y]) \stackrel{\text{Korollar 96}}{\leq} \frac{L^m(b-a)^m}{m!} d_\infty^{(J)}(u, y). \quad (515)$$

Somit gilt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{t \in J} |(T^m[u])(t) - y(t)| \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{t \in J} \frac{L^m(b-a)^m}{m!} d_\infty^{(J)}(u, y) = 0, \quad (516)$$

was die gleichmäßige Konvergenz zeigt.

### 2.1.5 Einige Worte zum Satz von Peano

Wir werden eine Teilaussage zum Satz von Peano beweisen: Wir werden nämlich zeigen, dass es für alle  $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^n)$ ,  $t_0 \in I$  und  $y_0 \in G$  ein kleines Intervall  $(t_0 - a, t_0 + a) \subset I$  gibt, so, dass

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & (t \in (t_0 - a, t_0 + a)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (517)$$

eine Lösung besitzt. Ein solches Resultat nennt man *Kurzzeitexistenz-Resultat*.

Würde man den Satz von Peano komplett beweisen wollen, so müsste man noch argumentieren, dass das Existenzintervall so groß gemacht werden kann, dass die Lösung  $y$  eine *nichtfortsetzbare Lösung* ist. Dies sparen wir aber an dieser Stelle aber aus.

Unsere Beweisidee: Wir *approximieren* eine beliebige Funktion  $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^n)$  auf einer geeigneten Teilmenge durch Funktionen  $(f_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset C^0(I \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ , die eine globale Lipschitzbedingung erfüllen.

**Proposition 99.** Es sei  $A \subset \mathbb{R}$  kompakt,  $K \subset \mathbb{R}^n$  kompakt und  $f \in C^0(A \times K; \mathbb{R}^m)$ . Dann gibt es eine Folge  $(f_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset C^0(A \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$  mit

$$\forall j \in \mathbb{N}: \quad |f_j(\tau, z_2) - f_j(\tau, z_1)| \leq \sqrt{m}j|z_2 - z_1| \quad \forall \tau \in A \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{R}^n. \quad (518)$$

und  $f_j \rightarrow f$  gleichmäßig auf  $A \times K$ .

**Beweisidee.** Wir zeigen nur den Fall  $m = 1$ . Für  $m > 1$  muss man lediglich jede Komponente betrachten, siehe Übungsblatt 7. Es sei also  $f \in C^0(A \times K; \mathbb{R})$ . Wir setzen für  $j \in \mathbb{N}$  und  $(\tau, z) \in A \times \mathbb{R}^n$ .

$$f_j(\tau, z) := \inf_{w \in K} \{f(\tau, w) + j|w - z|\}. \quad (519)$$

**Schritt 1.**  $f_j : A \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ist reellwertig. Dazu: Weil  $A \times K$  kompakt ist, gibt es ein  $M > 0$  mit  $|f(\tau, w)| \leq M$  für alle  $(\tau, w) \in A \times K$ . Somit gilt für  $\tau \in A$  und  $z \in \mathbb{R}^n$  und

$w \in K$

$$f(\tau, w) + j|w - z| \geq -M + j|w - z| \geq -M. \quad (520)$$

Somit haben wir auch

$$\inf_{w \in K} \{f(\tau, w) + j|w - z|\} \geq -M > -\infty \quad \forall (\tau, z) \in A \times \mathbb{R}^n. \quad (521)$$

**Schritt 2.**  $f_j \rightarrow f$  gleichmäßig auf  $A \times K$ . Sei dazu  $\varepsilon \in (0, 1)$ . Beachte zunächst, dass für alle  $(\tau, z) \in A \times K$  gilt, dass

$$f_j(\tau, z) = \inf_{w \in K} \{f(\tau, w) + j|w - z|\} \leq_{w=z} f(\tau, z) + j|z - z| = f(\tau, z). \quad (522)$$

Wir wählen nun für alle  $j \in \mathbb{N}$  ein  $w_j \in K$  so, dass

$$f(\tau, w_j) + j|w_j - z| \leq f_j(\tau, z) + \frac{1}{2}\varepsilon. \quad (523)$$

Nun gilt

$$0 \leq_{(522)} f(\tau, z) - f_j(\tau, z) \leq_{(523)} f(\tau, z) - f(\tau, w_j) - j|w_j - z| + \frac{1}{2}\varepsilon \leq f(\tau, z) - f(\tau, w_j) + \frac{1}{2}\varepsilon. \quad (524)$$

Beachte nun, dass

$$j|z - w_j| \leq_{(523)} f_j(\tau, z) - f(\tau, w_j) + \frac{1}{2}\varepsilon \leq_{(522)} f(\tau, z) - f(\tau, w_j) + \frac{1}{2}\varepsilon \leq_{\varepsilon < 1} 2M + \frac{1}{2}, \quad (525)$$

d.h.

$$|z - w_j| \leq \frac{1}{j}(2M + \frac{1}{2}). \quad (526)$$

Da  $f$  auf  $A \times K$  stetig ist (und  $A \times K$  kompakt ist), ist es dort auch gleichmäßig stetig (siehe Analysis). Somit gibt es ein  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  mit

$$(\tau_1, v_1), (\tau_2, v_2) \in A \times K : |(\tau_1, v_1) - (\tau_2, v_2)| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(\tau_1, v_1) - f(\tau_2, v_2)| < \frac{1}{2}\varepsilon. \quad (527)$$

Sei man nun  $j \in \mathbb{N}$  so groß, dass  $\frac{1}{j}(2M + \frac{1}{2}) < \delta(\varepsilon)$ . Für  $(\tau_1, v_1) := (\tau, z)$  und  $(\tau_2, v_2) := (\tau, w_j)$  gilt dann nach (526), dass  $|(\tau_1, v_1) - (\tau_2, v_2)| < \delta(\varepsilon)$ . Somit haben wir

$$|f(\tau, z) - f(\tau, w_j)| = |f(\tau_1, v_1) - f(\tau_2, v_2)| < \frac{1}{2}\varepsilon. \quad (528)$$

Gehen wir nun zurück zu (524) so sehen wir, dass für  $j \in \mathbb{N}$  mit  $\frac{1}{j}(2M + \frac{1}{2}) < \delta(\varepsilon)$  gilt, dass

$$0 \leq f(\tau, z) - f_j(\tau, z) \leq f(\tau, z) - f(\tau, w_j) + \frac{1}{2}\varepsilon \leq_{(528)} \varepsilon. \quad (529)$$

Das bedeutet, dass für  $j \geq \lfloor \frac{1}{\delta(\varepsilon)}(2M + \frac{1}{2}) \rfloor + 1 := n_0(\varepsilon)$  gilt, dass

$$|f_j(\tau, z) - f(\tau, z)| < \varepsilon \quad \forall (\tau, z) \in A \times K. \quad (530)$$



Es folgt, dass  $f_j$  gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert.

**Schritt 3.** Wir zeigen (518). Dies funktioniert wie im Beweis von Satz 84. Es seien dazu  $j \in \mathbb{N}$  fest,  $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^n$  und  $\tau \in A$ . Wähle nun für  $\varepsilon > 0$  ein  $w \in K$  mit

$$f(\tau, w) + j|w - z_1| \leq f_j(\tau, z_1) + \varepsilon. \quad (531)$$

Dann gilt

$$f_j(\tau, z_2) - f_j(\tau, z_1) \stackrel{(531)}{\leq} f_j(\tau, z_2) - (f(\tau, w) + j|w - z_1|) + \varepsilon \quad (532)$$

$$\stackrel{(519)}{\leq} [f(\tau, w) + j|w - z_2|] - (f(\tau, w) + j|w - z_1|) + \varepsilon \quad (533)$$

$$= j(|w - z_2| - |w - z_1|) + \varepsilon = j(|w - z_1 + z_1 - z_2| - |w - z_1|) + \varepsilon \quad (534)$$

$$\stackrel{\Delta\text{-Üngl.}}{\leq} j(|w - z_1| + |z_1 - z_2| - |w - z_1|) + \varepsilon = j|z_1 - z_2| + \varepsilon. \quad (535)$$

Lassen wir  $\varepsilon \rightarrow 0+$  gehen, so erhalten wir

$$f_j(\tau, z_2) - f_j(\tau, z_1) \leq j|z_1 - z_2|. \quad (536)$$

Vertauschen wir die Rollen von  $z_1, z_2$ , so könnten wir auch herleiten, dass

$$f_j(\tau, z_1) - f_j(\tau, z_2) \leq j|z_1 - z_2|. \quad (537)$$

Die beiden vorigen Gleichungen ergeben dann

$$|f_j(\tau, z_1) - f_j(\tau, z_2)| \leq j|z_1 - z_2|. \quad (538)$$

**Schritt 4.** Zu zeigen wäre hier noch die Stetigkeit von  $f$  auf  $A \times \mathbb{R}^n$ . Wir überspringen dies an dieser Stelle, weil es genauso funktioniert wie in Satz 84.

Die Idee ist nun die Folgende: Es sei  $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^n)$ ,  $t_0 \in I$ ,  $y_0 \in G$ . Wir wählen ein geeignetes Teilkompaktum  $A \times K = [a, b] \times K$  von  $I \times G$  und approximieren  $f$  auf  $A \times K$  durch  $(f_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset C^0(A \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$  wie im vorigen Lemma. Dann gibt es für alle  $j \in \mathbb{N}$  Lösungen  $y_j \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$  zu

$$\begin{cases} y_j'(t) = f_j(t, y_j(t)) & (t \in (a, b)) \\ y_j(t_0) = y_0 \end{cases}. \quad (539)$$

Man hofft nun, dass diese Lösungen  $y_j$  in einem geeigneten Sinne gegen eine Lösung des ursprünglichen Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & (t \in ?) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (540)$$

konvergieren. Hierbei muss man unter Umständen noch das Intervall  $(a, b)$  verkleinern, deswegen das Fragezeichen.

**Todo 1.** Wahl des Teilkompaktums.

**Proposition 100.** Es sei  $f \in C^0(I \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ ,  $t_0 \in I$  und  $y_0 \in \mathbb{R}^n$ . Es sei  $R > 0$  und  $\alpha > 0$  mit  $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \subset I$ . Es sei  $M := \max_{(\tau, z) \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \times \overline{B_R(y_0)}} |f(\tau, z)|$ . Ferner sei  $y \in C^1((t_0 - \alpha, t_0 + \alpha); \mathbb{R}^n)$  eine Lösung von

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & (t \in (t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}. \quad (541)$$

Definiere  $a := \min\{\alpha, \frac{R}{M+1}\}$ . Dann gilt, dass  $y(t) \in \overline{B_R(y_0)}$  für alle  $t \in [t_0 - a, t_0 + a]$ .

**Beweis.** Es sei  $a > 0$  wie in der Aussage. Wir erinnern uns, dass wegen Proposition 85 gilt, dass

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) \, ds \quad \forall t \in (t_0 - \alpha, t_0 + \alpha). \quad (542)$$

Definiere

$$S := \sup\{t \in [t_0, t_0 + a] : y(\tau) \in \overline{B_R(y_0)} \, \forall \tau \in [t_0, t]\}. \quad (543)$$

Wir zeigen, dass  $S = t_0 + a$ . Für einen Widerspruch nehmen wir an, dass  $S < t_0 + a$ . Da  $t_0 + a \leq t_0 + \alpha$  gilt insbesondere  $S \in I$  und damit ist es möglich  $y$  bei  $S$  auszuwerten. Dann gilt (wegen der Wahl von  $S$ ), dass  $y(S) \in \partial B_R(y_0)$ , d.h.  $|y(S) - y_0| = R$ . Somit folgt

$$R = |y(S) - y_0| \stackrel{(542)}{=} \left| \int_{t_0}^S f(s, y(s)) \, ds \right| \leq \int_{t_0}^S |f(s, y(s))| \, ds \quad (544)$$

Wegen der Wahl von  $S$  gilt  $y(s) \in \overline{B_R(y_0)}$  für alle  $s \in [t_0, S]$ . Daher folgt nach der Definition von  $M$  in der Aussage

$$R \leq \int_{t_0}^S \underbrace{|f(s, y(s))|}_{\leq M} \, ds = M(S - t_0) \leq M(t_0 + a - t_0) = aM \leq R \frac{M}{M+1} \quad (545)$$

Subtrahiert man die rechte Seite von der linken, so erhält man  $\frac{R}{M+1} \leq 0$ , also einen Widerspruch. Es folgt, dass  $S = t_0 + a$  und damit  $y(t) \in \overline{B_R(y_0)}$  für alle  $t \in [t_0, t_0 + a]$ . Analog zeigt man  $y(t) \in \overline{B_R(y_0)}$  für alle  $t \in [t_0 - a, t_0]$  und damit folgt die Behauptung.

Wir werden später im Beweis ein geeignetes Teilkompaktum der Form  $[t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B_R(y_0)}$  wählen, wobei  $a > 0$  wie in der Aussage der vorigen Proposition ist.

**Anmerkung 101.** Es sei  $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^n)$ ,  $t_0 \in I$ ,  $y_0 \in G$ ,  $R > 0$  so dass  $\overline{B_R(y_0)} \subset G$  und  $\alpha > 0$  so, dass  $[t_0, t_0 + \alpha] \subset I$ . Ist nun  $\tilde{M} := \sup_{(\tau, z) \in [t_0, t_0 + \alpha] \times \overline{B_R(y_0)}} |f(\tau, z)| < \infty$ , so kann man mit derselben Technik eine leicht abgewandelte Version der vorigen Proposition beweisen, nämlich die Folgende:

ABGEWANDELTE VERSION. Ist  $a := \min\{\alpha, \frac{R}{M+1}\}$  und die Funktion  $y \in C^1((t_0 - \delta, t_0 + a))$ ,

$(\delta > 0)$ , eine Lösung von

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t \in (t_0 - \delta, t_0 + a) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}, \quad (546)$$

so gilt  $y(t) \in \overline{B_R(y_0)}$  für alle  $t \in [t_0, t_0 + a)$ . Spiegelbildliches lässt sich in  $(t_0 - a, t_0]$  zeigen.

**Todo 2.** Verstehen der Konvergenz.

**Proposition 102. SATZ VON ARZELA-ASCOLI.** Es sei  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  ein kompaktes Intervall und für  $j \in \mathbb{N}$  sei  $g_j \in C^0([a, b]; \mathbb{R}^m)$  eine stetige Funktion so, dass die Folge  $(g_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset C^0([a, b]; \mathbb{R}^m)$  folgendes erfüllt: Sie ist

(a) *punktweise beschränkt*, d.h. für alle  $x \in [a, b]$  gilt:  $\exists C > 0$  mit  $\sup_{j \in \mathbb{N}} |g_j(x)| \leq C$ .

und

(b) *gleichgradig stetig*, d.h. für alle  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  so, dass

$$x_1, x_2 \in [a, b] : |x_1 - x_2| < \delta \quad \Rightarrow \quad \sup_{j \in \mathbb{N}} |g_j(x_1) - g_j(x_2)| \leq \varepsilon. \quad (547)$$

Dann gibt es eine Teilfolge  $(g_{j_l})_{l \in \mathbb{N}}$  und ein  $g \in C^0([a, b]; \mathbb{R}^m)$  so, dass  $g_{j_l} \rightarrow g$  gleichmäßig auf  $[a, b]$  konvergent ist.

**Beweis.** Es sei  $g_j \in C^0([a, b]; \mathbb{R}^m)$  so, dass (a) und (b) erfüllt sind. Beachte nun:  $[a, b] \cap \mathbb{Q}$  ist abzählbar, sei etwa  $[a, b] \cap \mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \dots\}$ .

**Schritt 1.** Finde eine Teilfolge  $(j_l)_{l \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$  so dass für alle  $i \in \mathbb{N}$  die Folge  $(g_{j_l}(q_i))_{l \in \mathbb{N}}$  konvergent ist. Hierzu werden wir benutzen, dass wegen Eigenschaft (a) für alle  $i \in \mathbb{N}$  die Folge  $(g_j(q_i))_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^m$  eine beschränkte Folge ist. Daher gibt es mit dem Satz von Bolzano-Weierstraß (angewendet auf  $(g_j(q_1))_{j \in \mathbb{N}}$ ) eine Teilfolge  $(k_l^{(1)})_{l \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$  so, dass  $(g_{k_l^{(1)}}(q_1))_{l \in \mathbb{N}}$  konvergent ist. Nun ist auch die Teilfolge  $(g_{k_l^{(1)}}(q_2))_{l \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^m$  eine beschränkte Folge. Somit gibt es mit Bolzano-Weierstraß eine Teilfolge  $(k_l^{(2)})$  von  $(k_l^{(1)})$  so, dass  $(g_{k_l^{(2)}}(q_2))_{l \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^m$  konvergent ist. Wiederum ist  $(g_{k_l^{(2)}}(q_3))_{l \in \mathbb{N}}$  eine beschränkte Folge. Der Satz von Bolzano-Weierstraß liefert nun eine Teilfolge  $(k_l^{(3)})$  von  $(k_l^{(2)})$  so, dass  $(g_{k_l^{(3)}}(q_3))_{l \in \mathbb{N}}$  konvergent ist. Wir können nun immer so weiter machen und finden *geschachtelte Teilfolgen*  $(k_l^{(1)})_{l \in \mathbb{N}} \supset (k_l^{(2)})_{l \in \mathbb{N}} \supset (k_l^{(3)})_{l \in \mathbb{N}} \supset \dots$  so, dass für alle  $r \in \mathbb{N}$  die Folge  $(g_{k_l^{(r)}}(q_r))_{l \in \mathbb{N}}$  konvergent ist. Wir wählen nun die Teilfolge  $j_l := k_l^{(l)}$  für alle  $l \in \mathbb{N}$ . Sei nun  $i \in \mathbb{N}$ .  $\mathbb{Z} : g_{j_l}(q_i)$  ist konvergent. Dazu bemerke: Es definiert  $(j_l)_{l > i} = (k_l^{(l)})_{l > i}$  stets eine Teilfolge von  $(k_l^{(i)})_{l > i}$ . Dies liegt daran dass die Teilfolgen geschachtelt waren! Da  $(g_{k_l^{(i)}}(q_i))_{l \in \mathbb{N}}$  bereits konvergent ist, ist somit auch  $(g_{j_l}(q_i))_{l > i}$  konvergent. Da für die Konvergenz aber die ersten  $i$  Folgenglieder keine Rolle spielen, ist auch  $(g_{j_l}(q_i))_{l \in \mathbb{N}}$  konvergent.

**Schritt 2.** Wir zeigen nun, dass  $(g_{j_l})_{l \in \mathbb{N}} \subset (C^0([a, b]; \mathbb{R}^m), d_\infty)$  eine Cauchy-Folge ist. Dazu sei  $\varepsilon > 0$ . **ZZ:** Es gibt  $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  mit  $d_\infty(g_l, g_k) [= \sup_{x \in [a, b]} |g_{j_l}(x) - g_{j_k}(x)|] < \varepsilon$  für alle  $l, k \geq n_0(\varepsilon)$ . Wegen der gleichgradigen Stetigkeit (d.h. Bedingung (b)) existiert ein  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  mit

$$x_1, x_2 \in [a, b] : |x_1 - x_2| < \delta \quad \Rightarrow \quad \sup_{j \in \mathbb{N}} |g_j(x_1) - g_j(x_2)| \leq \frac{1}{3}\varepsilon. \quad (548)$$

Zusätzlich gilt  $[a, b] \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_\delta(q_i)$ , da für jedes  $x \in [a, b]$  das Intervall  $(x - \delta, x + \delta) \cap [a, b]$  eine rationale Zahl enthalten muss (und  $\{q_i : i \in \mathbb{N}\}$  ja gerade eine Abzählung der rationalen Zahlen in  $[a, b]$  ist). Nach dem Satz von Heine-Borel gibt es nun ein endliches  $N_\delta \in \mathbb{N}$  so, dass

$$[a, b] \subset \bigcup_{i=1}^{N_\delta} B_\delta(q_i) \quad (\text{weil } (B_\delta(q_i))_{i \in \mathbb{N}} \text{ offene Überdeckung des Kompaktums } [a, b] \text{ war.}) \quad (549)$$

Für alle  $i = 1, \dots, N_\delta$  ist nun  $(g_{j_l}(q_i))_{l \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^m$  eine Cauchy-Folge in  $\mathbb{R}^m$ . Damit gibt es auch für alle  $i = 1, \dots, N_\delta$  ein  $n_i = n_i(\varepsilon) \geq 0$  so, dass

$$|g_{j_l}(q_i) - g_{j_k}(q_i)| < \frac{1}{3}\varepsilon \quad \forall l, k \geq n_i. \quad (550)$$

Wähle nun  $n_0(\varepsilon) := \max_{i=1, \dots, N_\delta} n_i(\varepsilon)$ . Seien  $l, k \geq n_0(\varepsilon)$  und sei  $x \in [a, b]$  beliebig. Nach (549) gibt es  $i_0 \in \{1, \dots, N_\delta\}$  mit  $|x - q_{i_0}| < \delta$ . Wir berechnen nun

$$|g_{j_l}(x) - g_{j_k}(x)| = |g_{j_l}(x) - g_{j_l}(q_{i_0}) + g_{j_l}(q_{i_0}) - g_{j_k}(q_{i_0}) + g_{j_k}(q_{i_0}) - g_{j_k}(x)| \quad (551)$$

$$\leq \underbrace{|g_{j_l}(x) - g_{j_l}(q_{i_0})|}_{\leq \sup_{j \in \mathbb{N}} |g_j(x) - g_j(q_{i_0})|} + |g_{j_l}(q_{i_0}) - g_{j_k}(q_{i_0})| + \underbrace{|g_{j_k}(q_{i_0}) - g_{j_k}(x)|}_{\leq \sup_{j \in \mathbb{N}} |g_j(x) - g_j(q_{i_0})|} \quad (552)$$

$$\leq 2 \sup_{j \in \mathbb{N}} |g_j(x) - g_j(q_{i_0})| + |g_{j_l}(q_{i_0}) - g_{j_k}(q_{i_0})|. \quad (553)$$

Nach (548) gilt (weil  $|x - q_{i_0}| < \delta$ ), dass  $\sup_{j \in \mathbb{N}} |g_j(x) - g_j(q_{i_0})| < \frac{1}{3}\varepsilon$ . Ferner beachte, dass  $k, l \geq n_0(\varepsilon) \geq n_{i_0}$  und deshalb (wegen (550)) auch  $|g_{j_l}(q_{i_0}) - g_{j_k}(q_{i_0})| \leq \frac{1}{3}\varepsilon$  für alle  $l, k$ . Nun folgt mit (551) für  $l, k \geq n_0(\varepsilon)$

$$|g_{j_l}(x) - g_{j_k}(x)| \leq 2 \sup_{j \in \mathbb{N}} |g_j(x) - g_j(q_{i_0})| + |g_{j_l}(q_{i_0}) - g_{j_k}(q_{i_0})| < 2 \cdot \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon = \varepsilon. \quad (554)$$

Da  $x \in [a, b]$  beliebig war gilt für alle  $l, k \geq n_0(\varepsilon)$ , dass

$$d_\infty(g_{j_l}, g_{j_k}) = \sup_{x \in [a, b]} |g_{j_l}(x) - g_{j_k}(x)| \leq \varepsilon. \quad (555)$$

Wir haben also gezeigt, dass  $(g_{j_l})_{l \in \mathbb{N}} \subset (C^0([a, b]; \mathbb{R}^m), d_\infty)$  eine Cauchy-Folge ist. Beachte, dass nach dem Satz von Weierstraß  $C^0([a, b]; \mathbb{R}^m) = C_b^0([a, b]; \mathbb{R}^m)$ . Nun folgt mit Proposition 93, dass  $(g_{j_l})_{l \in \mathbb{N}}$  in  $(C^0([a, b]; \mathbb{R}^m), d_\infty)$  konvergent ist, also insbesondere gleichmäßig konvergent (vgl Anmerkung 91).

Wir sind nun bereit für das *Kurzzeitexistenzresultat* von Peano.

**Satz 103. KURZZEITEXISTENZRESULTAT VON PEANO.** Es sei  $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^n)$ ,  $t_0 \in I$ ,  $y_0 \in G$  gegeben. Dann gibt es ein  $b > 0$  so, dass das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t \in (t_0 - b, t_0 + b) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (556)$$

eine Lösung besitzt.

**Beweis.** Es sei  $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^n)$ ,  $t_0 \in I$ ,  $y_0 \in G$ . Wähle  $\alpha > 0$  und  $R > 0$  mit  $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \times \overline{B_R(y_0)} \subset I \times G$ . Sei nun  $A := [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$  und  $K := \overline{B_R(y_0)}$ . Nach Proposition 99 gibt es eine Folge  $(f_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset C^0(A \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$  von Funktionen, die eine globale Lipschitzbedingung erfüllen, mit  $f_j \rightarrow f$  gleichmäßig auf  $A \times K$ . Wähle nun  $M_j := \max_{(\tau, z) \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \times \overline{B_R(y_0)}} |f_j(\tau, z)|$  und  $M := \max_{(\tau, z) \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \times \overline{B_R(y_0)}} |f(\tau, z)|$ . Nach Aufgabe 2 auf Übungsblatt 9 konvergiert  $M_j$  gegen  $M$  für  $j \rightarrow \infty$ . Wir definieren nun  $a_j := \min\{\frac{1}{2}\alpha, \frac{R}{M_j + 1}\}$ ,  $a := \min\{\frac{1}{2}\alpha, \frac{R}{M + 1}\} > 0$  und vergewissern uns leicht, dass auch  $a_j \rightarrow a$  für  $j \rightarrow \infty$  gilt. Insbesondere gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $a_j > \frac{a}{2}$  für alle  $j \geq n_0$ . Es sei nun  $y_j \in C^1((t_0 - \alpha, t_0 + \alpha); \mathbb{R}^n)$  die eindeutige Lösung zu

$$\begin{cases} y_j'(t) = f_j(t, y_j(t)) & (t \in (t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)) \\ y_j(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (557)$$

Dass diese Lösung existiert und eindeutig ist liegt daran, dass  $f_j|_{(t_0 - \alpha, t_0 + \alpha) \times \mathbb{R}^n} \in C^0((t_0 - \alpha, t_0 + \alpha) \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$  alle Voraussetzungen von Satz 75 erfüllt. Nach Proposition 100 gilt, dass  $y_j(t) \in \overline{B_R(y_0)}$  für alle  $t \in (t_0 - a_j, t_0 + a_j)$ . Für  $j \geq n_0$  hat man also  $y_j(t) \in \overline{B_R(y_0)}$  für alle  $t \in [t_0 - \frac{a}{2}, t_0 + \frac{a}{2}]$ . Im Folgenden identifizieren wir  $y_j$  mit  $y_j|_{[t_0 - \frac{a}{2}, t_0 + \frac{a}{2}]}$ .

**Zwischenbehauptung.** Es gibt eine Teilfolge  $(y_{j_l})_{l \in \mathbb{N}} \subset C^0([t_0 - \frac{a}{2}, t_0 + \frac{a}{2}]; \mathbb{R}^n)$  von  $(y_j)_{j \geq n_0}$ , die gleichmäßig gegen ein  $y \in C^0([t_0 - \frac{a}{2}, t_0 + \frac{a}{2}]; \mathbb{R}^n)$  konvergiert. Dazu prüfen wir die Voraussetzungen von Proposition 102 für  $(y_j)_{j \geq n_0}$  nach.

**Zu Voraussetzung (a).** Für die punktweise Beschränktheit beobachten wir, dass für  $j \geq n_0$  nach Proposition 100

$$y_j(t) \in \overline{B_R(y_0)} \quad \forall t \in [t_0 - \frac{a}{2}, t_0 + \frac{a}{2}] \quad \Rightarrow \quad |y_j(t) - y_0| \leq R \quad \forall t \in [t_0 - \frac{a}{2}, t_0 + \frac{a}{2}]. \quad (558)$$

Somit gilt für  $t \in [t_0 - \frac{a}{2}, t_0 + \frac{a}{2}]$ , dass

$$|y_j(t)| = |y_j(t) - y_0 + y_0| \leq |y_j(t) - y_0| + |y_0| \leq R + |y_0|. \quad \text{d.h.} \quad \sup_{j \in \mathbb{N}} |y_j(t)| \leq R + |y_0|. \quad (559)$$

**Zu Voraussetzung (b).** Wir definieren  $\tilde{M} := \sup_{j \geq n_0} M_j$ . Dieses Supremum ist endlich, da  $(M_j)_{j \geq n_0}$  als konvergente Folge beschränkt ist. Es sei  $\varepsilon > 0$ . Wähle nun  $\delta = \delta(\varepsilon) := \frac{1}{\tilde{M}}\varepsilon$ .

Seien nun  $x_1, x_2 \in [t_0 - \frac{a}{2}, t_0 + \frac{a}{2}]$ ,  $|x_1 - x_2| < \delta$  und  $j \geq n_0$ . Dann gilt

$$|y_j(x_1) - y_j(x_2)| = \left| \int_{x_1}^{x_2} y_j'(s) \, ds \right| = \left| \int_{\min(x_1, x_2)}^{\max(x_1, x_2)} y_j'(s) \, ds \right| \quad (560)$$

$$\leq \int_{\min(x_1, x_2)}^{\max(x_1, x_2)} |y_j'(s)| \, ds \stackrel{(557)}{=} \int_{\min(x_1, x_2)}^{\max(x_1, x_2)} \underbrace{|f_j(s, y_j(s))|}_{\leq M_j, \text{ da } y_j(s) \in \overline{B_R(y_0)}} \, ds \leq M_j |x_2 - x_1|. \quad (561)$$

Nehmen wir das Supremum über alle  $j \geq n_0$  so erhalten wir

$$\sup_{j \geq n_0} |y_j(x_1) - y_j(x_2)| \leq \sup_{j \geq n_0} M_j |x_2 - x_1| = \tilde{M} |x_2 - x_1| \leq \tilde{M} \delta = \tilde{M} \frac{1}{M} \varepsilon = \varepsilon. \quad (562)$$

Wir haben die Voraussetzungen von Satz 102 nachgeprüft und erhalten die Existenz der Teilfolge  $(y_{j_l})_{l \in \mathbb{N}}$  und des Grenzwertes  $y$  aus der Zwischenbehauptung.

**Behauptung.**  $y \in C^1((t_0 - \frac{a}{2}, t_0 + \frac{a}{2}); \mathbb{R}^n)$  ist Lösung von

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & (t \in (t_0 - \frac{a}{2}, t_0 + \frac{a}{2})) \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \quad (563)$$

Hierzu genügt (nach Proposition 85) folgendes zu zeigen

$$\mathbb{Z}: \quad y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) \, ds \quad \forall t \in (t_0 - \frac{a}{2}, t_0 + \frac{a}{2}). \quad (564)$$

Beachte, dass (557) (und Proposition 85) impliziert, dass für alle  $j \in \mathbb{N}$

$$y_j(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f_j(s, y_j(s)) \, ds \quad \forall t \in (t_0 - \frac{a}{2}, t_0 + \frac{a}{2}), \quad (565)$$

somit auch

$$y_{j_l}(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f_{j_l}(s, y_{j_l}(s)) \, ds \quad \forall t \in (t_0 - \frac{a}{2}, t_0 + \frac{a}{2}). \quad (566)$$

Wir gehen nun auf beiden Seiten zum Grenzwert ( $l \rightarrow \infty$ ) über. Auf der linken Seite gilt  $\lim_{l \rightarrow \infty} y_{j_l}(t) = y(t)$ , weil  $y_{j_l}$  gegen  $y$  gleichmäßig konvergiert. Für die rechte Seite gehen wir wie folgt vor. Es sei  $\varepsilon > 0$ . Da  $f_{j_l} \rightarrow f$  gleichmäßig auf  $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \times \overline{B_R(y_0)}$  konvergiert, gibt es ein  $l_0 \in \mathbb{N}$  mit

$$\sup_{(\tau, z) \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \times \overline{B_R(y_0)}} |f_{j_l}(\tau, z) - f(\tau, z)| < \frac{1}{2} \varepsilon \quad \forall l \geq l_0. \quad (567)$$

Ferner ist  $f$  auf dem Kompaktum  $[t_0 - \frac{a}{2}, t_0 + \frac{a}{2}] \times \overline{B_R(y_0)}$  gleichmäßig stetig ist und daher gibt es ein  $\delta > 0$  mit

$$z_1, z_2 \in \overline{B_R(y_0)}, |z_1 - z_2| < \delta, s \in [t_0 - \frac{a}{2}, t_0 + \frac{a}{2}] \Rightarrow |f(s, z_1) - f(s, z_2)| < \frac{1}{2}\varepsilon. \quad (568)$$

Zudem gibt es ein  $l_1 \in \mathbb{N}$  so, dass  $l \geq l_1$  impliziert, dass

$$|y_{j_l}(s) - y(s)| < \delta \quad \forall s \in [t_0 - \frac{a}{2}, t_0 + \frac{a}{2}]. \quad (569)$$

Wir berechnen für  $l \geq \max(l_0, l_1)$

$$\left| y_0 + \int_{t_0}^t f_{j_l}(s, y_{j_l}(s)) \, ds - \left( y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) \, ds \right) \right| = \left| \int_{t_0}^t (f_{j_l}(s, y_{j_l}(s)) - f(s, y(s))) \, ds \right| \quad (570)$$

$$= \left| \int_{\min(t, t_0)}^{\max(t, t_0)} (f_{j_l}(s, y_{j_l}(s)) - f(s, y(s))) \, ds \right| \leq \int_{\min(t, t_0)}^{\max(t, t_0)} |f_{j_l}(s, y_{j_l}(s)) - f(s, y(s))| \, ds. \quad (571)$$

Nun gilt mit der Dreiecksungleichung

$$|f_{j_l}(s, y_{j_l}(s)) - f(s, y(s))| \leq |f_{j_l}(s, y_{j_l}(s)) - f(s, y_{j_l}(s))| + |f(s, y_{j_l}(s)) - f(s, y(s))|. \quad (572)$$

Für den ersten Summanden haben wir (weil nach (558)  $y_{j_l}(s) \in \overline{B_R(y_0)}$ )

$$|f_{j_l}(s, y_{j_l}(s)) - f(s, y_{j_l}(s))| \leq \sup_{(\tau, z) \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \times \overline{B_R(y_0)}} |f_{j_l}(\tau, z) - f(\tau, z)| \leq \frac{1}{2}\varepsilon. \quad (573)$$

Für den zweiten Summanden definiere  $z_1 := y_{j_l}(s)$  und  $z_2 := y(s)$ . Dann gilt nach (569), dass  $|z_1 - z_2| < \delta$  für alle  $l \geq \max(l_0, l_1)$ . Es folgt aus (568), dass

$$|f(s, y_{j_l}(s)) - f(s, y(s))| = |f(s, z_2) - f(s, z_1)| < \frac{1}{2}\varepsilon. \quad (574)$$

Mit den beiden obigen Gleichungen und (572) folgt

$$|f(s, y_{j_l}(s)) - f(s, y(s))| \leq \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon. \quad (575)$$

Benutzen wir dies in (571) so folgt für  $l \geq \max(l_1, l_2)$

$$\left| y_0 + \int_{t_0}^t f_{j_l}(s, y_{j_l}(s)) \, ds - \left( y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) \, ds \right) \right| \leq \varepsilon(t - t_0). \quad (576)$$

Somit

$$\limsup_{l \rightarrow \infty} \left| y_0 + \int_{t_0}^t f_{j_l}(s, y_{j_l}(s)) \, ds - \left( y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) \, ds \right) \right| \leq \varepsilon(t - t_0). \quad (577)$$

Lassen wir  $\varepsilon \rightarrow 0+$  streben, so erhalten wir

$$\limsup_{l \rightarrow \infty} \left| y_0 + \int_{t_0}^t f_{j_l}(s, y_{j_l}(s)) \, ds - \left( y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) \, ds \right) \right| = 0. \quad (578)$$

Dies erlaubt uns dann auch, auf der rechten Seite von (566) zum Grenzwert überzugehen und wir erhalten

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) \, ds \quad \forall t \in (t_0 - \frac{a}{2}, t_0 + \frac{a}{2}), \quad (579)$$

was zu zeigen war. Die Aussage des Satzes folgt dann mit  $b := \frac{a}{2}$ .

### 2.1.6 Der Eindeutigkeitsatz

Für das Eindeutigkeitsresultat ist der *Satz von Kirszbraun-Valentine* unsere Hauptzutat.

**Wiederholung Satz 84.** SATZ VON KIRSZBRAUN-VALENTINE. Es sei  $G \subset \mathbb{R}^n$  offen und beschränkt sowie  $I \subset \mathbb{R}$  offen. Es sei  $m \in \mathbb{N}$  und  $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^m)$  erfülle

$$|f(\tau, z_2) - f(\tau, z_1)| \leq L|z_2 - z_1| \quad \forall \tau \in I, \forall z_1, z_2 \in G. \quad (580)$$

Dann gibt es  $F \in C^0(I \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$  mit  $F|_{I \times G} = f$  und

$$|F(\tau, z_2) - F(\tau, z_1)| \leq \sqrt{m}L|z_2 - z_1| \quad \forall \tau \in I, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{R}^n. \quad (581)$$

Damit können wir bereits das Eindeutigkeitsresultat beweisen

**Wiederholung Satz 79.** EINDEUTIGKEITSSATZ. Es erfülle  $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^n)$  eine lokale Lipschitzbedingung, sei  $t_0 \in I$  und  $y_0 \in G$ . Seien  $I_1, I_2 \subset I$  Teilintervalle mit  $t_0 \in I_1 \cap I_2$  und  $y_j \in C^1(I_j; G)$  ( $j = 1, 2$ ) Lösungen von

$$\begin{cases} y_j'(t) = f(t, y_j(t)) & (t \in I_j) \\ y_j(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (j = 1, 2). \quad (582)$$

Dann gilt  $y_1|_{I_1 \cap I_2} = y_2|_{I_1 \cap I_2}$ .

**Beweis.** Es seien  $y_1 \in C^1(I_1; G)$  und  $y_2 \in C^1(I_2; G)$  wie in der Aussage. Beachte, dass  $I_1 \cap I_2$  auch ein offenes Intervall ist. Definiere

$$O := \{t \in I_1 \cap I_2 : y_1(t) = y_2(t)\} \quad (583)$$

Beachte, dass  $O \neq \emptyset$ , da  $t_0 \in O$ .



**Zwischenbehauptung 1.**  $I_1 \cap I_2 \setminus O$  ist offen. Dazu

$$I_1 \cap I_2 \setminus O = \{t \in I_1 \cap I_2 : y_1(t) \neq y_2(t)\} = \{t \in I_1 \cap I_2 : |y_1(t) - y_2(t)| > 0\}. \quad (584)$$

Nun ist die Funktion  $h : I_1 \cap I_2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(t) := |y_1(t) - y_2(t)|$  stetig. Aus (584) lernen wir, dass  $I_1 \cap I_2 \setminus O = h^{-1}((0, \infty))$ . Da Urbilder offener Mengen unter stetigen Funktionen wieder offen sind (Analysis) folgt, dass  $I_1 \cap I_2 \setminus O$  offen ist.

**Zwischenbehauptung 2.**  $O$  ist offen. Dazu sei  $T \in O$  beliebig, d.h.  $y_1(T) = y_2(T)$ . Definiere  $v := y_1(T) [= y_2(T)]$ . Wegen der lokalen Lipschitzbedingung gibt es nun  $\varepsilon > 0$ ,  $r > 0$  und  $L > 0$  so, dass  $(T - \varepsilon, T + \varepsilon) \subset I$ ,  $B_r(v) \subset G$  und

$$|f(\tau, z_2) - f(\tau, z_1)| \leq L|z_2 - z_1| \quad \forall \tau \in (T - \varepsilon, T + \varepsilon) \quad \forall z_1, z_2 \in B_r(v). \quad (585)$$

Nach dem Satz von Kirszbraun-Valentine gibt es nun ein  $F \in C^0((T - \varepsilon, T + \varepsilon) \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$  so, dass  $F|_{(T - \varepsilon, T + \varepsilon) \times B_r(v)} = f$  und

$$|F(\tau, z_2) - F(\tau, z_1)| \leq \sqrt{n}L|z_2 - z_1| \quad \forall \tau \in (T - \varepsilon, T + \varepsilon) \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{R}^n. \quad (586)$$

Insbesondere erfüllt  $F$  eine globale Lipschitzbedingung auf  $(T - \varepsilon, T + \varepsilon)$ . Betrachten wir nun  $U := y_1^{-1}(B_r(v)) \cap y_2^{-1}(B_r(v)) \cap (T - \varepsilon, T + \varepsilon)$ . Da  $y_1, y_2$  stetig sind (und daher Urbilder offener Mengen wieder offen sind), ist  $U$  offen. Da auch  $T \in U$  gibt es nun  $\delta > 0$  mit

$$(T - \delta, T + \delta) \subset U = y_1^{-1}(B_r(v)) \cap y_2^{-1}(B_r(v)) \cap (T - \varepsilon, T + \varepsilon) \quad (587)$$

Nun hat nach dem globalen Satz von Picard-Lindelöf das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) = F(t, y(t)) & (t \in (T - \delta, T + \delta)) \\ y(T) = v \end{cases} \quad (588)$$

Eine eindeutige Lösung  $y \in C^1((T - \delta, T + \delta); \mathbb{R}^n)$ . Für  $t \in (T - \delta, T + \delta)$  gilt nun

$$y_1'(t) = f(t, y_1(t)) \quad \xlongequal{\text{weil wg. (587) } y_1(t) \in B_r(v) \quad \forall t \in (T - \delta, T + \delta)} F(t, y_1(t)) \quad (589)$$

und ferner  $y_1(T) = v$ . Wir folgern aus der Eindeutigkeit von , dass  $y_1|_{(T - \delta, T + \delta)} = y$ . Analog zeigen wir

$$y_2'(t) = f(t, y_2(t)) \quad \xlongequal{\text{weil wg. (587) } y_2(t) \in B_r(v) \quad \forall t \in (T - \delta, T + \delta)} F(t, y_2(t)). \quad (590)$$

Es folgt (wiederum aus der Eindeutigkeit von ), dass  $y_2|_{(T - \delta, T + \delta)} = y$  und somit  $y_2|_{(T - \delta, T + \delta)} = y_1|_{(T - \delta, T + \delta)}$ . Damit gilt also  $(T - \delta, T + \delta) \subset O$ . Die Offenheit von  $O$  ist bewiesen. **Ende der Zwischenbehauptungen.** Beachte nun, dass

$$(I_1 \cap I_2) = [(I_1 \cap I_2) \setminus O] \cup O, \quad (591)$$

d.h.  $I_1 \cap I_2$  ist die Vereinigung zweier disjunkter offener Mengen. Da  $I_1 \cap I_2$  aber (als Intervall) zusammenhängend ist, gilt nun entweder  $O = \emptyset$  oder  $I_1 \cap I_2 \setminus O = \emptyset$ . Da aber  $O \neq \emptyset$  (weil  $t_0 \in O$ ) gilt  $I_1 \cap I_2 \setminus O = \emptyset$  und somit  $O = I_1 \cap I_2$ . Mit anderen Worten gilt also  $y_1|_{I_1 \cap I_2} = y_2|_{I_1 \cap I_2}$ .

### 2.1.7 Beweis des (lokalen) Satzes von Picard-Lindelöf

Wir haben bereits angekündigt, dass der lokale Satz von Picard-Lindelöf und dem *abgeschwächten Satz von Peano* folgt. Diesen werden wir als nächstes beweisen.

**Wiederholung Satz 78.** ABGESCHWÄCHTER SATZ VON PEANO. Es erfülle  $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^n)$  eine lokale Lipschitzbedingung. Sei dazu  $t_0 \in I$  und  $y_0 \in G$ . Dann existiert ein Teilintervall  $\tilde{I} \subset I$  mit  $t_0 \in \tilde{I}$  und mit einer nichtfortsetzbaren Lösung  $y \in C^1(\tilde{I}; G)$  des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & (t \in \tilde{I}) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (592)$$

**Beweis.** Nach dem Kurzzeitexistenzresultat von Peano (Satz 103) gibt es ein  $b > 0$  so, dass eine *Kurzzeitlösung*  $y_{ku} \in C^1((t_0 - b, t_0 + b); \mathbb{R}^n)$  von

$$\begin{cases} y'_{ku}(t) = f(t, y_{ku}(t)) & (t \in (t_0 - b, t_0 + b)) \\ y_{ku}(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (593)$$

Wir führen für den Beweis folgende Bezeichnung ein. Für ein offenes Teilintervall  $J \subset I$  gilt

$$(AWP|J) \quad \text{bezeichnet das Anfangswertproblem} \quad \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & (t \in J) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (594)$$

Definiere nun

$$t_+ := \sup\{\bar{t} \geq t_0 + b : (AWP|(t_0 - b, \bar{t})) \text{ hat eine Lösung } \bar{y} \text{ mit } \bar{y}|_{(t_0 - b, t_0 + b)} = y_{ku}\} \quad (595)$$

und

$$t_- := \inf\{\underline{t} \leq t_0 - b : (AWP|(\underline{t}, t_0 + b)) \text{ hat eine Lösung } \underline{y} \text{ mit } \underline{y}|_{(t_0 - b, t_0 + b)} = y_{ku}\}. \quad (596)$$

Nun gibt es eine monoton wachsende Folge  $\bar{t}_j \uparrow t_+$  und Lösungen  $\bar{y}_j$  von  $(AWP, (t_0 - b, \bar{t}_j))$  mit  $\bar{y}_j|_{(t_0 - b, t_0 + b)} = y_{ku}$  sowie eine monoton fallende Folge  $\underline{t}_j \uparrow t_+$  und Lösungen  $\underline{y}_j$  von  $(AWP, (\underline{t}_j, t_0 + b))$  mit  $\underline{y}_j|_{(t_0 - b, t_0 + b)} = y_{ku}$ . Definiere  $y_j : (\underline{t}_j, \bar{t}_j) \rightarrow \mathbb{R}^n$  durch

$$y_j(t) := \begin{cases} \underline{y}_j(t) & t \in (\underline{t}_j, t_0] \\ \bar{y}_j(t) & t \in (t_0, \bar{t}_j) \end{cases} \quad (597)$$

Sicherlich gilt, dass  $y_j \in C^1((\underline{t}_j, \bar{t}_j); \mathbb{R}^n)$ , denn sowohl  $\underline{y}_j$  als auch  $\bar{y}_j$  stimmen auf  $(t_0 - b, t_0 + b)$  mit  $y_{ku}$  überein und somit gibt es bei  $t_0$  keine Differenzierbarkeitsprobleme. Ferner gilt für alle  $t \in (\underline{t}_j, \bar{t}_j)$

$$y_j'(t) = \begin{cases} \underline{y}_j'(t) & t \in (\underline{t}_j, t_0] \\ \bar{y}_j'(t) & t \in (t_0, \bar{t}_j) \end{cases} = \begin{cases} f(t, \underline{y}_j(t)) & t \in (\underline{t}_j, t_0] \\ f(t, \bar{y}_j(t)) & t \in (t_0, \bar{t}_j) \end{cases} = f(t, y_j(t)) \quad (598)$$

und außerdem  $y_j(t_0) = y_{ku}(t_0) = y_0$ . Somit löst  $y_j$  also  $(AWP|(\underline{t}_j, \bar{t}_j))$ . Wir definieren nun  $I_j := (\underline{t}_j, \bar{t}_j)$ . Da unsere Folgen monoton gewählt waren gilt  $I_j \subset I_{j+1}$  für alle  $j \in \mathbb{N}$ .

**Zwischenbehauptung.** Für alle  $k \geq j$  gilt  $y_k|_{I_j} = y_j$ . Dies folgern wir leicht aus dem Eindeutigkeitsatz (Satz 79) — denn  $y_k$  löst  $(AWP|I_k)$  und  $y_j$  löst  $(AWP|I_j)$  (also dasselbe AWP auf unterschiedlichen Intervallen) und daher stimmen  $y_k$  und  $y_j$  auf  $I_k \cap I_j = I_j$  überein. Wir folgern  $y_k|_{I_j} = y_j|_{I_j} = y_j$ . **Zwischenbehauptung Ende.**

Nun setze  $\tilde{I} := (t_-, t_+) = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$  und definiere

$$\hat{y} : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^n : \Rightarrow \hat{y}(t) := y_{k_t}(t) \quad \text{wobei} \quad k_t := \min\{j \in \mathbb{N} : t \in I_j\} \quad (599)$$

Beachte, dass für alle  $l \in \mathbb{N}$  gilt

$$t \in I_l \quad \Rightarrow \quad k_t \leq l \quad \text{und somit} \quad \hat{y}(t) = y_{k_t}(t) \underset{\text{Zw.Beh.}}{=} (y_l|_{I_{k_t}})(t) = y_l(t), \quad (600)$$

d.h.  $\hat{y}|_{I_l} = y_l$ .

**Behauptung.**  $\hat{y}$  ist eine nichtfortsetzbare Lösung von  $(AWP|\tilde{I})$ . Dass  $\hat{y}$  eine Lösung des AWP auf  $\tilde{I}$  ist liegt daran, dass  $\hat{y}|_{I_j} = y_j$  und somit löst  $\hat{y}$  das Anfangswertproblem auf  $I_j$  für alle  $j \in \mathbb{N}$ , also auch auf  $\tilde{I} = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$ . Noch  $\mathbb{Z}\hat{y}$  ist nichtfortsetzbar. Dazu: Angenommen es gäbe ein  $J = (\alpha, \beta) \supsetneq \tilde{I}$  und ein  $z \in C^1(J; G)$  mit  $z|_{\tilde{I}} = \hat{y}$  und

$$\begin{cases} z'(t) = f(t, z(t)) & (t \in J) \\ z(t_0) = y_0 \end{cases} . \quad (601)$$

Beachte, dass  $z|_{(t_0-b, t_0+b)} = \hat{y}|_{(t_0-b, t_0+b)} = y_{ku}$ , wobei Letzteres gilt weil  $(y_j)|_{(t_0-b, t_0+b)} = y_{ku}$ . Dass bedeutet aber, dass die Lösung  $z_{(t_0-b, \beta)}$  an der Supremumsbildung in (595) teilnimmt. Man folgert  $\beta \leq t_+$  Genauso nimmt die Lösung  $z_{(\alpha, t_0+b)}$  an der Infimumsbildung in (596) teil. Es folgt, dass  $\alpha \geq t_-$ . Beides zusammen ergibt dann den folgenden Widerspruch:

$$J = (\alpha, \beta) \subset (t_-, t_+) = \tilde{I} \subsetneq J. \quad (602)$$

**Wiederholung Satz 79.** SATZ VON PICARD-LINDELÖF II - LOKALE VERSION. Es erfülle  $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^n)$  eine lokale Lipschitzbedingung, sei  $t_0 \in I$  und  $y_0 \in G$ . Dann

gibt es eine eindeutige maximale Lösung  $y \in C^1(\hat{I}; G)$ , ( $\hat{I} \subset I, t_0 \in \hat{I}$ ) von

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (603)$$

Das bedeutet:  $y$  löst das o.g. Anfangswertproblem auf  $\hat{I}$  und für jede weitere Lösung  $z \in C^1(J; G)$  ( $J \subset I$  offen,  $t_0 \in J$ ) von

$$\begin{cases} z'(t) = f(t, z(t)) & (t \in J) \\ z(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (604)$$

gilt  $J \subset \hat{I}$  und  $z = y|_J$ .

**Beweis.** Es erfülle  $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^n)$  eine lokale Lipschitzbedingung, sei  $t_0 \in I$  und  $y_0 \in G$ .

**Existenz.** Wir wissen bereits aus dem vorigen Beweis (von Satz 78), dass es eine nichtfortsetzbare Lösung  $y \in C^1(\tilde{I}; G)$  von

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & (t \in \tilde{I}) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (605)$$

gibt. Wir definieren  $\hat{I} := \tilde{I}$  und behaupten, dass  $y$  eine maximale Lösung ist. In der Tat, sei  $z \in C^1(J; G)$  ( $J \subset I, t_0 \in J$ ) eine weitere Lösung von

$$\begin{cases} z'(t) = f(t, z(t)) & (t \in J) \\ z(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (606)$$

Nach dem Eindeutigkeitsatz (Satz 79) gilt  $z|_{\tilde{I} \cap J} = y|_{\tilde{I} \cap J}$ . Wir nehmen an, dass  $J \not\subset \tilde{I}$ , d.h. auch  $\tilde{I} \cup J \supsetneq \tilde{I}$ . Definiere nun

$$\bar{z} : \tilde{I} \cup J \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \bar{z}(t) := \begin{cases} y(t) & t \in \tilde{I} \\ z(t) & t \in J. \end{cases} \quad (607)$$

Da  $y$  und  $z$  auf  $\tilde{I} \cap J$  übereinstimmen ist  $\bar{z}$  wohldefiniert. Ferner gibt es wegen der Offenheit von  $\tilde{I} \cap J$  keine Differenzierbarkeitsprobleme an Randpunkten von  $\tilde{I}$  bzw.  $J$ . Man sieht nun, dass  $\bar{z}|_{\tilde{I}} = y$  und rechnet leicht nach, dass

$$\begin{cases} \bar{z}'(t) = f(t, \bar{z}(t)) & (t \in \tilde{I} \cup J) \\ \bar{z}(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (608)$$

Dies aber widerspricht der Nichtfortsetzbarkeit von  $y$ .

**Eindeutigkeit.** Es seien  $y_1 \in C^1(\hat{I}_1; G)$  und  $y_2 \in C^1(\hat{I}_2; G)$  zwei maximale Lösungen

desselben Anfangswertproblems. Wegen der Maximalität von  $y_1$  gilt  $\hat{I}_2 \subset \hat{I}_1$  und  $y_2 = y_1|_{\hat{I}_2}$ . Wegen der Maximalität von  $y_2$  gilt aber auch  $\hat{I}_1 \subset \hat{I}_2$  und  $y_1 = y_2|_{\hat{I}_1}$ . Wir folgern  $\hat{I}_1 = \hat{I}_2$  und  $y_1 = y_2$ .

**Anmerkung 104.** Im ersten Teil des Beweises haben wir gesehen, dass unter den Voraussetzungen von Satz 79 jede nichtfortsetzbare Lösung bereits maximal sein muss. Dies kann gut verwendet werden um zu zeigen, dass eine gegebene Lösung maximal ist.

## 2.2 Die Maximale Lösung

### 2.2.1 Thematischer Überblick

Es sei  $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^n)$  eine lokale Lipschitzbedingung erfüllend,  $t_0 \in I$  und  $y_0 \in G$ . Wir haben nun gezeigt, dass wir eine *maximale* (= größtmögliche) Lösung  $y \in C^1(\hat{I}; G)$  (für ein  $\hat{I} \subset I$ ) zu

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (609)$$

finden können.

#### Fragestellungen 105.

1. Unter welchen Voraussetzungen ist die maximale Lösung auf ganz  $I$  definiert (d.h.  $\hat{I} = I$ )?
2. Falls  $\hat{I} \subsetneq I$ : Was muss schiefgehen, dass sich die Lösung nicht über  $\hat{I}$  hinaus vergrößern lässt?

Wieder besprechen wir in diesem Abschnitt nur die Resultate, die die o.g. Fragen beantworten. Die Beweise machen wir später.

**Zu Frage 2.** Es sei etwa  $I = (a, b)$  und  $\hat{I} = (t_-, t_+) \subsetneq I$ . Falls  $t_+ < b$  muss bei  $t_+$  etwas passieren, was verursacht, dass sich die Lösung nicht weiter fortsetzen lässt. Wir werden sehen, dass im wesentlichen zwei Dinge schiefgehen können

1. *Escape-Situation* d.h. “die Lösung verlässt  $G$ ”, also  $\liminf_{t \uparrow t_+} \text{dist}(y(t), \mathbb{R}^n \setminus G) = 0$ .
2. *Blow-Up-Situation*, d.h. “die Lösung explodiert”, also  $\limsup_{t \uparrow t_+} |y(t)| = \infty$ .

Analoges passiert falls  $t_- > a$ . Wir fassen diese Phänomene zu dem folgenden Satz zusammen

**Satz 106. MAXIMALITÄTSDETEKTOR.** Es erfülle  $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^n)$  eine lokale Lipschitzbedingung. Sei  $t_0 \in I, y_0 \in G$ . Es sei  $y \in C^1(\hat{I}; G)$  die maximale Lösung von

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (610)$$

Sei  $I = (a, b)$  und  $\hat{I} = (t_-, t_+)$ . Dann gilt

$$t_+ = b \quad \text{oder} \quad \liminf_{t \uparrow t_+} \min \left\{ \text{dist}(y(t), \mathbb{R}^n \setminus G), \frac{1}{|y(t)| + 1} \right\} = 0. \quad (611)$$

Analog

$$t_- = a \quad \text{oder} \quad \liminf_{t \downarrow t_-} \min \left\{ \text{dist}(y(t), \mathbb{R}^n \setminus G), \frac{1}{|y(t)| + 1} \right\} = 0. \quad (612)$$

Hierbei verwenden wir die Konvention  $\text{dist}(v, \emptyset) = \infty$  für alle  $v \in \mathbb{R}^n$ .

Mithilfe der Funktion  $t \mapsto \min \left\{ \text{dist}(y(t), \mathbb{R}^n \setminus G), \frac{1}{|y(t)| + 1} \right\}$  lassen sich also die Endpunkte des maximalen Existenzintervalls *detektieren*. Abschließend führen wir noch folgende Sprechweise ein

**Definition 107.** LINKS/RECHTSGLOBALITÄT. Es erfülle  $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^n)$  eine lokale Lipschitzbedingung. Sei  $t_0 \in I, y_0 \in G$ . Es sei  $y \in C^1(\hat{I}; \mathbb{R}^n)$  die maximale Lösung von

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}. \quad (613)$$

Sei  $I = (a, b)$  und  $\hat{I} = (t_-, t_+)$ . Dann heißt  $y$

- *linksglobal*, falls  $t_- = a$ ,
- *rechtsglobal*, falls  $t_+ = b$ ,
- *global*, falls  $y$  linksglobal und rechtsglobal ist.

**Zu Frage 1.** Wir wissen nun, was bei einer nicht-(rechts/links)globalen Lösung passieren kann: Entweder es gibt eine Escape-Situation oder eine Blow-Up-Situation. Unter gewissen Voraussetzungen können beide Phänomene ausgeschlossen werden. Wir erhalten dann *Globalitätskriterien*, d.h. Voraussetzungen unter denen  $\hat{I} = I$  gilt. Zum Beispiel das Folgende

**Satz 108.** GLOBALITÄT ÜBER LINEARES WACHSTUM. Es erfülle  $f \in C^0(I \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$  (d.h.  $G = \mathbb{R}^n$ ) eine lokale Lipschitzbedingung und es gebe ein  $c \in C^0(I; \mathbb{R})$  mit  $c(t) \geq 0$  für alle  $t \in I$  so, dass

$$|f(\tau, z)| \leq c(\tau)(1 + |z|) \quad \forall \tau \in I, z \in \mathbb{R}^n. \quad (614)$$

Dann ist für alle  $t_0 \in I$  und  $y_0 \in \mathbb{R}^n$  die maximale Lösung  $y \in C^1(\hat{I}; \mathbb{R}^n)$  von

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (615)$$

eine globale Lösung, d.h.  $\hat{I} = I$ .

Zum Schluss noch eine kleine Erinnerung: Wir kennen bereits ein Globalitätskriterium aus Kapitel 2.1! Es besagt nämlich der globale Satz von Picard-Lindelöf, dass eine globale Lösung existiert, sofern  $f \in C^0(I \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$  eine globale Lipschitzbedingung erfüllt. Auf Übungsblatt 10 werden wir sehen, dass in diesem Fall aber auch das Kriterium aus Satz 108 erfüllt ist. Um solche Globalitätskriterien herzuleiten, müssen wir das *Wachstum* von Lösungen verstehen. Ein entscheidendes Resultat in diesem Kontext wird das berühmte *Lemma von Gronwall* sein.

## 2.2.2 Der Maximalitätsdetektor

**Wiederholung Satz 106. MAXIMALITÄTSDETEKTOR.** Es erfülle  $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^n)$  eine lokale Lipschitzbedingung. Sei  $t_0 \in I, y_0 \in G$ . Es sei  $y \in C^1(\hat{I}; G)$  die maximale Lösung von

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} . \quad (616)$$

Sei  $I = (a, b)$  und  $\hat{I} = (t_-, t_+)$ . Dann gilt

$$t_+ = b \quad \text{oder} \quad \liminf_{t \uparrow t_+} \min \left\{ \text{dist}(y(t), \mathbb{R}^n \setminus G), \frac{1}{|y(t)| + 1} \right\} = 0. \quad (617)$$

Analog

$$t_- = a \quad \text{oder} \quad \liminf_{t \downarrow t_-} \min \left\{ \text{dist}(y(t), \mathbb{R}^n \setminus G), \frac{1}{|y(t)| + 1} \right\} = 0. \quad (618)$$

Hierbei verwenden wir die Konvention  $\text{dist}(v, \emptyset) = \infty$  für alle  $v \in \mathbb{R}^n$ .

**Beweis.** Es sei  $I = (a, b)$  für  $-\infty \leq a < b \leq \infty$ , und seien  $\hat{I} = (t_-, t_+)$  ( $t_- < t_0 < t_+$ ) wie in der Aussage und  $y \in C^1(\hat{I}; G)$  die maximale Lösung des gegebenen Anfangswertproblems. Wir zeigen nun, dass einer der Fälle in (617) zutreffen muss. Dieselbe Aussage für (618) zeigt man analog. Angenommen keiner der beiden Fälle in Gleichung (617) trifft zu. Dann gilt insbesondere  $t_+ < b$ . Wähle nun ein  $\delta > 0$  so, dass  $t_- < t_0 - \delta$ . Definiere  $h : [t_0 - \delta, t_+] \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $h(t) := \min \left\{ \text{dist}(y(t); \mathbb{R}^n \setminus G), \frac{1}{|y(t)| + 1} \right\}$ . Laut unserer Annahme ist dann  $\liminf_{t \uparrow t_+} h(t) > 0$ .

**Zwischenbehauptung.** Es gibt ein  $\varepsilon \in (0, 1)$  so, dass  $h(t) \geq \varepsilon$  für alle  $t \in [t_0 - \delta, t_+)$ . Dazu: Definiert man  $c := \liminf_{t \uparrow t_+} h(t)$  so gibt es ein  $\theta \in (0, \delta)$  mit  $h(t) \geq \frac{\varepsilon}{2}$  für alle  $t \in [t_+ - \theta, t_+)$ . Mithilfe von Übungsaufgabe 4 auf Blatt 10 sieht man:  $h$  ist (als Komposition stetiger Funktionen) stetig. Nach dem Satz von Weierstraß gibt es dann ein  $\tau \in [t_0 - \delta, t_+ - \theta]$  so, dass

$$\min_{t \in [t_0 - \delta, t_+ - \theta]} h(t) = h(\tau) > 0, \quad (619)$$

wobei wir bei der letzten Ungleichung  $h(t) > 0$  für alle  $t$  benutzt haben (siehe Blatt 8, Aufgabe 9c). Wir folgern

$$f(t) \geq \min\{f(\tau), \frac{c}{2}, \frac{1}{2}\} =: \varepsilon \quad \forall t \in [t_0 - \delta, t_+]. \quad (620)$$

**Ende der Zwischenbehauptung.** Das bedeutet nun, dass

$$\text{dist}(y(t), \mathbb{R}^n \setminus G) \geq \varepsilon, \quad \frac{1}{|y(t)| + 1} \geq \varepsilon \quad \forall t \in [t_0 - \delta, t_+]. \quad (621)$$

Beachte, dass

$$\frac{1}{|y(t)| + 1} \geq \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |y(t)| \leq \frac{1}{\varepsilon} - 1. \quad (622)$$

Definiere nun die offene beschränkte Menge

$$O_\varepsilon := \{z \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(z, \mathbb{R}^n \setminus G) > \frac{1}{2}\varepsilon, |z| < \frac{1}{\varepsilon}\} \subset G. \quad (623)$$

(Beachte: Dass  $O_\varepsilon \subset G$  folgt aus der Tatsache, dass  $\text{dist}(z, \mathbb{R}^n \setminus G) > 0$  impliziert, dass  $z \in G$ ) Aus (621) folgt, dass  $y(t) \in O_\varepsilon$  für alle  $t \in [t_0 - \delta, t_+]$ . Beachte nun auch, dass  $\overline{O_\varepsilon}$  eine kompakte Teilmenge von  $G$  ist. In der Tat: Da  $O_\varepsilon$  beschränkt ist, ist  $\overline{O_\varepsilon}$  sicher kompakt und ferner gilt

$$\overline{O_\varepsilon} \subset \{z \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(z, \mathbb{R}^n \setminus G) \geq \frac{1}{2}\varepsilon, |z| \leq \frac{1}{\varepsilon}\} \subset G. \quad (624)$$

Wähle nun  $t^* \in (t_+, b)$  beliebig und definiere  $A := [t_0 - \delta, t^*] \subset I$ . Nach Proposition 83 gibt es ein  $L^* > 0$  so, dass

$$|f(\tau, z_1) - f(\tau, z_2)| \leq L^*|z_1 - z_2| \quad \forall \tau \in A \quad \forall z_1, z_2 \in \overline{O_\varepsilon}.$$

Insbesondere erfüllt  $f$  dann eine globale Lipschitzbedingung auf  $(t_0 - \delta, t^*) \times O_\varepsilon$ . Nach dem Satz von Kirszbraun-Valentine (Satz 84) gibt es dann auch ein  $F \in C^0((t_0 - \delta, t^*) \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$  so, dass  $F$  auf  $(t_0 - \delta, t^*) \times \mathbb{R}^n$  einer globalen Lipschitzbedingung genügt und  $F|_{(t_0 - \delta, t^*) \times O_\varepsilon} = f|_{(t_0 - \delta, t^*) \times O_\varepsilon}$ . Nach dem globalen Satz von Picard-Lindelöf hat

$$\begin{cases} z'(t) = F(t, z(t)) & t \in (t_0 - \delta, t^*) \\ z(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (625)$$

eine eindeutige Lösung  $z \in C^1((t_0 - \delta, t^*))$ .

**Behauptung.**  $z|_{(t_0 - \delta, t_+)} = y$ . Dazu genügt es zu zeigen, dass  $y$  auf  $(t_0 - \delta, t_+)$  dasselbe Anfangswertproblem löst. Dazu beachte, dass  $y(t_0) = y_0$  und für alle  $t \in (t_0 - \delta, t_+)$

$$y'(t) = f(t, y(t)) \stackrel{y(t) \in O_\varepsilon \text{ (nach (621))}}{=} F(t, y(t)). \quad (626)$$

**Ende der Behauptung.**

Nun betrachte die Menge  $U := z^{-1}(O_\varepsilon)$ . Diese ist offen, da sie das Urbild einer offenen Menge unter einer stetigen Funktion ist.



**Behauptung.** Es gibt ein  $s \in (t_+, t^*)$  mit  $(t_0 - \delta, s) \subset U$ . Dass  $(t_0 - \delta, t_+) \subset U$  folgt daraus, dass für alle  $t \in (t_0 - \delta, t_+)$  gilt  $z(t) = y(t) \in O_\varepsilon$ . Nun gilt ferner  $t_+ \in O_\varepsilon$ , denn  $z(t_+) = \lim_{n \rightarrow \infty} z(t_+ - \frac{1}{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} y(t_+ - \frac{1}{n})$  und daher

$$\text{dist}(z(t_+), \mathbb{R}^n \setminus G) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(y(t_+ - \frac{1}{n}), \mathbb{R}^n \setminus G) \stackrel{(621)}{\geq} \varepsilon > \frac{1}{2}\varepsilon \quad (627)$$

sowie

$$|z(t_+)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |y(t_+ - \frac{1}{n})| \stackrel{(621)}{\leq} \frac{1}{\varepsilon} - 1 < \frac{1}{\varepsilon}. \quad (628)$$

Somit ist also  $(t_0 - \delta, t_+] \in U$ . Da  $U$  aber offen ist muss  $U$  auch eine offene Umgebung von  $t_+$  enthalten, woraus die Existenz von  $s > t_+$  wie in der Behauptung folgt. **Ende der Behauptung.** Nun setze

$$\tilde{y}(t) := \begin{cases} y(t) & t \in (t_-, t_0] \\ z(t) & t \in (t_0, s). \end{cases} \quad (629)$$

**Behauptung.**  $\tilde{y} \in C^1((t_-, s); \mathbb{R}^n)$  löst das AWP auf  $(t_-, s)$ . Dass  $\tilde{y}$  stetig differenzierbar ist folgt direkt daraus, dass  $y$  und  $z$  auf  $(t_0 - \delta, t_+)$  übereinstimmen. Sicherlich gilt auch  $\tilde{y}(t_0) = y_0$ . Ferner haben wir, dass für  $t \in (t_0, s)$  gilt, dass

$$z'(t) = F(t, z(t)) \stackrel{(t_0, s) \subset z^{-1}(O_\varepsilon)}{=} f(t, z(t)). \quad (630)$$

Dies beweist die Behauptung. Nun folgt aus der Maximalität von  $y$  dass  $(t_-, s) \subset (t_-, t_+)$  sein muss. Ein Widerspruch, da  $s > t_+$ .

**Beispiel 109.** Betrachte das AWP

$$\begin{cases} y'(t) = 1 + y(t)^2 \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad (631)$$

Beachte, dass die Funktion  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(\tau, z) = 1 + z^2$  eine lokale Lipschitzbedingung erfüllt (da sie stetig diffbar ist). Man rechnet leicht (z.B. mit Separation der Variablen) nach, dass  $y \in C^1((-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}); \mathbb{R}^2)$  gegeben durch  $y(t) := \tan(t)$  eine Lösung ist. Diese Lösung ist nicht fortsetzbar, da sie für  $t \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}$  unbeschränkt wird. Daher muss es sich um die maximale Lösung handeln, siehe Anmerkung 104. Es gilt nun

$$\lim_{t \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}} y(t) = \pm \infty. \quad (632)$$

Somit tritt an beiden Intervallgrenzen von  $\hat{I} := (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  eine Blow-Up-Situation auf.

**Beispiel 110.** Betrachte das AWP

$$\begin{cases} y_1'(t) = -y_1(t)^3 + y_1(t)y_2(t)^2 \cosh(y_2(t)) \\ y_2'(t) = -y_2(t) - y_1(t)^2 y_2(t) \cosh(y_2(t)) \\ (y_1(0), y_2(0))^T = (1, 1)^T \end{cases} \quad (633)$$

BEHAUPTUNG. Das AWP besitzt eine eindeutige maximale Lösung, definiert auf einem Intervall  $\hat{I} \supset [0, \infty)$ .

BEGRÜNDUNG. Die Existenz einer eindeutigen maximalen Lösung  $y \in C^1(\hat{I}; \mathbb{R}^2)$ , ( $\hat{I} \subset \mathbb{R}, 0 \in \hat{I}$ ) folgt aus der Tatsache, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(\tau, z) := \begin{pmatrix} -z_1^3 + z_1 z_2^2 \cosh(z_2) \\ -z_2 - z_1^2 z_2 \cosh(z_2) \end{pmatrix} \quad (634)$$

eine lokale Lipschitzbedingung erfüllt (da sie stetig differenzierbar ist). Insbesondere ist  $G = \mathbb{R}^2$ . Sei nun  $\hat{I} = (t_-, t_+)$ .  $\mathbb{Z} : t_+ = \infty$ . Angenommen  $t_+ < \infty$ . Dann gilt nach Satz 106, dass

$$\liminf_{t \uparrow t_+} \frac{1}{|y(t)| + 1} = \liminf_{t \uparrow t_+} \min \left\{ \text{dist}(y(t), \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}^2), \frac{1}{|y(t)| + 1} \right\} = 0, \quad (635)$$

d.h.

$$\limsup_{t \uparrow t_+} |y(t)| = \infty. \quad (636)$$

Wir berechnen nun

$$\frac{d}{dt} |y(t)|^2 = \frac{d}{dt} (y_1(t)^2 + y_2(t)^2) = 2y_1(t)y_1'(t) + 2y_2(t)y_2'(t) \quad (637)$$

$$= 2y_1(t)(-y_1(t)^3 + y_1(t)y_2(t)^2 \cosh(y_2(t))) + 2y_2(t)(-y_2(t) - y_1(t)^2 y_2(t) \cosh(y_2(t))) \quad (638)$$

$$= -2y_1(t)^4 + 2y_1(t)^2 y_2(t)^2 \cosh(y_2(t)) - 2y_2(t)^2 - 2y_1(t)^2 y_2(t)^2 \cosh(y_2(t)) \quad (639)$$

$$= -2y_1(t)^4 - 2y_2(t)^2 \leq 0. \quad (640)$$

Damit ist  $t \mapsto |y(t)|^2$  monoton fallend und daher  $|y(t)|^2 \leq |y(0)|^2 = 1^2 + 1^2 = 2$  für alle  $t \geq 0$ . Dies widerspricht aber (636). Unsere Annahme ist also falsch und wir erhalten  $t_+ = \infty$ .

### 2.2.3 Das Lemma von Gronwall

Im Folgenden sehen wir ein wichtiges Tool, welches benutzt werden kann um das *Wachstum* von Lösungen zu verstehen. Dies ist ein wichtiges Anliegen: Können wir das Wachstum von Lösungen beschränken, so können wir Blow-Up Situationen ausschließen.

**Lemma 111. LEMMA VON GRONWALL.** Es seien  $u_0, t_0, T \in \mathbb{R}$ ,  $t_0 < T$  und  $u, v \in C^0([t_0, T]; \mathbb{R})$  zwei Funktionen mit  $v(\tau) \geq 0$  für alle  $\tau \in [t_0, T]$  und

$$u(t) \leq u_0 + \int_{t_0}^t u(s)v(s) \, ds \quad \forall t \in [t_0, T]. \quad (641)$$

Dann folgt, dass

$$u(t) \leq u_0 \exp\left(\int_{t_0}^t v(s) \, ds\right) \quad \forall t \in [t_0, T]. \quad (642)$$

Dieselbe Aussage gilt auch, wenn man  $[t_0, T]$  durch  $[t_0, \infty)$  ersetzt. In diesem Fall ist dann sogar  $T = \infty$  zugelassen.

**Beweis.** Es sei  $\varepsilon > 0$ . Definiere  $h_\varepsilon : [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  (bzw.  $[t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ) durch

$$h_\varepsilon(t) := (u_0 + \varepsilon) \exp\left(\int_{t_0}^t v(s) \, ds\right). \quad (643)$$

Man rechnet leicht nach, dass  $h'_\varepsilon(t) = h_\varepsilon(t)v(t)$  für alle  $t$ . Daher gilt

$$h_\varepsilon(t) = h_\varepsilon(t_0) + \int_{t_0}^t h'_\varepsilon(s) \, ds = u_0 + \varepsilon + \int_{t_0}^t h_\varepsilon(s)v(s) \, ds. \quad (644)$$

Definiere

$$S := \sup\{t \in [t_0, T] \text{ (bzw. } [t_0, \infty)) : u(\tau) \leq h_\varepsilon(\tau) \, \forall \tau \in [t_0, t]\}. \quad (645)$$

Beachte, dass  $S > t_0$ , da  $u, h_\varepsilon$  stetig sind und

$$u(t_0) \stackrel{(641)}{\leq} u_0 + \int_{t_0}^{t_0} u(s)v(s) \, ds = u_0 < u_0 + \varepsilon \stackrel{(643)}{\leq} h_\varepsilon(t_0). \quad \text{D.h. } u(t_0) < h_\varepsilon(t_0). \quad (646)$$

Wir zeigen, dass  $S = T$ . Dazu: Angenommen  $S < T$ . Dann gilt  $u(S) = h_\varepsilon(S)$  und  $u(s) \leq h_\varepsilon(s)$  für alle  $s \in [t_0, S]$ . Wir berechnen damit

$$u(S) \stackrel{(641)}{\leq} u_0 + \int_{t_0}^S \underbrace{u(s)}_{\leq h_\varepsilon(s)} v(s) \, ds \leq u_0 + \int_{t_0}^S h_\varepsilon(s)v(s) \, ds \quad (647)$$

$$\leq u_0 + \varepsilon + \int_{t_0}^S h_\varepsilon(s)v(s) \, ds - \varepsilon \stackrel{(644)}{=} h_\varepsilon(S) - \varepsilon = u(S) - \varepsilon. \quad (648)$$

Ein Widerspruch. Wir folgern also  $S = T$ . Das bedeutet für alle  $t \in [t_0, T]$  (bzw.  $[t_0, \infty)$ )

$$u(t) \leq h_\varepsilon(t) = (u_0 + \varepsilon) \exp\left(\int_{t_0}^t v(s) \, ds\right). \quad (649)$$

Lässt man  $\varepsilon \rightarrow 0+$  folgert man

$$u(t) \leq u_0 \exp \left( \int_{t_0}^t v(s) \, ds \right) \quad \forall t \in [t_0, T] \quad (\text{bzw. } t \in [t_0, T)). \quad (650)$$

**Korollar 112.** LINEARE DIFFERENTIALUNGLEICHUNGEN. Es seien  $a, b \in C^0(I; \mathbb{R})$  mit  $a(t) \geq 0$  für alle  $t \in I$ . Seien  $t_0 \in I, y_0 \in \mathbb{R}$ . Es erfülle  $z \in C^1(I; \mathbb{R})$

$$\begin{cases} z'(t) \leq a(t)z(t) + b(t) & (\forall t \in I, t \geq t_0) \\ z(t_0) \leq y_0 \end{cases} \quad (651)$$

Es sei ferner  $y \in C^1(I; \mathbb{R})$  die (nach Satz 20 und Anmerkung 21 existente und eindeutige) Lösung von

$$\begin{cases} y'(t) = a(t)y(t) + b(t) & (t \in I) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (652)$$

Dann gilt  $z(t) \leq y(t)$  für alle  $t \in I$  mit  $t \geq t_0$ .

**Beweis.** Es sei  $I = (\alpha, \beta)$ . Beachte, dass

$$(z - y)'(t) = z'(t) - y'(t) \stackrel{(651)}{\leq} a(t)z(t) + b(t) - y'(t) \quad (653)$$

$$\stackrel{(652)}{=} a(t)z(t) + b(t) - (a(t)y(t) + b(t)) = a(t)(z - y)(t). \quad (654)$$

Wir erhalten

$$(z - y)(t) = (z - y)(t_0) + \int_{t_0}^t (z - y)'(s) \, ds \leq (z(t_0) - y(t_0)) + \int_{t_0}^t a(s)(z - y)(s) \, ds \quad (655)$$

$$\leq 0 + \int_{t_0}^t a(s)(z - y)(s) \, ds. \quad (656)$$

Verwenden wir nun das Lemma von Gronwall (Lemma 111) mit  $u_0 = 0, T = \beta, u = (z - y)$  und  $v = a$  so folgern wir

$$(z - y)(t) \leq 0 \cdot \exp \left( \int_{t_0}^t a(s) \, ds \right) = 0 \quad \forall t \in [t_0, \beta). \quad (657)$$

Man folgert  $z(t) \leq y(t)$  für alle  $t \in [t_0, \beta)$ .

**Anmerkung 113.** Setzt man die Lösungsformel von Satz 20/ Anmerkung 21 ein, so kann man (mit der Notation von Korollar 112) die Ungleichung “ $z(t) \leq y(t)$ ” noch expliziter ausdrücken. Man folgert: Sind  $a, b \in C^0(I; \mathbb{R})$  mit  $a(t) \geq 0$  für alle  $t \in I$  und ist

$$z \in C^1(I; \mathbb{R}^2) \text{ so, dass } \begin{cases} z'(t) \leq a(t)z(t) + b(t) & (t \in I) \\ z(t_0) \leq y_0 \end{cases} \quad (658)$$

Dann folgt für alle  $t \in I, t \geq t_0$ , dass

$$z(t) \leq e(t) \left( y_0 + \int_{t_0}^t \frac{b(s)}{e(s)} ds \right) \quad \text{wobei } e(t) := \exp \left( \int_{t_0}^t a(s) ds \right). \quad (659)$$

Wir haben also eine Möglichkeit gefunden um das Wachstum von Lösungen zu beschränken.

**Beispiel 114.** Betrachte das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_2(t) + ty_2(t)^3 y_1(t)^2 \\ y_2'(t) = y_1(t) - ty_2(t)^2 y_1(t)^3 \\ (y_1(0), y_2(0))^T = (1, 2)^T \end{cases} \quad (660)$$

Da  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(\tau, z) := \begin{pmatrix} z_2 + \tau z_2^3 z_1^2 \\ z_1 - \tau z_2^2 z_1^3 \end{pmatrix}$  eine lokale Lipschitzbedingung erfüllt existiert eine eindeutige maximale Lösung auf einem offenen Intervall  $\hat{I} \subset \mathbb{R}$  mit  $0 \in \hat{I}$ . BEHAUPTUNG:  $\hat{I} \supset [0, \infty)$ . Angenommen  $\hat{I} = (t_-, t_+)$  für ein  $t_+ < \infty$ . Dann gilt nach Satz 106 (mit  $G = \mathbb{R}^2$ ), dass eine *Blow-Up-Situation* auftreten muss, d.h.

$$\limsup_{t \uparrow t_+} |y(t)| = \infty. \quad (661)$$

Wir berechnen nun

$$\frac{d}{dt} |y(t)|^2 = \frac{d}{dt} (y_1(t)^2 + y_2(t)^2) = 2y_1(t)y_1'(t) + 2y_2(t)y_2'(t) \quad (662)$$

$$= 2y_1(t)(y_2(t) + ty_2(t)^3 y_1(t)^2) + 2y_2(t)(y_1(t) - ty_2(t)^2 y_1(t)^3) \quad (663)$$

$$= 2y_1(t)y_2(t) + 2ty_2(t)^3 y_1(t)^3 + 2y_2(t)y_1(t) - 2ty_2(t)^3 y_1(t)^3 \quad (664)$$

$$= 4y_1(t)y_2(t) \leq 4 \left( \frac{1}{2} y_1(t)^2 + \frac{1}{2} y_2(t)^2 \right) = 2|y(t)|^2, \quad (665)$$

wobei wir im vorletzten Schritt die elementare Ungleichung  $x_1 x_2 \leq \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^2$  für alle  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  verwendet haben. Somit erfüllt  $z(t) := |y(t)|^2$  die Differentialungleichung

$$\begin{cases} z'(t) \leq 2z(t) & (t \in \hat{I}) \\ z(0) \leq 5 \end{cases} \quad (666)$$

(wobei der Anfangswert durch  $z(0) = |y(0)|^2 = |(1, 2)|^2 = 1^2 + 2^2 = 5$  begründet ist). Mit Korollar 112 und (659) gilt

$$z(t) \leq e(t) \cdot (5 + 0) \quad \text{wobei } e(t) = \exp\left(\int_0^t 2 \, ds\right) = e^{2t}. \quad (667)$$

Das bedeutet  $z(t) = |y(t)|^2 \leq 5e^{2t}$  für alle  $t \in [t_0, t_+)$ , d.h. insbesondere  $|y(t)| \leq \sqrt{5}e^t$ . Nun gilt aber (zusammen mit (661))

$$\infty = \limsup_{t \uparrow t_+} |y(t)| \leq \limsup_{t \uparrow t_+} \sqrt{5}e^t = \sqrt{5}e^{t_+} < \infty \quad \text{weil } t_+ < \infty. \quad (668)$$

Ein Widerspruch.

## 2.2.4 Ein Globalitätskriterium

**Wdh. Satz 108. GLOBALITÄT ÜBER LINEARES WACHSTUM.** Es erfülle  $f \in C^0(I \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$  (d.h.  $G = \mathbb{R}^n$ ) eine lokale Lipschitzbedingung und es gebe ein  $c \in C^0(I; \mathbb{R})$  mit  $c(t) \geq 0$  für alle  $t \in I$  so, dass

$$|f(\tau, z)| \leq c(\tau)(1 + |z|) \quad \forall \tau \in I, z \in \mathbb{R}^n. \quad (669)$$

Dann ist für alle  $t_0 \in I$  und  $y_0 \in \mathbb{R}^n$  die maximale Lösung  $y \in C^1(\hat{I}; \mathbb{R}^n)$  von

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (670)$$

eine globale Lösung, d.h.  $\hat{I} = I$ .

**Beweis.** Es sei  $I = (a, b)$  und  $\hat{I} = (t_-, t_+)$ . Angenommen  $t_+ < b$ . Dann gilt nach dem Maximalitätsdetektor (mit  $G = \mathbb{R}^n$ ), dass  $\limsup_{t \uparrow t_+} |y(t)| = \infty$ . Nun gilt auch für alle  $t \in [t_0, t_+)$

$$|y(t)| = |y(t) - y(t_0) + y_0| \leq |y(t) - y(t_0)| + |y_0| = \left| \int_{t_0}^t y'(s) \, ds \right| \quad (671)$$

$$= |y_0| + \int_{t_0}^t |f(s, y(s))| \, ds \stackrel{(669)}{\leq} |y_0| + \int_{t_0}^t c(s)(1 + |y(s)|) \, ds \quad (672)$$

$$= |y_0| + \int_{t_0}^t c(s) \, ds + \int_{t_0}^t |y(s)|c(s) \, ds \leq |y_0| + \int_{t_0}^{t_+} c(s) \, ds + \int_{t_0}^t |y(s)|c(s) \, ds. \quad (673)$$

Daher lässt sich das Lemma von Gronwall (Lemma 111) anwenden mit  $u_0 := |y_0| + \int_{t_0}^{t_+} c(s) \, ds$ ,  $T := t_+$ ,  $v(s) := c(s)$  und  $u(s) := |y(s)|$ . (Beachte, dass  $u_0 \in \mathbb{R}$  weil  $c$  auf dem

kompakten Intervall  $[t_0, t_+] \subset I$  beschränkt und somit integrierbar ist). Wir erhalten

$$|y(t)| \leq \left( |y_0| + \int_{t_0}^{t_+} c(s) \, ds \right) \exp \left( \int_{t_0}^t c(s) \, ds \right) \quad \forall t \in [t_0, t_+]. \quad (674)$$

Betrachten wir  $\limsup_{t \uparrow t_+}$  so erhalten wir den Widerspruch

$$\infty = \limsup_{t \uparrow t_+} |y(t)| \stackrel{(674)}{\leq} \left( |y_0| + \int_{t_0}^{t_+} c(s) \, ds \right) \exp \left( \int_{t_0}^{t_+} c(s) \, ds \right) < \infty. \quad (675)$$

Dies zeigt  $t_+ = b$ . Um zu zeigen, dass auch  $t_- = a$  genügt es zu beobachten (siehe Blatt 11 Aufgabe 4), dass  $z : (-t_+, -t_-) \rightarrow \mathbb{R}^n$ , gegeben durch  $z(t) := y(-t)$  maximale Lösung ist von

$$\begin{cases} z'(t) = \tilde{f}(t, z(t)) \\ z(-t_0) = y_0 \end{cases} \quad (676)$$

mit  $\tilde{f} : (-b, -a) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\tilde{f}(\tau, z) := -f(-\tau, z)$  ist. Die Funktion  $\tilde{f} \in C^0((-b, -a) \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$  erfüllt nun auch Wachstumsabschätzung (669) (mit  $\tilde{c}(s) := c(-s)$ ). In der Tat:

$$|\tilde{f}(\tau, z)| = |-f(-\tau, z)| = |f(-\tau, z)| \leq c(-\tau)(1 + |z|) \quad \forall \tau \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}^n. \quad (677)$$

Mit der vorhin bewiesenen Rechtsglobalität der maximalen Lösung schließen wir dann  $-t_- = -a$ , d.h.  $t_- = a$ .

**Beispiel 115.** Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) = t^2 + t\sqrt{1 + y(t)^2} \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (678)$$

Die Funktion  $f \in C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$  gegeben durch  $f(\tau, z) := \tau^2 + \tau\sqrt{1 + z^2}$  erfüllt keine globale Lipschitzbedingung. Denn würde  $f$  eine globale Lipschitzbedingung erfüllen, so wäre für ein  $L > 0$

$$L = L|1 - 0| \geq |f(\tau, 1) - f(\tau, 0)| = (\sqrt{2} - 1)|\tau| \quad \forall \tau \in \mathbb{R}. \quad (679)$$

Ein Widerspruch. Wir behaupten, dass trotzdem auf  $\hat{I} = \mathbb{R}$  eine globale maximale Lösung existiert. Dazu benutzen wir, dass  $\sqrt{1 + z^2} \leq 1 + |z|$ , wie man leicht durch Quadrieren sieht, denn  $1 + z^2 \leq 1 + 2|z| + z^2 \leq (1 + |z|)^2$ . Somit gilt

$$|f(\tau, z)| \leq |\tau|^2 + |\tau|\sqrt{1 + z^2} \leq |\tau|^2 + |\tau|(1 + |z|) \quad (680)$$

$$\leq |\tau|^2(1 + |z|) + |\tau|(1 + |z|) = (|\tau|^2 + |\tau|)(1 + |z|) = c(\tau)(1 + |z|), \quad (681)$$

wobei  $c \in C^0(\mathbb{R}; \mathbb{R})$  mit  $c(\tau) := |\tau| + |\tau|^2$ . Damit sind die Voraussetzungen von Satz 108 erfüllt und wir folgern die Behauptung.

**Beispiel 116.** Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) = t^2 + t \log(1 + y(t)^2) \\ y(0) = 1 \end{cases}, \quad (682)$$

d.h.  $f \in C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$  mit  $f(\tau, z) = \tau^2 + \tau \log(1 + z^2)$ , (welche offensichtlich eine lokale Lipschitzbedingung erfüllt). Wieder behaupten wir, dass  $\hat{I} = \mathbb{R}$ . Wir verwenden die *Bernoulli'sche Ungleichung*  $\log(w) \leq w - 1$  für alle  $w > 0$ . Mit dieser schätzen wir ab

$$0 \leq \log(1+z^2) = 2 \cdot \frac{1}{2} \log(1+z^2) = 2 \log \sqrt{1+z^2} \leq 2(\sqrt{1+z^2}-1) \leq 2\sqrt{1+z^2} \leq 2(1+|z|). \quad (683)$$

Somit gilt

$$|f(\tau, z)| \leq |\tau|^2 + |\tau| |\log(1+z^2)| \leq |\tau|^2 + 2|\tau|(1+|z|) \leq (|\tau|^2 + 2|\tau|)(1+|z|). \quad (684)$$

Mit  $c(\tau) := |\tau|^2 + 2|\tau|$  sind dann wieder die Voraussetzungen von Satz 108 erfüllt und es folgt  $\hat{I} = \mathbb{R}$ .

## 2.3 Lineare Differentialgleichungen - Teil 2

In diesen Abschnitt wenden wir die Erkenntnisse dieses Kapitels auf lineare Differentialgleichungen (mit nicht zwingend konstanten Koeffizienten) an

**DGL-Typ 117.** Es sei  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ . Ein lineares homogenes DGL-System ist von der Form

$$y'(t) = A(t)y(t) \quad (t \in I) \quad (685)$$

wobei  $A \in C^0(I; \mathbb{K}^{n \times n})$  ist. Gesucht werden Lösungen  $y \in C^1(I; \mathbb{K}^n)$ .

Eine Erinnerung wir bezeichnen die *allgemeine Lösung* einer solchen DGL mit

$$\mathbb{L} := \{y \in C^1(I; \mathbb{K}^n) : y'(t) = A(t)y(t) \forall t \in I\}. \quad (686)$$

**Anmerkung 118.** Im Folgenden werden wir alle in Kapitel 2 bisher besprochenen Sätze (ausgenommen Sektion 2.2.3) auch für Systeme in  $\mathbb{C}^n$  verwenden (obwohl wir sie nur für  $\mathbb{R}^n$  bewiesen haben). Man kann sich leicht klarmachen, dass man mit der Identifikation  $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$  alle in diesem Kapitel bewiesenen Resultate auf  $\mathbb{C}^n$  übertragen kann.

**Proposition 119.** Es sei  $A \in C^0(I; \mathbb{K}^{n \times n})$ . Dann hat für alle  $t_0 \in I$  und  $y_0 \in \mathbb{K}^n$  das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) = A(t)y(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (687)$$



eine eindeutige globale Lösung  $y \in C^0(I; \mathbb{K}^n)$ , d.h.  $\hat{I} = I$ .

**Beweis.** Die Funktion  $f : I \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$  definiert durch  $f(\tau, z) := A(\tau)z$  erfüllt nach Proposition 82 sicherlich eine lokale Lipschitzbedingung. Somit gibt es eine eindeutige maximale Lösung. Die Globalität zeigen wir mit Satz 108. Hierfür verwenden wir die *Cauchy-Schwarz-Ungleichung*, d.h. für alle  $v, w \in \mathbb{K}^n$  gilt

$$|\langle v, w \rangle|^2 \leq |v|^2 |w|^2, \quad \text{d.h.} \quad \left| \sum_{j=1}^n v_j \overline{w_j} \right|^2 \leq \left( \sum_{j=1}^n |v_j|^2 \right) \left( \sum_{k=1}^n |w_k|^2 \right). \quad (688)$$

Wir schreiben nun  $A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j=1,\dots,n}$  mit  $a_{ij} \in C^0(I; \mathbb{K})$  und  $z = (z_1, \dots, z_n)^T$  und berechnen die  $i$ -te Komponente

$$f_i(\tau, z) = (A(\tau)z)_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(\tau) z_j. \quad (689)$$

Dazu berechnen wir für  $\tau \in I$  und  $z \in \mathbb{K}^n$

$$|f(\tau, z)| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |f_i(\tau, z)|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{ij}(\tau) z_j \right|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{ij}(\tau) \overline{z_j} \right|^2} \quad (690)$$

$$\stackrel{(688)}{\leq} \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n |a_{ij}(\tau)|^2 \right) \left( \sum_{k=1}^n |\overline{z_k}|^2 \right)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n |a_{ij}(\tau)|^2 \right) \left( \sum_{k=1}^n |z_k|^2 \right)} \quad (691)$$

$$= \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}(\tau)|^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n |z_k|^2} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}(\tau)|^2} |z| \leq \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}(\tau)|^2} (1 + |z|). \quad (692)$$

Mit  $c(\tau) := \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}(\tau)|^2}$  ist Satz 108 anwendbar und die Globalität der maximalen Lösung folgt.

**Satz 120. DIE FUNDAMENTALMATRIX.** Es sei  $A \in C^0(I; \mathbb{K}^{n \times n})$  und sei die DGL  $y'(t) = A(t)y(t)$ , ( $t \in I$ ) gegeben. Dann gibt es eine Abbildung  $M \in C^1(I; \mathbb{K}^{n \times n})$  so, dass  $M(t)$  invertierbar für alle  $t \in I$  und

$$\mathbb{L} = \{y \in C^1(I; \mathbb{K}^n) : y(t) = M(t)c \text{ für ein } c \in \mathbb{K}^n\}. \quad (693)$$

**Beweis.** Wähle  $t_0 \in I$  beliebig. Es seien  $e_1, \dots, e_n$  die kanonischen Einheitsvektoren in  $\mathbb{K}^n$ . Es sei  $y_i \in C^1(I; \mathbb{K}^n)$  die eindeutige Lösung zu

$$\begin{cases} y_i'(t) = A(t)y_i(t) & (t \in I) \\ y_i(t_0) = e_i \end{cases}. \quad (694)$$

(Diese Lösung  $y_i$  existiert nach Proposition 119 auf ganz  $I$ ).

**Zwischenbehauptung.** Für alle  $t_1 \in I$  ist  $\{y_1(t_1), \dots, y_n(t_1)\} \subset \mathbb{K}^n$  linear unabhängig. Dazu: Seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$  mit

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i(t_1) = 0 \quad (695)$$

**ZZ:**  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ . Definiere  $z : I \rightarrow \mathbb{K}^n$  durch  $z(t) := \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i(t)$ . Dann gilt  $z \in C^1(I; \mathbb{K}^n)$ ,  $z(t_1) = 0$  und

$$z'(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i'(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i A(t)y_i(t) = A(t) \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i(t) \right) = A(t)z(t). \quad (696)$$

Das bedeutet, dass  $z$  die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} z'(t) = A(t)z(t) \\ z(t_1) = 0 \end{cases} \quad (697)$$

ist. Jedoch ist auch  $\tilde{z} : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ ,  $\tilde{z}(t) := 0$  eine Lösung des Anfangswertproblems in (697), wie man leicht nachrechnet. Aus der Eindeutigkeit folgt also  $z \equiv 0$  und somit auch

$$0 = z(t_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i(t_0) \stackrel{(694)}{=} \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T. \quad (698)$$

Wir folgern  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ , was zu beweisen war. **Ende der Zwischenbehauptung.** Definiere nun für  $t \in I$

$$M(t) := (y_1(t) | \dots | y_n(t)) \in \mathbb{K}^{n \times n}. \quad (699)$$

Da nach der Zwischenbehauptung die Spalten  $\{y_1(t), \dots, y_n(t)\}$  linear unabhängig sind, ist die Matrix  $M(t)$  invertierbar (denn sie hat ja dann vollen Rang). Wir zeigen nun, dass jede Lösung  $y \in \mathbb{L}$  von der Gestalt  $y(t) := M(t)c$  ist. Es sei dazu  $y \in \mathbb{L}$  eine Lösung. Definiere  $c := y(t_0)$ . Das bedeutet  $y$  löst

$$\begin{cases} y'(t) = A(t)y(t) & (t \in I) \\ y(t_0) = c \end{cases}. \quad (700)$$

Wir zeigen:  $y(t) = M(t)c$  für alle  $t \in I$ . Definiere dazu  $\tilde{y}(t) := M(t)c$ . Es gilt

$$\tilde{y}(t) = M(t)c = M(t) \left( \sum_{i=1}^n c_i e_i \right) = \sum_{i=1}^n c_i (M(t)e_i) = \sum_{i=1}^n c_i y_i(t), \quad (701)$$

(da  $M(t)e_i = i$ -te Spalte von  $M(t) = y_i(t)$ ). Nun gilt  $\tilde{y}(t_0) = \sum_{i=1}^n c_i y_i(t_0) = \sum_{i=1}^n c_i e_i = c$  und

$$\tilde{y}'(t) = \sum_{i=1}^n c_i y_i'(t) = \sum_{i=1}^n c_i A(t) y_i(t) = A(t) \left( \sum_{i=1}^n c_i y_i(t) \right) = A(t) \tilde{y}(t). \quad (702)$$

Das bedeutet also

$$\begin{cases} \tilde{y}'(t) = A(t)\tilde{y}(t) & (t \in I) \\ \tilde{y}(t_0) = c \end{cases}. \quad (703)$$

Dies und (700) zeigen, dass  $y$  und  $\tilde{y}$  dasselbe AWP lösen. Eindeutigkeit (s. 119) impliziert  $y(t) = \tilde{y}(t) = M(t)c$ . Damit ist gezeigt, dass  $\mathbb{L} \subset \{y \in C^1(I; \mathbb{K}^n) : y(t) = M(t)c \text{ für ein } c \in \mathbb{K}^n\}$ . Die andere Inklusion überlassen wir den Lesenden als Übungsaufgabe.

Eine Abbildung  $M$  wie aus dem vorigen Satz werden wir *Fundamentalmatrix* nennen.

**Definition 121.** Es sei  $A \in C^0(I; \mathbb{K}^{n \times n})$  und sei die DGL  $y'(t) = A(t)y(t)$ , ( $t \in I$ ) gegeben. Eine Abbildung  $M \in C^1(I; \mathbb{K}^{n \times n})$  heißt *Fundamentalmatrix*, falls

- $M(t)$  invertierbar für alle  $t \in I$
- $\mathbb{L} = \{y \in C^1(I; \mathbb{K}^n) : y(t) = M(t)c \text{ für ein } c \in \mathbb{K}^n\}$ .

**Korollar 122.** Es sei für  $A \in C^0(I; \mathbb{K}^{n \times n})$  die DGL  $y'(t) = A(t)y(t)$ , ( $t \in I$ ) gegeben. Dann ist  $\mathbb{L}$  ein  $\mathbb{K}$ -linearer Unterraum von  $C^1(I; \mathbb{K}^n)$  der Dimension  $n$ .

**Beweis.** Dass  $\mathbb{L}$  ein Unterraum ist, rechnet man leicht nach. Nun zur Dimension. Wähle eine Fundamentalmatrix  $M \in C^1(I; \mathbb{K}^n)$  (welche nach Satz 120 existiert). Die Abbildung  $\Phi : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{L}$  gegeben durch  $\Phi(c) := (t \mapsto M(t)c)$  ist aufgrund der Definition von  $M$  eine surjektive Abbildung. Wir zeigen:  $\Phi$  ist auch linear und injektiv. Zur Linearität: Für  $\lambda \in \mathbb{K}$  und  $c_1, c_2 \in \mathbb{K}^n$  gilt

$$\Phi(c_1 + \lambda c_2)(t) = M(t)(c_1 + \lambda c_2) = (M(t)c_1) + \lambda(M(t)c_2) = \Phi(c_1)(t) + \lambda\Phi(c_2)(t). \quad (704)$$

Zur Injektivität: Ist  $\Phi(c_1) = \Phi(c_2)$  so gilt  $M(t)c_1 = M(t)c_2$  für alle  $t \in I$ . Da  $M(t)$  aber Invertierbar ist, gilt  $c_1 = c_2$ . Alles in Allem ist  $\Phi$  eine bijektive lineare Abbildung zwischen  $\mathbb{L}$  und  $\mathbb{K}^n$ . Es folgt

$$\dim(\mathbb{L}) = \dim(\mathbb{K}^n) = n. \quad (705)$$

**Korollar 123.** Es sei  $A \in C^0(I; \mathbb{K}^{n \times n})$  und  $M \in C^1(I; \mathbb{K}^{n \times n})$  eine Fundamentalmatrix für die DGL  $z'(t) = A(t)z(t)$ , ( $t \in I$ ). Dann ist die eindeutige Lösung von

$$\begin{cases} y'(t) = A(t)y(t) & (t \in I) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (706)$$

gegeben durch  $y(t) = M(t)M(t_0)^{-1}y_0$

**Beweis.** Da  $y$  die DGL löst gibt es ein  $c \in \mathbb{K}^n$  mit  $y(t) = M(t)c$ . Nun gilt

$$M(t_0)c = y(t_0) = y_0 \quad \Rightarrow \quad c = M(t_0)^{-1}y_0 \quad \Rightarrow \quad y(t) = M(t)c = M(t)M(t_0)^{-1}y_0. \quad (707)$$

**Lemma 124.** Es sei  $A \in C^0(I; \mathbb{K}^{n \times n})$  und  $y'(t) = A(t)y(t)$ , ( $t \in I$ ) gegeben. Ferner sei  $M \in C^1(I; \mathbb{K}^{n \times n})$  eine Fundamentalmatrix. Dann gilt

1.  $M'(t) = A(t)M(t)$
2.  $\frac{d}{dt}[\det(M(t))] = \text{tr}(A(t))\det(M(t))$ .

Hierbei ist für eine Matrix  $B = (b_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \in \mathbb{K}^{n \times n}$

$$\text{tr}(B) := \sum_{j=1}^n b_{jj} \quad \text{die Spur von } B \text{ und } \det(B) \text{ die Determinante von } B. \quad (708)$$

**Beweis.** Zu 1. Es seien  $e_1, \dots, e_n$  die kanonischen Einheitsvektoren in  $\mathbb{C}^n$ . Definiere  $y_i(t) = M(t)e_i$ . Dann ist  $y_i \in \mathbb{L}$ . Mit dieser Info berechnen wir

$$M'(t)e_i = \frac{d}{dt}(M(t)e_i) = y_i'(t) \underset{y_i \in \mathbb{L}}{=} A(t)y_i(t) = A(t)M(t)e_i. \quad (709)$$

Das bedeutet die  $i$ -te Spalte von  $M'(t)$  stimmt mit der  $i$ -ten Spalte von  $A(t)M(t)$  überein. Da  $i \in \{1, \dots, n\}$  beliebig war, stimmen  $M'(t)$  und  $A(t)M(t)$  vollends überein.

Zu 2. Es sei  $M = (m_{i,j}(t))_{i,j}$ . Wir wissen aus "1.", dass

$$m'_{i,j}(t) = \sum_{k=1}^n a_{ik}(t)m_{k,j}(t). \quad (710)$$

Es seien  $\tilde{m}_1, \dots, \tilde{m}_n \in C^1(I; \mathbb{K}^n)$  die Zeilen von  $M$ , d.h.

$$M(t) = \begin{pmatrix} \tilde{m}_1(t) \\ \vdots \\ \tilde{m}_n(t) \end{pmatrix}. \quad (711)$$

Wir berechnen nun mit der *Leibniz-Formel* aus der linearen Algebra, dass

$$\det(M(t)) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n m_{i,\sigma(i)}(t), \quad (712)$$

wobei  $S_n$  die Menge aller Permutationen von  $\{1, \dots, n\}$  bezeichnet und  $\operatorname{sgn}(\sigma)$  ist das *Signum* einer solchen Permutation. Nun berechnen wir

$$\frac{d}{dt}[\det(M(t))] = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \frac{d}{dt} \prod_{i=1}^n m_{i,\sigma(i)}(t) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \sum_{j=1}^n \left( \prod_{i=1, i \neq j}^n m_{i,\sigma(i)}(t) \right) m'_{j,\sigma(j)}(t) \quad (713)$$

$$\stackrel{(710)}{=} \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \sum_{j=1}^n \left( \prod_{i=1, i \neq j}^n m_{i,\sigma(i)}(t) \right) \left( \sum_{k=1}^n a_{jk}(t) m_{k,\sigma(j)}(t) \right) \quad (714)$$

$$= \sum_{j,k=1}^n a_{jk}(t) \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \left( \prod_{i=1, i \neq j}^n m_{i,\sigma(i)}(t) \right) m_{k,\sigma(j)}(t). \quad (715)$$

Man beobachtet nun:

$$\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \left( \prod_{i=1, i \neq j}^n m_{i,\sigma(i)}(t) \right) m_{k,\sigma(j)}(t) \hat{=} \det \begin{pmatrix} \tilde{m}_1(t) \\ \vdots \\ \tilde{m}_{j-1}(t) \\ \tilde{m}_k(t) \\ \tilde{m}_{j+1}(t) \\ \vdots \\ \tilde{m}_n(t) \end{pmatrix}. \quad (716)$$

Falls  $k \neq j$ , so kommt die Zeile  $\tilde{m}_k(t)$  in der Matrix zweimal vor und die Determinante ist damit Null. Falls  $k = j$ , so steht auf der rechten Seite von (716) wieder  $\det(M(t))$ . Somit haben wir

$$\frac{d}{dt}[\det(M(t))] = \sum_{j,k=1}^n a_{jk}(t) \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \left( \prod_{i=1, i \neq j}^n m_{i,\sigma(i)}(t) \right) m_{k,\sigma(j)}(t) = \sum_{j=1}^n a_{jj}(t) \det(M(t)) \quad (717)$$

und die Behauptung folgt.

Als nächstes wenden wir uns der Bedeutung des Ausdruckes  $t \mapsto \det(M(t))$  zu.

**Korollar 125.** Es sei  $A \in C^0(I; \mathbb{K}^{n \times n})$  und  $y'(t) = A(t)y(t)$ , ( $t \in I$ ) gegeben. Ferner sei  $M \in C^1(I; \mathbb{K}^{n \times n})$  eine Fundamentalmatrix. Dann gilt für alle  $t, t_0 \in I$

$$\det(M(t)) = \det(M(t_0)) \exp\left(\int_{t_0}^t \operatorname{tr}(A(s)) \, ds\right). \quad (718)$$

**Beweis.** Folgt sofort mit dem vorigen Lemma und Satz 20.

**Definition 126.** Es sei  $A \in C^0(I; \mathbb{K}^{n \times n})$  und (DGL)  $y'(t) = A(t)y(t)$ , ( $t \in I$ ) gegeben. Ferner sei  $M \in C^1(I; \mathbb{K}^{n \times n})$  eine Fundamentalmatrix. Wir nennen  $\omega : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\omega(t) := \det(M(t))$  eine *Wronski-Determinante* für (DGL).

Wir werden in den Übungen (Aufgabe 2 Blatt 12) aufklären, dass die in Definition 50 definierte *Wronski-Funktion* auch eine Wronski-Determinante ist. Eine Formel für die Wronski-Funktion (die man auch aus (718) herleiten könnte) hat uns in Kapitel 1 wesentlich dabei geholfen, die allgemeine Lösung von DGLs der Form  $y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0$  zu finden.

## 2.4 Wohlgestelltheit

Ein Problem nennt man *wohlgestellt* (im Sinne von *Hadamard*) wenn

- (a) stets eine Lösung existiert,
- (b) Lösungen eindeutig sind,
- (c) Lösungen stetig von den Input-Daten abhängen.

Für Anfangswertprobleme haben wir bereits über (a),(b) gesprochen. In diesem Abschnitt soll es um (c) gehen. Die "Input-Daten" für ein Anfangswertproblem sind hierbei die Anfangswerte  $(t_0, y_0) \in I \times G$ . Ein erstes Resultat dazu:

**Satz 127. STETIGE ABHÄNGIGKEIT - I.** Es erfülle  $f \in C^0(I \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$  eine globale Lipschitz-Bedingung mit Lipschitz-Konstante  $L > 0$ . Ferner seien  $y, z \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$  die eindeutigen Lösungen zu

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & (t \in I), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \quad (719)$$

und

$$\begin{cases} z'(t) = f(t, z(t)) & (t \in I), \\ z(t_0) = z_0. \end{cases} \quad (720)$$

Dann gilt

$$|y(t) - z(t)| \leq e^{L|t-t_0|} |y_0 - z_0| \quad \forall t \in I. \quad (721)$$

Insbesondere gilt für alle  $J = (a, b)$  beschränkt mit  $\bar{J} \subset I$

$$d_\infty^{(J)}(y, z) \leq e^{L(b-a)} d_{\mathbb{R}^n}(y_0, z_0). \quad (722)$$

**Beweis.** Es seien  $y$  und  $z$  wie in der Aussage. Wir zeigen (721) nur für  $t \in I, t \geq t_0$ . Der Fall  $t \leq t_0$  funktioniert wie in Satz 108 “durch Umkehr der Zeitrichtung”. Wir definieren für  $t \in I$

$$u(t) := |y(t) - z(t)|. \quad (723)$$

Auch definieren wir  $T := \sup I \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ . Nun gilt für  $t \in [t_0, T)$

$$u(t) = |y(t) - z(t)| = \left| \left( y_0 + \int_{t_0}^t y'(s) \, ds \right) - \left( z_0 + \int_{t_0}^t z'(s) \, ds \right) \right| \quad (724)$$

$$= \left| y_0 - z_0 + \int_{t_0}^t (y'(s) - z'(s)) \, ds \right| \leq |y_0 - z_0| + \left| \int_{t_0}^t (y'(s) - z'(s)) \, ds \right| \quad (725)$$

$$\leq |y_0 - z_0| + \int_{t_0}^t |y'(s) - z'(s)| \, ds \stackrel{(719), (720)}{\leq} |y_0 - z_0| + \int_{t_0}^t |f(s, y(s)) - f(s, z(s))| \, ds. \quad (726)$$

Da  $f$  eine globale Lipschitzbedingung mit Lipschitzkonstante  $L > 0$  erfüllt erhalten wir

$$u(t) \leq |y_0 - z_0| + \int_{t_0}^t L |y(s) - z(s)| \, ds \stackrel{(723)}{=} |y_0 - z_0| + \int_{t_0}^t u(s) \cdot L \, ds. \quad (727)$$

Nun verwenden wir das Lemma von Gronwall mit  $u_0 := |y_0 - z_0|$  und  $v(s) := L$  (für alle  $s \in [t_0, T)$ ). Daher haben wir für alle  $t \in [t_0, T)$

$$u(t) \leq u_0 \exp \left( \int_{t_0}^t L \, ds \right) = |y_0 - z_0| e^{L(t-t_0)}. \quad (728)$$

Nun folgt (721) mit (723). Auch folgt (722) direkt aus (723):

$$d_\infty^{(J)}(y, z) = \sup_{t \in J} |y(t) - z(t)| \leq \sup_{t \in J} (|y_0 - z_0| e^{L|t-t_0|}) \stackrel{\leq}{t, t_0 \in J, J=(a,b)} |y_0 - z_0| e^{L(b-a)}. \quad (729)$$

**Anmerkung 128.** Es erfülle wie vorher  $f \in C^0(I \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$  eine globale Lipschitzbedingung mit Lipschitzkonstante  $L > 0$ . Betrachte die Abbildung  $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow C_b^0(J; \mathbb{R}^n)$  mit folgender Eigenschaft:  $\Psi(y_0)$  ist stets die eindeutige Lösung zu (719) mit Anfangswert  $y_0$ . Gleichung (722) besagt dann

$$d_\infty^{(J)}(\Psi(y_0), \Psi(z_0)) \leq e^{L(b-a)} d_{\mathbb{R}^n}(y_0, z_0) \quad \forall y_0, z_0 \in \mathbb{R}^n. \quad (730)$$

Man sieht mit dieser Gleichung leicht, dass  $\Psi$  eine stetige Abbildung zwischen  $\mathbb{R}^n$  und

$C_b^0(J; \mathbb{R}^n)$  ist.

Wir wollen nun die Voraussetzung der globalen Lipschitzbedingung abschwächen. Hierzu definieren wir zunächst die *Flussabbildung*.

**Definition 129.** FLUSSABBILDUNG. Es erfülle  $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^n)$  eine lokale Lipschitzbedingung. Für  $t_0 \in I$  und  $y_0 \in G$  sei  $\hat{I}(t_0, y_0)$  das Existenzintervall der maximalen Lösung  $y \in C^1(\hat{I}(t_0, y_0); \mathbb{R}^n)$  von

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (731)$$

Für  $t_0 \in I, y_0 \in G$  und  $t \in \hat{I}(t_0, y_0)$  definieren wir die *Flussabbildung*

$$\Phi(t, (t_0, y_0)) := y(t) \quad (732)$$

wobei  $y$  wie in (731) ist. Es gilt also

$$\Phi(t_0, (t_0, y_0)) = y_0, \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt} \Phi(t, (t_0, y_0)) = f(t, \Phi(t, (t_0, y_0))). \quad (733)$$

Wir wollen zeigen, dass  $\Phi$  stetig in  $(t_0, y_0)$  ist. Ein Problem gibt es aber hierbei: Da  $\hat{I}(t_0, y_0)$  von  $(t_0, y_0) \in I \times G$  abhängt, ist es a priori unklar, wie die Abbildung  $(t_0, y_0) \mapsto \Phi(t, (t_0, y_0))$  für ein festes  $t$  zu betrachten ist.

**Satz 130.** STETIGE ABHÄNGIGKEIT - II. Es erfülle  $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^n)$  eine lokale Lipschitzbedingung. Es seien  $(t_0, y_0) \in I \times G$ ,  $\varepsilon > 0$  und  $t \in \hat{I}(t_0, y_0)$ . Dann gibt es  $\delta > 0$  so, dass für alle  $(t_1, y_1) \in I \times G$  mit  $|(t_1, y_1) - (t_0, y_0)| < \delta$  gilt, dass

$$t \in \hat{I}(t_1, y_1) \quad \text{und} \quad |\Phi(t, (t_1, y_1)) - \Phi(t, (t_0, y_0))| < \varepsilon. \quad (734)$$

Wir beweisen an dieser Stelle nur eine leicht schwächere Version, nämlich nur den Spezialfall  $t_1 = t_0$ .

**Satz 130a.** Es erfülle  $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^n)$  eine lokale Lipschitzbedingung. Es seien  $(t_0, y_0) \in I \times G$ ,  $\varepsilon > 0$  und  $t \in \hat{I}(t_0, y_0)$ . Dann gibt es  $\delta > 0$  so, dass für alle  $y_1 \in G$  mit  $|y_1 - y_0| < \delta$  gilt, dass

$$t \in \hat{I}(t_0, y_1) \quad \text{und} \quad |\Phi(t, (t_0, y_1)) - \Phi(t, (t_0, y_0))| < \varepsilon. \quad (735)$$

**Beweis.** Es sei  $I = (a, b)$ ,  $t \in \hat{I}(t_0, y_0)$  und  $\varepsilon > 0$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass  $t \geq t_0$ . Der andere Fall geht ganz analog. Definiere

$$\Gamma := \{\Phi(s, (t_0, y_0)) : s \in [t_0, t]\} \subset G. \quad (736)$$

Beachte: Da  $[t_0, t] \ni s \mapsto \Phi(s, (t_0, y_0)) \in G$  eine stetige Abbildung ist und  $[t_0, t]$  kompakt ist, ist  $\Gamma$  eine kompakte Teilmenge von  $G$ . Wähle nun  $(G_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge von beschränkten



(offenen) Gebieten mit  $G_k \subset G_{k+1}$ ,  $\overline{G_k} \subset G$  und  $\bigcup_{k=1}^{\infty} G_k = G$ . Dann gilt auch

$$\Gamma \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k. \quad (737)$$

Nach dem Satz von Heine-Borel gibt es eine endliche Teilüberdeckung und daher finden wir ein  $k_0 \in \mathbb{N}$  mit

$$\Gamma \subset \bigcup_{k=1}^{k_0} G_k = G_{k_0}, \quad (738)$$

wobei wir für die letzte Gleichung benutzt haben, dass  $\overline{G_k} \subset G_{k+1}$ . Beachte: da  $\overline{G_{k_0}} \subset G$  kompakt ist, gibt es  $x^* \in \overline{G_{k_0}}$  mit

$$\inf_{x \in \overline{G_{k_0}}} \text{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus G) = \text{dist}(x^*, \mathbb{R}^n \setminus G) =: \theta > 0. \quad (739)$$

Ferner gibt es (wegen der Offenheit von  $G_{k_0}$ ) auch ein  $\eta \in (0, \theta)$  so, dass

$$\Gamma_\eta := \{x \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(x, \Gamma) < \eta\} \subset G_{k_0}. \quad (740)$$

(In der Tat: Falls es ein solches  $\eta > 0$  nicht gibt, so findet man für alle  $n \in \mathbb{N}$  ein  $x_n \in G_{k_0}^C$  mit  $\text{dist}(x_n, \Gamma) < \frac{1}{n}$ . Da  $\Gamma$  beschränkt ist, ist auch  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt und hat deswegen eine konvergente Teilfolge. Sei etwa  $\hat{x}$  deren Grenzwert. Da  $G_{k_0}^C$  abgeschlossen ist, ist  $\hat{x} \in G_{k_0}^C$ . Es muss aber auch  $\text{dist}(\hat{x}, \Gamma) = 0$ , d.h.  $\hat{x} \in \Gamma$ , gelten! Daraus folgt  $\hat{x} \in \Gamma \cap G_{k_0}^C$ , was (737) widerspricht.)

Da nun  $[t_0, t] \times \overline{G_{k_0}} \subset I \times G$  kompakt ist, gibt es nach Proposition 83 ein  $L > 0$  so, dass

$$|f(\tau, z_1) - f(\tau, z_2)| \leq L|z_1 - z_2| \quad \forall \tau \in [t_0, t], \forall z_1, z_2 \in \overline{G_{k_0}}. \quad (741)$$

Wähle nun  $\delta > 0$  so, dass

$$\delta < \eta \quad \text{und} \quad \delta e^{L(t-t_0)} < \min\{\frac{\eta}{2}, \varepsilon\}. \quad (742)$$

Sei nun  $y_1 \in G$  mit  $|y_1 - y_0| < \delta$ . Beachte: Dann ist  $y_1 \in G_{k_0}$ , denn  $y_0 = \Phi(t_0, (t_0, y_0)) \in \Gamma$  und daher

$$\text{dist}(y_1, \Gamma) \leq |y_1 - y_0| < \delta < \eta. \quad \Rightarrow \quad y_1 \in \Gamma_\eta \subset G_{k_0}. \quad (743)$$

Sei ferner  $\hat{I}(t_0, y_1) := (t_-(t_0, y_1), t_+(t_0, y_1))$ .

$$T_{y_1} := \sup\{s \in [t_0, t_+(t_0, y_1)) : \Phi(\tau, (t_0, y_1)) \in G_{k_0} \text{ für alle } \tau \in [t_0, s]\}. \quad (744)$$

Beachte, dass  $T_{y_1} > t_0$ , denn  $\Phi(t_0, (t_0, y_1)) = y_1 \in G_{k_0}$  und  $G_{k_0}$  ist offen.

**Zwischenbehauptung 1.**  $T_{y_1} = b$  oder  $T_{y_1} < t_+(t_0, y_1)$ . Denn wäre  $T_{y_1} = t_+(t_0, y_1) < b$  so würde nach dem Maximalitätsdetektor (Satz 106) gelten

$$\liminf_{s \uparrow T_{y_1}} \text{dist}(\Phi(s, (t_0, y_1)); \mathbb{R}^n \setminus G) = 0 \quad \text{oder} \quad \limsup_{s \uparrow T_{y_1}} |\Phi(s, (t_0, y_1))| = \infty. \quad (745)$$

Da jedoch  $\Phi(s, (t_0, y_1)) \in \overline{G_{k_0}}$  für alle  $s \in [t_0, T)$ , haben wir

$$\text{dist}(\Phi(s, (t_0, y_1)); \mathbb{R}^n \setminus G) \underset{(739)}{\geq} \theta \quad \forall s \in [t_0, T_{y_1}), \quad (746)$$

was den ersten Fall in (745) ausschließt und

$$|\Phi(s, (t_0, y_1))| \leq \max_{x \in \overline{G_{k_0}}} |x| \quad \forall s \in [t_0, T_{y_1}) \quad (747)$$

was den zweiten Fall in (745) ausschließt. **Ende der Zwischenbehauptung.**

**Zwischenbehauptung 2.**  $t < T_{y_1}$ . Falls  $T_{y_1} = b$  ist diese Behauptung klar. Andernfalls (also falls  $T_{y_1} < t_+(t_0, y_1)$ ) ist etwas zu zeigen. Beachte: In diesem Fall ist die Auswertung  $\Phi(T_{y_1}, (t_0, y_1))$  wohldefiniert und es gilt (wegen der Wahl von  $T_{y_1}$ ), dass  $\Phi(T_{y_1}, (t_0, y_1)) \in \partial G_{k_0}$ . Angenommen es gilt  $T_{y_1} \leq t$ . Dann berechne für alle  $s \in [t_0, T_{y_1})$

$$|\Phi(s, (t_0, y_1)) - \Phi(s, (t_0, y_0))| \quad (748)$$

$$\stackrel{(733)}{=} \left| y_1 + \int_{t_0}^s f(\tau, \Phi(\tau, (t_0, y_1))) \, d\tau - y_0 - \int_{t_0}^s f(\tau, \Phi(\tau, (t_0, y_0))) \, d\tau \right| \quad (749)$$

$$= \left| y_1 - y_0 + \int_{t_0}^s [f(\tau, \Phi(\tau, (t_0, y_1))) - f(\tau, \Phi(\tau, (t_0, y_0)))] \, d\tau \right| \quad (750)$$

$$\leq |y_1 - y_0| + \int_{t_0}^s |f(\tau, \Phi(\tau, (t_0, y_1))) - f(\tau, \Phi(\tau, (t_0, y_0)))| \quad (751)$$

Wegen (738) und (744) sind  $\Phi(\tau, (t_0, y_1)), \Phi(\tau, (t_0, y_0)) \in \overline{G_{k_0}}$  für alle  $\tau \in [t_0, T_{y_1})$  und daher folgt mit (741)

$$|\Phi(s, (t_0, y_1)) - \Phi(s, (t_0, y_0))| \leq |y_1 - y_0| + \int_{t_0}^s L |\Phi(\tau, (t_0, y_1)) - \Phi(\tau, (t_0, y_0))| \, d\tau. \quad (752)$$

Mit Gronwall's Lemma (Lemma 111) folgt

$$|\Phi(s, (t_0, y_1)) - \Phi(s, (t_0, y_0))| \leq |y_1 - y_0| e^{L(s-t_0)} \quad \forall s \in [t_0, T_{y_1}). \quad (753)$$

Wegen der Stetigkeit gilt diese Gleichung auch für  $s = T_{y_1}$ . Dann ist (falls  $|y_1 - y_0| < \delta$ )

$$|\Phi(T_{y_1}, (t_0, y_1)) - \Phi(T_{y_1}, (t_0, y_0))| \leq |y_1 - y_0| e^{L(T_{y_1}-t_0)} \underset{T_{y_1} \leq t}{\leq} \delta e^{L(t-t_0)} \underset{(742)}{<} \frac{\eta}{2}. \quad (754)$$

Weil  $T_{y_1} \leq t$  ist nach (736)  $\Phi(T_{y_1}, (t_0, y_0)) \in \Gamma$  und somit gilt

$$\text{dist}(\Phi(T_{y_1}, (t_0, y_1)), \Gamma) \leq |\Phi(T_{y_1}, (t_0, y_1)) - \Phi(T_{y_1}, (t_0, y_0))| < \frac{\eta}{2}. \quad (755)$$

Das impliziert, dass  $\Phi(T_{y_1}, (t_0, y_1)) \in \Gamma_\eta \subset G_{k_0}$ . Ein Widerspruch zur Wahl von  $T_{y_1}$ , denn  $\Phi(T_{y_1}, (t_0, y_1)) \in \partial G_{k_0}$  (und  $\partial G_{k_0} \cap G_{k_0} = \emptyset$ ). Es folgt  $t < T_{y_1}$ . **Ende der Zwischenbehauptung.**

Wir zeigen nun, dass  $t \in \hat{I}(t_0, y_1)$ . Im Fall, dass  $T_{y_1} = b$  gilt auch  $t_+(t_0, y_1) = b$  und somit  $t < b = t_+(t_0, y_1)$ , d.h.  $t \in \hat{I}(t_0, y_1)$ . Im Fall  $T_{y_1} < t_+(t_0, y_1)$  gilt nach Zwischenbehauptung 2, dass  $t < T_{y_1} < t_+(t_0, y_1)$ , d.h.  $t \in \hat{I}(t_0, y_1)$ . In jedem Fall folgt  $t \in \hat{I}(t_0, y_1)$  und  $t < T_{y_1}$ . Ferner ist es zulässig (da  $t \in [t_0, T_{y_1})$ ), (753) mit  $s = t$  auszuwerten und man erhält

$$|\Phi(t, (t_0, y_1)) - \Phi(t, (t_0, y_0))| \leq |y_1 - y_0| e^{L(t-t_0)} \stackrel{(742)}{\leq} \delta e^{L(t-t_0)} < \varepsilon. \quad (756)$$

(Beachte: Theoretisch haben wir die Berechnung in (748) bis (753) nur im Fall  $T_{y_1} < t_+(t_0, y_1)$  gemacht. Für den Fall  $T_{y_1} = b$  können wir die Berechnung aber genauso wiederholen und daher auch (753) verwenden.) Die Behauptung ist gezeigt.

**Bonusmaterial.** Im Folgenden wollen wir klären, wie man Proposition 130 auch mit  $t_1 \neq t_0$  beweisen kann, d.h. wir vervollständigen den Beweis von Proposition 130a. Für die kommenden Ausführungen benötigen wir

**Wiederholung Anmerkung 101.** Es sei  $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^n)$ ,  $t_0 \in I$  und  $y_0 \in G$ . Sei  $\alpha > 0$  mit  $[t_0, t_0 + \alpha) \subset I$  und  $R > 0$  mit  $\overline{B_R(y_0)} \subset G$ . Sei  $M := \sup_{(\tau, z) \in [t_0, t_0 + \alpha) \times \overline{B_R(y_0)}} |f(\tau, z)| < \infty$ . Ist  $a := \min\{\alpha, \frac{R}{M+1}\}$  und die Funktion  $y \in C^1((t_0 - \delta, t_0 + a); \mathbb{R}^n)$ , ( $\delta > 0$ ), eine Lösung von

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t \in (t_0 - \delta, t_0 + a) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}, \quad (757)$$

so gilt  $y(t) \in \overline{B_R(y_0)}$  für alle  $t \in [t_0, t_0 + a)$ . Spiegelbildliches lässt sich in  $(t_0 - a, t_0]$  zeigen.

**Lemma 131.** Es erfülle  $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^n)$  eine lokale Lipschitzbedingung. Sei  $(t_1, y_1) \in I \times G$ . Sei  $\alpha > 0$  so, dass  $[t_1, t_1 + \alpha) \subset I$ . Sei  $R > 0$  mit  $\overline{B_R(y_1)} \subset G$ . Definiere

$$M := \sup_{(\tau, z) \in [t_1, t_1 + \alpha) \times \overline{B_R(y_1)}} |f(\tau, z)| \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \quad (758)$$

und  $a := \min\{\alpha, \frac{R}{M+1}\}$  (mit der Konvention  $R/\infty = 0$ ). Dann gilt  $[t_1, t_1 + a) \subset \hat{I}(t_1, y_1)$  und

$$\Phi(t, (t_1, y_1)) \in \overline{B_R(y_1)} \quad \forall t \in [t_1, t_1 + a). \quad (759)$$

**Beweis.** Es seien  $\alpha > 0$ ,  $M$  und  $a > 0$  definiert wie in der Aussage. Falls  $M = \infty$  ist nichts zu zeigen, denn dann gilt  $[t_1, t_1 + a) = \emptyset$ . Nehmen wir also an, dass  $M < \infty$ . Es sei  $\hat{I}(t_1, y_1) := (t_-(t_1, y_1), t_+(t_1, y_1))$ . Wir zeigen jetzt, dass  $t_1 + a \leq t_+(t_1, y_1)$ . In der Tat: Nehmen wir für einen Widerspruch an, dass  $t_+(t_1, y_1) < t_1 + a$ . Da  $t \mapsto \Phi(t, (t_1, y_1))$  eine maximale Lösung einer DGL ist, kann man den Maximalitätsdetektor (Satz 106)

anwenden und folgert

$$\liminf_{t \uparrow t_+(t_1, y_1)} \text{dist}(\Phi(t, (t_1, y_1)), \mathbb{R}^n \setminus G) = 0 \quad \text{oder} \quad \limsup_{t \uparrow t_+(t_1, y_1)} |\Phi(t, (t_1, y_1))| = \infty. \quad (760)$$

Auf der anderen Seite lässt sich Anmerkung 101 mit  $\tilde{\alpha} := t_+(t_1, y_1) - t_1$  anstatt  $\alpha$  anwenden. Das bedeutet: Für  $\tilde{a} := \min\{\tilde{\alpha}, \frac{R}{M+1}\} = \min\{\tilde{\alpha}, a\} = \tilde{\alpha}$  folgt

$$\Phi(t, (t_1, y_1)) \in \overline{B_R(y_1)} \quad \forall t \in [t_1, t_1 + \tilde{a}) = [t_1, t_1 + \tilde{\alpha}) = [t_1, t_+(t_1, y_1)). \quad (761)$$

Da  $\overline{B_R(y_1)}$  beschränkt ist, erhalten wir aus (761), dass  $\limsup_{t \uparrow t_+(t_1, y_1)} |\Phi(t, (t_1, y_1))| < \infty$ , womit letzterer Fall in (760) schonmal ausgeschlossen ist. Beachte nun, dass es wegen der Kompaktheit von  $\overline{B_R(y_1)}$  ein  $x^* \in \overline{B_R(y_1)}$  gibt mit

$$\inf_{x \in \overline{B_R(y_1)}} \text{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus G) = \text{dist}(x^*, \mathbb{R}^n \setminus G) > 0. \quad (762)$$

Da nun aber nach (761)  $\Phi(t, (t_1, y_1)) \in \overline{B_R(y_1)}$  für alle  $t \in [t_1, t_+(t_1, y_1))$  hat man

$$\text{dist}(\Phi(t, (t_1, y_1)), \mathbb{R}^n \setminus G) \geq \text{dist}(x^*, \mathbb{R}^n \setminus G) \quad \forall t \in [t_1, t_+(t_1, y_1)) \quad (763)$$

und folgert

$$\liminf_{t \uparrow t_+(t_1, y_1)} \text{dist}(\Phi(t, (t_1, y_1)), \mathbb{R}^n \setminus G) \geq \text{dist}(x^*, \mathbb{R}^n \setminus G) > 0. \quad (764)$$

Somit ist auch der erste Fall in (760) ausgeschlossen und wir folgern einen Widerspruch. Also gilt  $t_1 + a \leq t_+(t_1, y_1)$ . Wir wenden nun Anmerkung 101 nun mit  $\alpha$  wie in der Aussage gegeben an und erhalten

$$\Phi(t, t_1, y_1) \in \overline{B_R(y_1)} \quad \forall t \in [t_1, t_1 + a). \quad (765)$$

Spiegelbildliches wie im vorigen Lemma kann für  $(t_1 - a, t_1]$  gezeigt werden. Zusammengefasst gilt dann

**Korollar 132.** Es erfülle  $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^n)$  eine lokale Lipschitzbedingung. Sei  $(t_1, y_1) \in I \times G$ . Sei  $\alpha > 0$  so, dass  $(t_1 - \alpha, t_1 + \alpha) \subset I$ . Sei  $R > 0$  mit  $\overline{B_R(y_1)} \subset G$ . Definiere

$$M := \sup_{(\tau, z) \in (t_1 - \alpha, t_1 + \alpha) \times \overline{B_R(y_1)}} |f(\tau, z)| \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \quad (766)$$

und  $a := \min\{\alpha, \frac{R}{M+1}\}$  (mit der Konvention  $R/\infty = 0$ ). Dann gilt  $(t_1 - a, t_1 + a) \subset \hat{I}(t_1, y_1)$  und

$$\Phi(t, (t_1, y_1)) \in \overline{B_R(y_1)} \quad \forall t \in (t_1 - a, t_1 + a). \quad (767)$$

**Satz 133. STETIGE ABHÄNGIGKEIT VOM ANFANGSWERT.** Es erfülle  $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^n)$  eine lokale Lipschitzbedingung. Es seien  $(t_0, y_0) \in I \times G$  und  $\varepsilon > 0$ . Dann gibt es  $\delta > 0$

so, dass für alle  $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$  und  $(t_1, y_1) \in I \times G$  mit  $|(t_1, y_1) - (t_0, y_0)| < \delta$  gilt, dass

$$t \in \hat{I}(t_1, y_1) \quad \text{und} \quad |\Phi(t, (t_1, y_1)) - \Phi(t, (t_0, y_0))| < \varepsilon. \quad (768)$$

**Beweis.** Sei  $\varepsilon > 0$ . Es seien  $(t_0, y_0) \in I \times G$ . Dann gibt es  $\vartheta > 0$ ,  $r > 0$  und  $L > 0$  mit  $[t_0 - \vartheta, t_0 + \vartheta] \subset I$

$$|f(\tau, z_2) - f(\tau, z_1)| \leq L|z_2 - z_1| \quad \forall \tau \in (t_0 - \vartheta, t_0 + \vartheta) \quad \forall z_1, z_2 \in B_r(y_0). \quad (769)$$

Sei nun  $|t_1 - t_0| < \frac{\vartheta}{2}$ ,  $|y_1 - y_0| < \frac{r}{2}$ . Wir notieren wie immer  $\hat{I}(t_1, y_1) = (t_-(t_1, y_1), t_+(t_1, y_1))$ . Wir definieren

$$M_{t_1, y_1} := \max_{(\tau, z) \in [t_1 - \frac{\vartheta}{4}, t_1 + \frac{\vartheta}{4}] \times \overline{B_{\frac{r}{4}}(y_1)}} |f(\tau, z)|. \quad (770)$$

Beachte: Weil  $[t_1 - \frac{\vartheta}{4}, t_1 + \frac{\vartheta}{4}] \subset [t_0 - \vartheta, t_0 + \vartheta]$  und  $\overline{B_{\frac{r}{4}}(y_1)} \subset \overline{B_{\frac{3r}{4}}(y_0)}$  gilt

$$M_{t_1, y_1} \leq M := \max_{(\tau, z) \in [t_0 - \vartheta, t_0 + \vartheta] \times \overline{B_{\frac{3r}{4}}(y_0)}} |f(\tau, z)| \quad \forall (t_1, y_1) : |t_1 - t_0| < \frac{\vartheta}{2}, |y_1 - y_0| < \frac{r}{2}. \quad (771)$$

Wir definieren auch für  $(t_1, y_1)$  mit  $|t_1 - t_0| < \frac{\vartheta}{2}$  und  $|y_1 - y_0| < \frac{r}{2}$

$$a_{(t_1, y_1)} := \min\left\{\frac{\vartheta}{4}, \frac{r/4}{M_{t_1, y_1} + 1}\right\}, \quad \text{und} \quad a := \min\left\{\frac{\vartheta}{4}, \frac{r/4}{M + 1}\right\}. \quad (772)$$

Stets gilt  $a_{(t_1, y_1)} \geq a$ . Nach dem vorigen Lemma 131 (bzw. Korollar 132) erhalten wir  $(t_1 - a_{(t_1, y_1)}, t_1 + a_{(t_1, y_1)}) \subset \hat{I}(t_1, y_1)$  und

$$\Phi(t, (t_1, y_1)) \in \overline{B_{\frac{r}{4}}(y_1)} \quad \forall t \in (t_1 - a_{(t_1, y_1)}, t_1 + a_{(t_1, y_1)}). \quad (773)$$

Zusammen mit  $a_{(t_1, y_1)} \geq a$  folgern wir  $(t_1 - a, t_1 + a) \subset \hat{I}(t_1, y_1)$  und

$$\Phi(t, (t_1, y_1)) \in \overline{B_{\frac{3r}{4}}(y_0)} \quad \forall t \in (t_1 - a, t_1 + a). \quad (774)$$

Beachte, dass auch  $(t_1, y_1) = (t_0, y_0)$  hier zugelassen ist. Nun sei  $t_1$  so, dass  $|t_0 - t_1| < \frac{a}{2}$ .

Dann ist  $(t_0 - \frac{a}{2}, t_0 + \frac{a}{2}) \subset (t_1 - a, t_1 + a) \subset \hat{I}(t_1, y_1)$ . Für alle  $t \in (t_0 - \frac{a}{2}, t_0 + \frac{a}{2})$  gilt dann

$$|\Phi(t, (t_1, y_1)) - \Phi(t, (t_0, y_0))| \quad (775)$$

$$\stackrel{(733)}{=} \left| y_1 + \int_{t_1}^t f(s, \Phi(s, (t_1, y_1))) \, ds - y_0 - \int_{t_0}^t f(s, \Phi(s, (t_0, y_0))) \, ds \right| \quad (776)$$

$$= \left| y_1 - y_0 + \int_{t_0}^t [f(s, \Phi(s, (t_1, y_1))) - f(s, \Phi(s, (t_0, y_0)))] \, ds + \int_{t_1}^{t_0} f(s, \Phi(s, (t_1, y_1))) \, ds \right| \quad (777)$$

$$\leq |y_1 - y_0| + \int_{\min(t_0, t)}^{\max(t_0, t)} |f(s, \Phi(s, (t_1, y_1))) - f(s, \Phi(s, (t_0, y_0)))| \, ds \quad (778)$$

$$+ \int_{\min(t_0, t_1)}^{\max(t_0, t_1)} |f(s, \Phi(s, (t_1, y_1)))| \, ds \quad (779)$$

Zum ersten Integral: Wegen (774) (angewendet auf  $(t_1, y_1)$  und  $(\tilde{t}_1, \tilde{y}_1) = (t_0, y_0)$ ) erhalten wir für alle  $s \in (\min(t_0, t), \max(t_0, t))$

$$|f(s, \Phi(s, (t_0, y_0))) - f(s, \Phi(s, (t_1, y_1)))| \leq L|\Phi(s, (t_0, y_0)) - \Phi(s, (t_1, y_1))|. \quad (780)$$

Das zweite Integral können wir dank (774) durch  $M|t_1 - t_0|$  abschätzen. Wir erhalten

$$|\Phi(t, (t_1, y_1)) - \Phi(t, (t_0, y_0))| \quad (781)$$

$$\leq |y_1 - y_0| + M|t_1 - t_0| + \int_{\min(t_0, t)}^{\max(t_0, t)} |\Phi(s, (t_1, y_1)) - \Phi(s, (t_0, y_0))| L \, ds. \quad (782)$$

Für alle  $t \in [t_0, t_0 + \frac{a}{2})$  gilt dann also

$$|\Phi(t, (t_1, y_1)) - \Phi(t, (t_0, y_0))| \leq |y_1 - y_0| + M|t_1 - t_0| + \int_{t_0}^t |\Phi(s, (t_1, y_1)) - \Phi(s, (t_0, y_0))| L \, ds. \quad (783)$$

Mit dem Lemma von Gronwall (Lemma 111) (mit  $u_0 := |y_1 - y_0| + M|t_1 - t_0|$  und  $T = t_0 + \frac{a}{2}$ ) folgern wir

$$|\Phi(t, (t_1, y_1)) - \Phi(t, (t_0, y_0))| \leq (|y_1 - y_0| + M|t_1 - t_0|) \exp\left(\int_{t_0}^t L \, ds\right) \quad (784)$$

$$= (|y_1 - y_0| + M|t_1 - t_0|) \exp(L|t - t_0|) \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \frac{a}{2}). \quad (785)$$

Selbiges zeigt man für  $t \in (t_0 - \frac{a}{2}, t_0]$ . Sei nun  $\delta < \frac{a}{2}$  so, dass  $(M + 1)\delta e^\delta < \varepsilon$ . Dann gilt für alle  $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$  und  $(t_1, y_1)$  mit  $|(t_1, y_1) - (t_0, y_0)| < \delta$ , dass

$$|\Phi(t, (t_1, y_1)) - \Phi(t, (t_0, y_0))| \leq (|y_1 - y_0| + M|t_1 - t_0|) \exp(L|t - t_0|) \leq (M + 1)\delta e^{L\delta} < \varepsilon. \quad (786)$$

Ferner gilt  $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) = (t_0 - \frac{a}{2}, t_0 + \frac{a}{2}) \subset (t_1 - a, t_1 + a) \subset \hat{I}(t_1, y_1)$  und die Behauptung folgt.

### 3 Anwendung: Das SIR-Pandemiemodell

In diesem Abschnitt besprechen wir eine Anwendung der Theorie der Differentialgleichungen — Wir diskutieren das *SIR-Modell* zur Beschreibung von Pandemien.

#### 3.1 Modellierung einer Pandemie

Wir teilen die Gesamtbevölkerung in drei Gruppen auf.

1. Die Gruppe  $I$  der *Infizierten* (engl. *infected*).
2. Die Gruppe  $R$  der *Genesenen* (engl. *recovered*).
3. Die Gruppe  $S$  der *Anfälligen*, d.h. noch nicht Infizierten oder Genesenen (engl. *susceptible*).

Es bezeichnet  $R(t)$  den prozentualen Anteil der Bevölkerung in Gruppe  $R$  zum Zeitpunkt  $t$ ,  $I(t)$  den Anteil der Bevölkerung in Gruppe  $I$  und  $S(t)$  den Anteil der Bevölkerung in Gruppe  $S$ . Insbesondere gilt

$$S(t) + I(t) + R(t) = 1. \quad (787)$$

#### Modellannahmen 134.

1. Die Änderungsrate der Genesenen ist proportional zum Anteil der Infizierten, d.h.  $R'(t) = \beta I(t)$  für ein  $\beta > 0$ . Der Wert von  $\beta$  hängt von der durchschnittlichen Infektionsdauer ab. Genauer kann man zeigen, dass

$$\beta = \frac{1}{\text{durchschnittliche Dauer der Infektion}} \quad (788)$$

eine sinnvolle Wahl ist.

2. Die Änderungsrate der Anfälligen ist proportional zu der Menge der *Risikokontakte*. Ein Risikokontakt entsteht wenn ein Anfälliger Kontakt mit einem Infizierten hat. Dies geschieht (am Zeitpunkt  $t$ ) mit Wahrscheinlichkeit  $S(t)I(t)$ . Die Menge der Risikokontakte ist also  $kS(t)I(t)$ , wobei  $k$  die gesamte Anzahl der Kontakte ist (welche konstant angekommen wird). (Beachte:  $k$  ist eigentlich die gesamte Anzahl der Kontakte geteilt durch die Größe der Bevölkerung, weil wir ja in Anteilen rechnen). Wir haben also

$$S'(t) = -pkS(t)I(t) \quad (789)$$

mit einer Proportionalitätskonstante  $p > 0$ . Diese ist die Wahrscheinlichkeit, dass

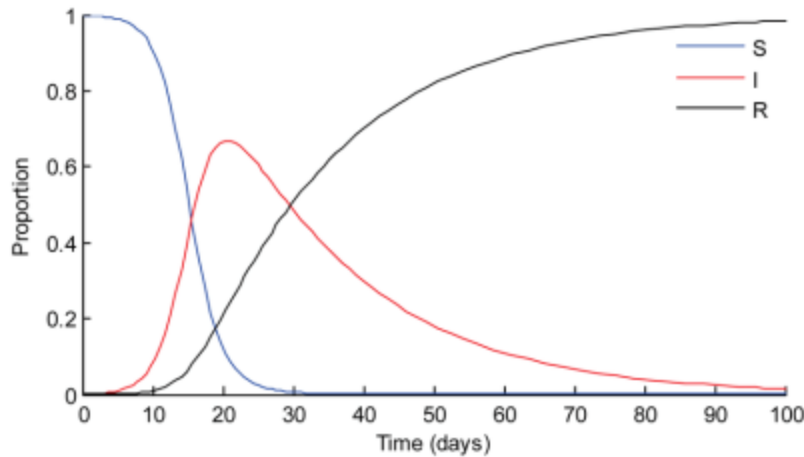


Abbildung 3: Plot einer SIR Pandemie

ein Risikokontakt tatsächlich zu einer Übertragung des Virus führt. Nennen wir  $\alpha := pk$  so erhalten wir  $S'(t) = -\alpha S(t)I(t)$ .

Nun fehlt nur noch eine Gleichung für  $I'(t)$  und schon haben wir ein DGL-System. Leiten wir beide Seiten in (787) ab so erhalten wir

$$S'(t) + I'(t) + R'(t) = 0. \quad \Rightarrow \quad I'(t) = -S'(t) - R'(t) = \alpha S(t)I(t) - \beta I(t). \quad (790)$$

**Definition 135.** SIR-PANDEMIE. Wir definieren den *zulässigen Bereich*

$$Z := \{(s, i, r) \in (0, 1)^3 : s + i + r = 1\}. \quad (791)$$

Es sei  $J \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall mit  $0 \in J$ . Eine Funktion  $y \in C^1(J; \mathbb{R}^3)$ ,  $y(t) = (S(t), I(t), R(t))^T$  heißt *SIR-Pandemie* mit Modellparametern  $\alpha, \beta > 0$  falls  $y(0) \in Z$  und

$$\begin{cases} S'(t) = -\alpha S(t)I(t) \\ I'(t) = \alpha S(t)I(t) - \beta I(t) \\ R'(t) = \beta I(t) \end{cases} \quad (t \in J). \quad (792)$$

Mit anderen Worten: Eine SIR-Pandemie ist ein Anfangswertproblem für das DGL-System (792) mit Anfangswert  $y(0) \in Z$ .

### 3.2 Mathematische Eigenschaften des Modells

Wir haben in Kapitel 2 gesehen wie wir Fragen bezüglich Existenz, Eindeutigkeit und Globalität von Lösungen von Anfangswertproblemen allgemein beantworten können. All dies wollen wir hier anwenden.



### 3.2.1 Existenz und Eindeutigkeit

**Lemma 136.** EXISTENZ EINER SIR-PANDEMIE. Es sei  $y_0 \in Z$  beliebig. Dann besitzt

$$\begin{cases} y_1'(t) = -\alpha y_1(t)y_2(t) \\ y_2'(t) = \alpha y_1(t)y_2(t) - \beta y_2(t) \\ y_3'(t) = \beta y_2(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (793)$$

eine eindeutige maximale Lösung  $y \in C^1(\hat{I}; \mathbb{R}^3)$ ,  $0 \in \hat{I}$ .

**Beweis.** Die Funktion  $f \in C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$  gegeben durch

$$f(\tau, z) := \begin{pmatrix} -\alpha z_1 z_2 \\ \alpha z_1 z_2 - \beta z_2 \\ \beta z_2 \end{pmatrix} \quad (794)$$

erfüllt klarerweise eine lokale Lipschitzbedingung.

### 3.2.2 Zulässigkeit

Wir haben nun mit verschiedenen Modellannahmen eine Beschreibung einer Pandemie gefunden. Aber ist diese Beschreibung wirklich treffend? Könnte es nicht zum Beispiel sein, dass eine Lösung von (792) zu einem gewissen Zeitpunkt einen negativen Infiziertenanteil liefert? Oder einen Genesenenanteil über 1? All dies wäre fatal: Die Modellannahmen würden dann nicht zu einem sinnvollen Modell führen. Wir müssen also die Frage der *Zulässigkeit* klären. Es ist also wichtig, dass wir den zulässigen Bereich

$$Z = \{(s, i, r) \in (0, 1)^3 : s + i + r = 1\} \quad (795)$$

nicht verlassen.

**Satz 137.** ZULÄSSIGKEIT. Es sei  $y \in C^1(J; \mathbb{R}^3)$ ,  $y(t) = (S(t), I(t), R(t))^T$  eine SIR-Pandemie, (d.h. insbesondere  $0 \in J$  und  $y(0) \in Z$ ). Dann gilt  $y(t) \in Z$  für alle  $t \in J \cap [0, \infty)$ .

**Beweis.** Es sind zwei Dinge zu zeigen. Erstens, dass  $(S(t), I(t), R(t))^T \in (0, 1)^3$  für alle  $t \geq 0$  und zweitens, dass  $S(t) + I(t) + R(t) = 1$  für alle  $t \geq 0$ . Letzteres zeigen wir wie folgt:

$$\frac{d}{dt}(S(t) + I(t) + R(t)) = S'(t) + I'(t) + R'(t) = -\alpha S(t)I(t) + (\alpha S(t)I(t) - \beta I(t)) + \beta I(t) = 0. \quad (796)$$

Somit gilt

$$S(t) + I(t) + R(t) = S(0) + I(0) + R(0) = 1, \quad (797)$$

wobei wir im letzten Schritt benutzt haben, dass  $y(0) = (S(0), I(0), R(0)) \in Z$ . Nun zu Ersterem. Es sei  $J = (a, b)$ . Es genügt zu zeigen, dass  $S(t) > 0, I(t) > 0$  und  $R(t) > 0$  für alle  $t \in [0, b)$ . Dass  $S(t) < 1, I(t) < 1$  und  $R(t) < 1$  folgt dann sofort aus  $S(t) + I(t) + R(t) = 1$ . Wir definieren nun also

$$T := \sup\{t \in [0, b) : S(\tau) > 0 \text{ und } I(\tau) > 0 \text{ und } R(\tau) > 0 \forall \tau \in [0, t]\}. \quad (798)$$

Beachte, dass  $S(t) > 0, I(t) > 0$  und  $R(t) > 0$  für alle  $t \in [0, T)$ . Wir behaupten, dass  $T = b$ . Dazu: Angenommen, dass  $T < b$ . Wir werden zeigen, dass dann  $S(T) > 0, I(T) > 0$  und  $R(T) > 0$ . Dies ist ein Widerspruch zur Wahl von  $T$ , denn wegen der Maximalität von  $T$  muss eine der drei Ungleichungen verletzt sein.

**Schritt 1.  $\mathbb{Z}$ :**  $R(T) > 0$ . Für  $t \in [0, T]$  gilt nach (792)  $R'(t) = \beta I(t) \geq 0$  (denn  $I(t) \geq 0$  für alle  $t \in [0, T]$ , weil  $I(t) > 0$  für alle  $t \in [0, T)$ ). Somit ist  $R$  auf  $[0, T]$  monoton wachsend und es gilt  $R(T) \geq R(0) > 0$ .

**Schritt 2.  $\mathbb{Z}$ :**  $I(T) > 0$ . Dazu berechnen wir für  $t \in [0, T)$

$$\frac{d}{dt} \log I(t) = \frac{I'(t)}{I(t)} \stackrel{(792)}{=} \frac{\alpha S(t)I(t) - \beta I(t)}{I(t)} = \alpha S(t) - \beta \underset{S(t) > 0}{\geq} -\beta. \quad (799)$$

Somit haben wir für  $t \in [0, T)$

$$\log I(t) = \log I(0) + \int_0^t \frac{d}{ds} \log I(s) ds \geq \log I(0) - \int_0^t \beta ds = \log I(0) - \beta t. \quad (800)$$

Mit der Monotonie der Exponentialfunktion folgern wir

$$I(t) = e^{\log I(t)} \geq e^{\log I(0) - \beta t} = I(0)e^{-\beta t} \quad \forall t \in [0, T) \quad (801)$$

und somit wegen der Stetigkeit  $I(T) \geq I(0)e^{-\beta T} > 0$ .

**Schritt 3.  $\mathbb{Z}$ :**  $S(T) > 0$ . Beachte zunächst

$$S'(t) \stackrel{(792)}{=} -\alpha S(t)I(t) \leq 0 \quad \forall t \in [0, T). \quad (802)$$

Somit ist  $S$  monoton fallend auf  $[0, T)$ . Daher gilt für ein beliebiges  $t \in [0, T)$

$$\frac{d}{dt} \log I(t) = \frac{I'(t)}{I(t)} \stackrel{(792)}{=} \frac{\alpha S(t)I(t) - \beta I(t)}{I(t)} = \alpha S(t) - \beta \underset{S \downarrow}{\leq} \alpha S(0) - \beta \leq \alpha S(0). \quad (803)$$

Integriert man die vorige Ungleichung auf, so ergibt sich

$$\log I(t) - \log I(0) = \int_0^t \frac{d}{ds} \log I(s) ds \leq \int_0^t \alpha S(0) ds = \alpha S(0)t, \quad (804)$$

d.h.

$$\log I(t) \leq \log I(0) + \alpha S(0)t. \quad \xrightarrow{\text{Monotonie der e-Funktion}} \quad I(t) \leq I(0)e^{\alpha S(0)t}. \quad (805)$$

Wir erhalten dann

$$\frac{d}{dt} \log S(t) = \frac{S'(t)}{S(t)} \stackrel{(792)}{=} \frac{-\alpha S(t)I(t)}{S(t)} = -\alpha I(t) \geq -\alpha I(0)e^{\alpha S(0)t}. \quad (806)$$

Somit gilt

$$\log S(t) = \log S(0) + \int_0^t \frac{d}{d\tau} \log S(\tau) d\tau \geq \log S(0) - \alpha I(0) \int_0^t e^{\alpha S(0)\tau} d\tau \quad (807)$$

$$= \log S(0) - \alpha I(0) \frac{e^{\alpha S(0)t} - 1}{\alpha S(0)} = \log S(0) - I(0) \frac{e^{\alpha S(0)t}}{S(0)} + \frac{I(0)}{S(0)} \geq \log S(0) - \frac{I(0)}{S(0)} e^{\alpha S(0)t}. \quad (808)$$

Man folgert wiederum mit der Monotonie der Exponentialfunktion

$$S(t) = e^{\log S(t)} \geq e^{\log S(0) - \frac{I(0)}{S(0)} e^{\alpha S(0)t}} = S(0) e^{-\frac{I(0)}{S(0)} e^{\alpha S(0)t}} \quad \forall t \in [0, T]. \quad (809)$$

Wegen der Stetigkeit ergibt sich  $S(T) \geq S(0) e^{-\frac{I(0)}{S(0)} e^{\alpha S(0)T}} > 0$ . Es ist nun gezeigt, dass  $R(T) > 0$ ,  $I(T) > 0$  und  $S(T) > 0$ . Ein Widerspruch zur Wahl von  $T$  in (798). Es folgt  $T = b$  und somit die Behauptung.

Als Konsequenz lassen sich wichtige *Monotonieaussagen* treffen.

**Korollar 138.** DISKUSSION DER MONOTONIE. Es sei  $y \in C^1(J; \mathbb{R}^3)$ ,  $y(t) = (S(t), I(t), R(t))^T$  eine SIR-Pandemie. Dann gilt

1.  $S$  ist streng monoton fallend auf  $J \cap [0, \infty)$ .
2.  $R$  ist streng monoton wachsend auf  $J \cap [0, \infty)$ .

**Beweis.** Da  $y(t) \in Z$  für  $t \in J \cap [0, \infty)$  gilt  $S(t) > 0, I(t) > 0, R(t) > 0$  für alle  $t \in J \cap [0, \infty)$  und somit

$$S'(t) \stackrel{(792)}{=} -\alpha S(t)I(t) < 0, \quad R'(t) \stackrel{(792)}{=} \beta I(t) > 0. \quad (810)$$

Die Behauptungen folgen.

### 3.2.3 Rechtsglobalität

Wir haben nun gesehen, dass sich jede SIR-Pandemie stets im zulässigen Bereich  $Z$  abspielt. Da dieser beschränkt ist, folgt sofort die Rechtsglobalität.

**Korollar 139.** GLOBALITÄT DER PANDEMIE. Es sei  $y_0 \in Z$  beliebig. Dann ist die maxi-

male Lösung  $y \in C^1(\hat{I}; \mathbb{R}^3)$  von

$$\begin{cases} y_1'(t) = -\alpha y_1(t)y_2(t) \\ y_2'(t) = \alpha y_1(t)y_2(t) - \beta y_2(t) \\ y_3'(t) = \beta y_2(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (811)$$

stets rechtsglobal, d.h.  $\hat{I} \supset [0, \infty)$ .

**Beweis.** Es sei  $\hat{I} = (t_-, t_+)$ ,  $t_- < 0 < t_+$  und sei  $f$  wie in (794). Angenommen  $t_+ < \infty$ . Da  $f$  auf  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$  (d.h.  $G = \mathbb{R}^3$ ) definiert ist, muss eine Blow-Up Situation auftreten, d.h.  $\limsup_{t \rightarrow t_+} |y(t)| = \infty$ . Definiert man  $S(t) := y_1(t)$ ,  $I(t) := y_2(t)$ ,  $R(t) := y_3(t)$ , so ist  $y(t) = (S(t), I(t), R(t))^T$  aber nach Definition 135 eine SIR-Pandemie und deswegen gilt  $y(t) \in Z$  für alle  $t \in [0, t_+)$ . Insbesondere gilt  $S(t), I(t), R(t) \in (0, 1)$  für  $t \in [0, t_+)$  und somit

$$|y(t)| = \sqrt{S(t)^2 + I(t)^2 + R(t)^2} \leq \sqrt{3}. \quad (812)$$

Dies schließt eine Blow-Up Situation aus. Wir erhalten einen Widerspruch und folgern  $t_+ = \infty$ .

Von jetzt an werden wir bei einer SIR-Pandemie  $y \in C^1(J; \mathbb{R}^3)$  stets implizit annehmen, dass  $J \supset [0, \infty)$ .

### 3.2.4 Ein Integral der Bewegung

Das SIR-Pandemiemodell besitzt ein nützliches Integral der Bewegung, welches wir im Folgenden vorstellen.

**Proposition 140.** EIN INTEGRAL DER BEWEGUNG. Es sei  $y \in C^1(J; \mathbb{R}^3)$ ,  $y(t) = (S(t), I(t), R(t))^T$  eine SIR-Pandemie. Dann gilt

$$\log S(t) + \frac{\alpha}{\beta} R(t) = \log S(0) + \frac{\alpha}{\beta} R(0) \quad \forall t \in I. \quad (813)$$

**Beweis.**

$$\frac{d}{dt} \log S(t) = \frac{S'(t)}{S(t)} \stackrel{(792)}{=} \frac{-\alpha S(t)I(t)}{S(t)} = -\alpha I(t) = -\frac{\alpha}{\beta} (\beta I(t)) \stackrel{(792)}{=} -\frac{\alpha}{\beta} R'(t). \quad (814)$$

Umgeformt bedeutet das

$$\frac{d}{dt} \left( \log S(t) + \frac{\alpha}{\beta} R(t) \right) = \frac{d}{dt} \log S(t) + \frac{\alpha}{\beta} R'(t) \stackrel{(814)}{=} 0. \quad (815)$$

Die Behauptung folgt.

### 3.3 Epidemiologische Phänomene

#### 3.3.1 Der Höhepunkt der Pandemie

Abbildung 3 zeigt folgenden Verlauf einer Infektionskurve  $t \mapsto I(t)$ : Zuerst steigen die Infektionen an, dann erreichen sie ein Plateau und danach fallen sie ab. Wir fragen uns: Wo ist dieser *Höhepunkt der Pandemie*? Wird er stets erreicht? Und wie viele Menschen sind an diesem Höhepunkt gleichzeitig infiziert?

**Motivation 141.** Um den Verlauf der Infektionskurve nachvollziehen zu können diskutieren wir das Wachstum von  $t \mapsto I(t)$ . Dazu

$$I'(t) \stackrel{(792)}{=} I(t)(\alpha S(t) - \beta) \begin{cases} > 0 & S(t) > \frac{\beta}{\alpha} \\ < 0 & S(t) < \frac{\beta}{\alpha} \\ = 0 & S(t) = \frac{\beta}{\alpha} \end{cases}. \quad (816)$$

Erreicht die Infektionskurve nun ein globales Maximum bei  $t = t^* \in [0, \infty)$ , so muss dort  $I'(t^*) = 0$  gelten. Gleichung (816) liefert dann  $S(t^*) = \frac{\beta}{\alpha}$ . Beachte: Falls  $S(0) < \frac{\beta}{\alpha}$ , so gilt aufgrund der Monotonie von  $S$  (siehe Korollar 138), dass  $S(t) \leq S(0) < \frac{\beta}{\alpha}$  für alle  $t \geq 0$ . Einen Wert  $t^* \in [0, \infty)$  mit  $S(t^*) = \frac{\beta}{\alpha}$  kann es in diesem Fall also nicht geben.

Wird der Höhepunkt denn wenigstens immer erreicht falls  $S(0) > \frac{\beta}{\alpha}$ ?

**Satz 142. EXISTENZ DES HÖHEPUNKTES.** Es sei  $y \in C^1(J; \mathbb{R}^3)$  eine SIR-Pandemie mit  $S(0) > \frac{\beta}{\alpha}$  (mit  $J \supset [0, \infty)$ ). Dann gibt es genau ein  $t^* \in [0, \infty)$  mit  $S(t^*) = \frac{\beta}{\alpha}$ . Ferner ist  $t^*$  die eindeutige Maximumsstelle von  $I$  in  $[0, \infty)$ , also insbesondere

$$I(t^*) = \max_{t \in [0, \infty)} I(t). \quad (817)$$

**Beweis. Schritt 1. Zur Existenz von  $t^*$ .** Angenommen es gibt kein  $t^* \in [0, \infty)$  mit  $S(t^*) = \frac{\beta}{\alpha}$ . Dann gilt  $S(t) > \frac{\beta}{\alpha}$  für alle  $t \geq 0$  (denn falls es ein  $\tilde{t} \geq 0$  gäbe mit  $S(\tilde{t}) \leq \frac{\beta}{\alpha}$  so gäbe es nach dem Zwischenwertsatz, weil  $S(0) > \frac{\beta}{\alpha}$ , auch ein  $\xi \in [0, \tilde{t}]$  mit  $S(\xi) = \frac{\beta}{\alpha}$ , was sofort ein Widerspruch zu unserer Annahme wäre). Da  $S(t) > \frac{\beta}{\alpha}$  gilt nach (816)  $I'(t) > 0$ . Wir folgern daher dass  $I$  auf  $[0, \infty)$  monoton wachsend ist. Mit (792) folgt

$$R'(t) = \beta I(t) \geq \beta I(0) \quad \forall t \geq 0. \quad (818)$$

Somit gilt

$$R(t) = R(0) + \int_0^t R'(s) \, ds \geq R(0) + \int_0^t \beta I(0) \, ds = R(0) + \beta I(0)t. \quad (819)$$

Dies würde zur Folge haben, dass  $\lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = \infty$ , was im Widerspruch zu  $y(t) \in Z \subset (0, 1)^3$  für alle  $t \in [0, \infty)$  (siehe Satz 137) steht (denn dies impliziert, dass  $R(t) \in (0, 1)$ ). Es folgt die Existenz von  $t^*$ .

**Schritt 2. Eindeutigkeit von  $t^*$ .** Da  $S$  streng monoton fallend in  $[0, \infty)$  ist kann die Gleichung  $S(t) = \frac{\beta}{\alpha}$  höchstens eine Lösung in  $[0, \infty)$  haben.

**Schritt 3.  $t^*$  ist eindeutige Maximumsstelle von  $I$ .** Wir zeigen zuerst, dass  $t \mapsto \log I(t)$  konkav ist. Dazu:

$$\frac{d}{dt} \log I(t) = \frac{I'(t)}{I(t)} \stackrel{(816)}{=} \alpha S(t) - \beta. \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2}{dt^2} \log I(t) = \alpha S'(t) \stackrel{(792)}{=} -\alpha^2 S(t) I(t) < 0. \quad (820)$$

Wir wissen aus Proposition 71 dass für eine konkave Funktion  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  ein Punkt  $x \in (a, b)$  genau dann eine globale Maximumsstelle von  $f$  ist wenn  $f'(x) = 0$ . Angewendet auf  $f(x) := \log I(x)$  und  $(a, b) = (0, \infty)$  erhalten wir

$$x \text{ Maximumsstelle von } I \text{ in } (0, \infty) \stackrel{\text{log monoton}}{\iff} x \text{ Maximumsstelle von } \log I \text{ in } (0, \infty) \quad (821)$$

$$\begin{aligned} \stackrel{\text{log } I \text{ konkav}}{\iff} \frac{d}{dx} \log I(x) = 0 &\stackrel{(820)}{\iff} \alpha S(x) - \beta = 0 \\ \iff S(x) = \frac{\beta}{\alpha} &\iff x = t^*. \end{aligned} \quad (822)$$

Beachte nun, dass 0 keine Maximumsstelle sein kann, da wegen der Voraussetzung  $S(0) > \frac{\beta}{\alpha}$  gilt, dass  $I'(0) = I(0)(\alpha S(0) - \beta) > 0$ . (Somit ist  $I$  in  $[0, \delta)$  streng monoton wachsend für ein  $\delta > 0$ , weswegen bei 0 kein globales Maximum vorliegen kann). Daher ist  $t^*$  nicht nur die eindeutige Maximumsstelle in  $(0, \infty)$ , sondern auch die eindeutige Maximumsstelle in  $[0, \infty)$ .

**Anmerkung 143.** Es sei  $y \in C^1(J; \mathbb{R}^3)$  eine SIR-Pandemie mit  $S(0) > \frac{\beta}{\alpha}$ . Dann gilt nach (816) und wegen der strengen Monotonie von  $S$

$$I'(t) \begin{cases} > 0 & S(t) > \frac{\beta}{\alpha} \\ < 0 & S(t) < \frac{\beta}{\alpha} \end{cases} \quad \begin{cases} > 0 & S(t) > S(t^*) \\ < 0 & S(t) < S(t^*) \end{cases} \quad \begin{cases} > 0 & t < t^* \\ < 0 & t > t^* \end{cases}. \quad (823)$$

Das bedeutet, dass  $I$  streng monoton steigend ist auf  $(0, t^*)$  und streng monoton fallend auf  $(t^*, \infty)$ .

Wir fragen uns noch, wie viele Personen eigentlich zum Höhepunkt der Pandemie gleichzeitig infiziert sind, also wie schlimm der Höhepunkt der Pandemie wirklich wird. Diese Frage können wir mit dem Integral der Bewegung beantworten.

**Proposition 144.** DIE MAXIMALE INFEKTIONSZAHL. Es sei  $y \in C^1(J; \mathbb{R}^3)$ ,  $y(t) = (S(t), I(t), R(t))^T$  eine SIR-Pandemie mit  $S(0) > \frac{\beta}{\alpha}$ . Dann gilt

$$\max_{t \in [0, \infty)} I(t) = I(0) + S(0) - \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha} \left( \log \frac{\beta}{\alpha} - \log S(0) \right). \quad (824)$$

**Beweis.** Es sei  $t^* \in [0, \infty)$  wie im vorigen Satz. Proposition 140 liefert

$$\log S(t^*) + \frac{\alpha}{\beta} R(t^*) = \log S(0) + \frac{\alpha}{\beta} R(0). \quad (825)$$

Wir erhalten, dass

$$R(t^*) = \frac{\beta}{\alpha} (\log S(0) - \log S(t^*)) + R(0). \quad (826)$$

Nun benutzen wir, dass  $S(t^*) + I(t^*) + R(t^*) = 1$  (da  $y(t^*) \in Z$ ) und erhalten

$$1 - S(t^*) - I(t^*) = \frac{\beta}{\alpha} (\log S(0) - \log S(t^*)) + R(0). \quad (827)$$

Formen wir um, so ergibt sich

$$I(t^*) = 1 - R(0) - S(t^*) + \frac{\beta}{\alpha} (\log S(t^*) - \log S(0)) \quad (828)$$

$$\stackrel{y(0) \in Z}{=} I(0) + S(0) - S(t^*) + \frac{\beta}{\alpha} (\log S(t^*) - \log S(0)). \quad (829)$$

Mit Satz 142 folgt  $S(t^*) = \frac{\beta}{\alpha}$  und daher

$$I(t^*) = I(0) + S(0) - \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha} \left( \log \frac{\beta}{\alpha} - \log S(0) \right). \quad (830)$$

Da (wiederum nach Satz 142)  $I(t^*) = \max_{t \in [0, \infty)} I(t)$  folgt die Behauptung.

**Anmerkung 145.** In der Epidemiologie definiert man die *Basisreproduktionszahl*

$$\text{Rep}_0 := \frac{\alpha}{\beta} \stackrel{\text{Modellannahmen 134}}{=} pk \cdot (\text{durchschn. Dauer der Infektion}), \quad (831)$$

wobei  $p$  die Übertragungswahrscheinlichkeit des Virus ist und  $k$  die Anzahl der Gesamtkontakte geteilt durch die Anzahl Individuen in der Bevölkerung in einer Zeiteinheit. Letzteres kann man auch Interpretieren als die Anzahl der Kontakte eines Individuums. Damit ist  $\text{Rep}_0$  das Produkt aus Kontaktanzahl eines Individuums, Dauer der Infektion und Übertragungswahrscheinlichkeit. Mit anderen Worten: Es ist die Anzahl der Individuen, die ein Infizierter während seiner gesamten *Infektionskarriere* ansteckt. Diese kann man epidemiologisch beobachten. Für das (nicht-mutierte) Sars-Cov 2 Virus wurde diese

auf  $\text{Rep}_0 \approx 3$  geschätzt.

Nun gilt für den Höhepunkt  $t^*$  der Pandemie, dass  $S(t^*) = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{\text{Rep}_0}$ . Somit gilt auch

$$R(t^*) + I(t^*) = 1 - S(t^*) = 1 - \frac{1}{\text{Rep}_0}. \quad (832)$$

Mit anderen Worten: Ein Anteil von  $1 - \frac{1}{\text{Rep}_0}$  der Bevölkerung muss eine Infektion durchmachen, damit der Höhepunkt der Pandemie erreicht ist und die Bevölkerung damit “über den Berg” ist. (Bei Sars-Cov 2 ist  $1 - \frac{1}{\text{Rep}_0} = \frac{2}{3} \approx 66\%$ . Diese Schätzung war zum Anfang der Sars-Cov 2 Pandemie im Jahr 2020 auch häufiger in den Nachrichten). Es ist hilfreich, wenn man Dinge über  $\text{Rep}_0$  anstatt nur über  $\alpha, \beta$  ausdrücken kann: In der Praxis ist  $\text{Rep}_0$  viel leichter empirisch zu schätzen als  $\alpha$  und  $\beta$ .

### 3.3.2 Herdenimmunität

Wir weisen nun nach, dass nach dem Erreichen des Höhepunktes der Pandemie eine *Herdenimmunität* besteht, d.h. die Pandemie breitet sich nicht weiter aus und fällt *exponentiell schnell* ab.

**Propositon 146. HERDENIMMUNITÄT.** Es sei  $y \in C^1(J; \mathbb{R}^3)$ ,  $y(t) = (S(t), I(t), R(t))^T$  eine SIR-Pandemie mit  $S(0) > \frac{\beta}{\alpha}$ . Es sei  $t^* \geq 0$  wie in Satz 142. Dann gilt für alle  $t_1 > t^*$  dass  $\alpha S(t_1) - \beta < 0$  und

$$I(t) \leq I(t_1)e^{(\alpha S(t_1) - \beta)(t - t_1)} \quad \forall t \geq t_1. \quad (833)$$

**Beweis.** Da  $t_1 > t^*$  gilt (wegen der strengen Monotonie von  $S$ , siehe Korollar 138), dass  $S(t_1) < S(t^*) = \frac{\beta}{\alpha}$ . Somit folgt sofort  $\alpha S(t_1) - \beta < 0$ . Nun gilt für alle  $t \in [t_1, \infty)$  (da  $I(t) > 0$ )

$$I'(t) \stackrel{(792)}{=} I(t)(\alpha S(t) - \beta) \leq I(t)(\alpha S(t_1) - \beta) = (\alpha S(t_1) - \beta)I(t) \quad (834)$$

Dies ist eine lineare Differentialungleichung im Sinne von Korollar 112. Somit gilt

$$I(t) \leq h(t) \quad \forall t \geq t_1 \quad \text{wobei } h \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}) \text{ so, dass } \begin{cases} h'(t) = (\alpha S(t_1) - \beta)h(t) \\ h(t_1) = I(t_1) \end{cases} \quad (835)$$

Da wir in Satz 20 / Anmerkung 21 eine explizite Lösungsformel für Differentialgleichungen dieser Form haben, erhalten wir  $h(t) = I(t_1)e^{(\alpha S(t_1) - \beta)(t - t_1)}$  und somit folgt  $I(t) \leq I(t_1)e^{(\alpha S(t_1) - \beta)(t - t_1)}$  für alle  $t \geq t_1$ .

Als Korollar erhalten wir, dass jede Pandemie für große Zeiten *exponentiell schnell* abfällt.



**Korollar 147.** Es sei  $y \in C^1(J; \mathbb{R}^3)$ ,  $y(t) = (S(t), I(t), R(t))^T$  eine SIR-Pandemie. Dann gibt es ein  $\delta > 0$  mit  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\delta t} I(t) = 0$ . Man schreibt  $I(t) = o(e^{-\delta t})$  für  $(t \rightarrow \infty)$ .

**Beweis.** FALL 1.  $S(0) > \frac{\beta}{\alpha}$ . Wir haben in der vorigen Proposition gesehen, dass es in diesem Fall ein  $t_1 > 0$  gibt mit  $\alpha S(t_1) - \beta < 0$  und  $I(t) \leq I(t_1)e^{(\alpha S(t_1) - \beta)(t - t_1)}$  für alle  $t \geq t_1$ . Wählen wir  $\delta := -\frac{1}{2}(\alpha S(t_1) - \beta) > 0$  so gilt für  $t \geq t_1$

$$0 \leq e^{\delta t} I(t) \leq e^{\delta t} I(t_1) e^{(\alpha S(t_1) - \beta)(t - t_1)} = e^{\delta t} I(t_1) e^{(-2\delta)(t - t_1)} = I(t_1) e^{2\delta t_1 - \delta t} \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty). \quad (836)$$

Die Behauptung folgt aus dem Sandwichlemma für Grenzwerte (Analysis)

FALL 2.  $S(0) \leq \frac{\beta}{\alpha}$ . Das heißt insbesondere  $\alpha S(0) - \beta \leq 0$ . In diesem Fall gilt für alle  $t_1 > 0$ , dass  $\alpha S(t_1) - \beta < 0$ . Wähle nun  $t_1 > 0$  fix. Für  $t \geq t_1$  kann man dann wie in (834) zeigen, dass

$$I'(t) = I(t)(\alpha S(t) - \beta) \leq I(t)(\alpha S(t_1) - \beta). \quad (837)$$

Genau wie im Beweis von Proposition 146 folgt dann

$$I(t) \leq I(t_1) e^{(\alpha S(t_1) - \beta)(t - t_1)} \quad (838)$$

Definiert man wiederum  $\delta := -\frac{1}{2}(\alpha S(t_1) - \beta) > 0$  so folgt mit der gleichen Rechnung wie in (836), dass  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\delta t} I(t) = 0$ .

### 3.3.3 Pandemie und Endemie

Neben einer Pandemie gibt es noch das Phänomen der *Endemie*. Das bedeutet, man kann sich nach der Genesung einer Virusinfektion *erneut infizieren*. Dies macht einen Übergang von der Gruppe  $R$  in die Gruppe  $S$  möglich und führt auf das folgende DGL-System:

$$\begin{cases} S'(t) = -\alpha S(t)I(t) + \gamma R(t) \\ I'(t) = \alpha S(t)I(t) - \beta I(t) \\ R'(t) = \beta I(t) - \gamma R(t) \end{cases} \quad (839)$$

Hierbei ist  $\gamma > 0$  in den meisten Anwendungen gegeben durch

$$\gamma = \frac{1}{\text{durchschnittliche Dauer der Immunität nach durchgemachter Infektion}}. \quad (840)$$

Für dieses DGL-System müssen unsere Fragen völlig neu geklärt werden: Die Frage nach der Zulässigkeit, die Frage nach der maximalen Infiziertenzahl und die Frage nach dem Verhalten für  $t \rightarrow \infty$ . Einige dieser Fragen werden wir im nächsten Kapitel mit allgemeinen Methoden klären. Es gibt aber auch noch einiges zu erforschen!

## 4 Dynamische Systeme

Ein *dynamisches System* ist ein Modell für einen zeitabhängigen Prozess mit *Flusseigenschaft*

**Definition 148.** Es sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Eine Abbildung  $\phi : [0, \infty) \times X \rightarrow X$  heißt *(semi-)dynamisches System*, falls

(D1)  $\phi(0, x) = x$  für alle  $x \in X$ .

(D2)  $\phi(t + s, x) = \phi(t, \phi(s, x))$  für alle  $s, t \geq 0$  und  $x \in X$ .

(D3)  $\phi$  ist stetig.

Oft wird (D2) *Flusseigenschaft* genannt.

Unser Paradebeispiel für ein dynamisches System wird sich aus der Flussabbildung einer *autonomen Differentialgleichung* ergeben. Was eine solche autonome DGL ist besprechen wir im Folgenden. Bevor wir dies näher diskutieren sei aber gesagt, dass es noch viele andere dynamische Systeme in Natur und Mathematik gibt (z.B. bei partiellen DGLn, oder auch diskrete dynamische Systeme).

## 4.1 Autonome Differentialgleichungen

Wir erinnern uns, dass wir für  $G \subset \mathbb{R}^n$  eine stetige Funktion  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$  auch *Vektorfeld* nennen.

**Definition 149.** Es sei  $G \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet und  $f \in C^0(G; \mathbb{R}^n)$  ein Vektorfeld. Wir nennen  $f$  lokal Lipschitzstetig (im Zeichen  $f \in C_{loc}^{0,1}(G; \mathbb{R}^n)$ ) falls es für alle  $z \in G$  ein  $\varepsilon > 0$  und  $L > 0$  gibt mit  $\overline{B_\varepsilon(z)} \subset G$  und

$$|f(z_2) - f(z_1)| \leq L|z_2 - z_1| \quad \forall z_1, z_2 \in \overline{B_\varepsilon(z)}. \quad (841)$$

Beachte: Ist  $f \in C_{loc}^{0,1}(G; \mathbb{R}^n)$ , so erfüllt  $\tilde{f} : \mathbb{R} \times G \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definiert durch  $\tilde{f}(\tau, z) := f(z)$  stets eine lokale Lipschitzbedingung. Im Folgenden studieren wir *autonome Differentialgleichungen*:

**DGL-Typ 150.** Es sei  $f \in C_{loc}^{0,1}(G; \mathbb{R}^n)$  ein Vektorfeld. Eine *autonome Differentialgleichungssystem* ist ein DGL-System von der Form

$$y'(t) = f(y(t)). \quad (842)$$

**Beispiel 151.** Die SIR-Pandemiegleichung (792) ist ein autonomes DGL-System mit Vektorfeld

$$f(z_1, z_2, z_3) = \begin{pmatrix} -\alpha z_1 z_2 \\ \alpha z_1 z_2 - \beta z_2 \\ \beta z_2 \end{pmatrix}. \quad (843)$$

### 4.1.1 Das induzierte dynamische System

Eine spezielle Eigenschaft von Lösungen autonomer Differentialgleichungen ist die *Shift-Invarianz*.

**Proposition 152.** Es sei  $f \in C_{loc}^{0,1}(G, \mathbb{R}^n)$  und  $y \in C^1((a, b); G)$  eine Lösung von  $y'(t) = f(y(t))$ ,  $(t \in (a, b))$ . Sei außerdem  $s \in \mathbb{R}$ . Dann ist  $z : (a - s, b - s) \rightarrow G$ ,  $z(t) := y(t + s)$  eine Lösung von  $z'(t) = f(z(t))$ ,  $(t \in (a - s, b - s))$ .

**Beweis.** Für  $t \in (a - s, b - s)$  gilt  $t + s \in (a, b)$  und daher

$$z'(t) = y'(t + s) = f(y(t + s)) = f(z(t)). \quad (844)$$

**Korollar 153.** Es sei  $f \in C_{loc}^{0,1}(G; \mathbb{R}^n)$ . Es sei  $y \in C^1(\hat{I}; \mathbb{R}^n)$ ,  $\hat{I} = (t_-, t_+)$  maximale Lösung zu

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}. \quad (845)$$

Dann ist  $z : (t_- - t_0, t_+ - t_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$  gegeben durch  $z(t) := y(t + t_0)$  maximale Lösung zu

$$\begin{cases} z'(t) = f(z(t)) \\ z(0) = y_0 \end{cases} \quad (846)$$

**Beweis.** Dass  $z$  eine Lösung ist von (846) ist, folgt aus der vorigen Proposition. Nun zur Maximalität von  $z$ . Angenommen es gibt eine weitere Lösung  $\tilde{z} : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$  von

$$\begin{cases} \tilde{z}'(t) = f(\tilde{z}(t)) & (t \in (\alpha, \beta)) \\ \tilde{z}(0) = y_0 \end{cases} \quad (847)$$

Definiere dann  $\tilde{y} : (\alpha + t_0, \beta + t_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$  durch  $\tilde{y}(t) = \tilde{z}(t - t_0)$ . Dann gilt (wiederum nach der vorigen Proposition)

$$\begin{cases} \tilde{y}'(t) = f(\tilde{y}(t)) & (t \in (\alpha + t_0, \beta + t_0)) \\ \tilde{y}(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (848)$$

Da  $y$  die maximale Lösung dieses Anfangswertproblems ist, gilt  $(\alpha + t_0, \beta + t_0) \subset (t_-, t_+)$  und man hat  $\tilde{y}(t) = y(t)$  für alle  $t \in (\alpha + t_0, \beta + t_0)$ . Es folgt  $(\alpha, \beta) \subset (t_- - t_0, t_+ - t_0)$  und  $\tilde{y}(t + t_0) = y(t + t_0)$  für alle  $t \in (\alpha, \beta)$ . Benutzen wir nun die Definition von  $\tilde{y}$  und  $z$  so erhalten wir  $(\alpha, \beta) \subset (t_- - t_0, t_+ - t_0)$  und  $\tilde{z}(t) = z(t)$  für alle  $t \in (\alpha, \beta)$ . Dies zeigt die Maximalität.

Aus dieser Shift-Invarianz folgt, dass die Flussabbildung bei  $t_0 = 0$  bereits alle Informationen über Lösungen der DGL enthält.

**Korollar 154.** Es sei  $f \in C_{loc}^{0,1}(G; \mathbb{R}^n)$  und  $\Phi$  die zu  $y'(t) = f(y(t))$  assoziierte Flussbildung. Dann gilt

$$\Phi(t, (t_0, y_0)) = \Phi(t - t_0, (0, y_0)) \quad (849)$$

**Beweis.** Dies folgt direkt aus dem vorigen Korollar, denn sind  $y$  und  $z$  wie im vorigen Korollar, dann gilt

$$y(s) = \Phi(s, (t_0, y_0)), \quad z(s) = \Phi(s, (0, y_0)). \quad (850)$$

Da nach dem vorigen Korollar auch gilt  $z(t) = y(t + t_0)$ , für alle  $t$  wo zulässig, folgert man  $\Phi(t, (t_0, y_0)) = \Phi(t + t_0, (0, y_0))$

Das bedeutet, dass jede Trajektorie einer Lösung auch eine Trajektorie einer Lösung mit Anfangszeitpunkt 0 ist. Daher geben uns die Lösungen mit Anfangszeitpunkt  $t_0 = 0$  bereits eine vollständige Information über das DGL-System.

**Definition 155.** FLUSS EINES VEKTORFELDES. Es sei  $f \in C_{loc}^{0,1}(G; \mathbb{R}^n)$ . Für alle  $y_0 \in G$  sei  $\hat{I}(0, y_0)$  das maximale Existenzintervall der eindeutigen maximalen Lösung von

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t)) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (851)$$

Definiere  $A := \{(\tau, z) : z \in G, \tau \in \hat{I}(0, z)\}$ . Dann definieren wir den *Fluss von  $f$*  durch  $\phi : A \rightarrow G$  mit  $\phi(t, y_0) := \Phi(t, (0, y_0)) [= y(t) \text{ aus (851)}]$ . Manchmal schreiben wir auch  $\phi = \phi_f$ .

Wir werden nun nachweisen: Falls  $A \supset [0, \infty) \times G$ , so ist der Fluss  $\phi$  ein dynamisches System im Sinne von Definition 148. Hierfür prüfen wir die Axiome nach (und werden diese auch besprechen im Fall, dass  $A \not\supset [0, \infty) \times G$ ). Zuerst zur Stetigkeit (D3).

**Lemma 156.** Es sei  $f \in C_{loc}^{0,1}(G; \mathbb{R}^n)$  und  $A, \phi$  wie in der vorigen Definition. Dann ist  $A \subset \mathbb{R} \times G$  offen und  $\phi$  stetig auf  $A$ .

**Beweis.** Zunächst zur Offenheit von  $A$ . Es sei  $(\tau, z) \in A$ , d.h.  $\tau \in \hat{I}(0, z) := (t_-(0, z), t_+(0, z))$ . OBdA  $\tau > 0$ , ansonsten funktioniert alles analog. Da  $\tau < t_+(0, z)$  gibt es ein  $\eta \in (0, |\tau|)$  mit  $\tau + \eta < t_+(0, z)$ , insbesondere  $\tau + \eta \in \hat{I}(0, z)$ . Nach Satz 130a gibt es ein  $\delta > 0$  so, dass  $|z - \tilde{z}| < \delta$  impliziert, dass  $\tau + \eta \in \hat{I}(0, \tilde{z})$ . Dies heißt dann insbesondere, dass

$$(\tau - \eta, \tau + \eta) \subset (0, \tau + \eta) \subset \hat{I}(0, \tilde{z}). \quad \Rightarrow (\tau - \eta, \tau + \eta) \times \{\tilde{z}\} \subset A. \quad (852)$$

Wir schließen, dass  $(\tau - \eta, \tau + \eta) \times B_\delta(z) \subset A$ , womit die Offenheit von  $A$  bewiesen ist. Dass  $\Phi$  auf  $A$  stetig ist folgt auch direkt aus der stetigen Abhängigkeit der Flussabbildung,

siehe Satz 130a.

Nun zur Flusseigenschaft (D2).

**Lemma 157.** Es sei  $f \in C_{loc}^{0,1}(G; \mathbb{R}^n)$  und  $\phi : A \rightarrow G$  wie in Definition 155. Sei  $y_0 \in G$ . Sind  $s, \tau \in \mathbb{R}$  so, dass  $(s, y_0) \in A$  und  $(\tau, \phi(s, y_0)) \in A$ , so gilt  $(s + \tau, y_0) \in A$  und

$$\phi(s + \tau, y_0) = \phi(\tau, \phi(s, y_0)). \quad (853)$$

**Beweis.** Es sei  $y \in C^1(\hat{I}(0, y_0); \mathbb{R}^n)$  die eindeutige maximale Lösung zu

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t)) \\ y(0) = y_0 \end{cases}. \quad (854)$$

Da  $(s, y_0) \in A$  lässt sich  $y$  bei  $s$  auswerten und es gilt  $\phi(s, y_0) = y(s)$ . Sei nun  $z \in C^1(\hat{I}(0, \phi(s, y_0)); \mathbb{R}^n)$  die eindeutige maximale Lösung zu

$$\begin{cases} z'(t) = f(z(t)) \\ z(0) = y(s) [= \phi(s, y_0)]. \end{cases} \quad (855)$$

Aus der Voraussetzung folgt, dass  $\tau \in \hat{I}(0, \phi(s, y_0))$  und  $z(\tau) = \phi(\tau, \phi(s, y_0))$ . Wir behaupten nun, dass  $\hat{I}(0, \phi(s, y_0)) = \hat{I}(0, y_0) - s$  und  $z(t) = y(t+s)$  für alle  $t \in \hat{I}(0, \phi(s, y_0))$ . Beobachte dazu zuerst, dass  $t \mapsto z(t)$  und  $t \mapsto y(t+s)$  beides Lösungen von (855) sind. Da  $z$  und  $y$  auch maximale Lösungen sind, müssen auch  $t \mapsto z(t)$  und  $t \mapsto y(t+s)$  maximale Lösungen sein (was man exakt wie in Korollar 153 beweist). Da die maximale Lösung eindeutig ist, müssen diese beiden Lösungen übereinstimmen. Da insbesondere auch ihre Definitionsbereiche übereinstimmen haben wir  $\hat{I}(0, \phi(s, y_0)) = \hat{I}(0, y_0) - s$ . Somit gilt (da  $\tau \in \hat{I}(0, \phi(s, y_0)) = \hat{I}(0, y_0) - s$ ), dass  $\tau + s \in \hat{I}(0, y_0)$ , weswegen  $(\tau + s, y_0) \in A$ . Ferner haben wir

$$\phi(\tau + s, y_0) = y(\tau + s) = z(\tau) = \phi(\tau, \phi(s, y_0)). \quad (856)$$

Die Behauptung folgt.

**Korollar 158.** Es sei  $f \in C_{loc}^{0,1}(G; \mathbb{R}^n)$ . Und  $\phi : A \rightarrow G$  wie in Definition 155. Ist  $A \supset [0, \infty) \times G$ , so ist  $\phi : [0, \infty) \times G \rightarrow G$  ein dynamisches System im Sinne von Definition 148.

**Beweis.** (D2) und (D3) folgen sofort aus den beiden vorherigen Lemmata. Zu (D1). Nach (733) gilt

$$\phi(0, x) = \Phi(0, (0, x)) = x \quad \forall x \in G. \quad (857)$$

Wir haben also gesehen, dass für jedes  $f \in C_{loc}^{0,1}(G; \mathbb{R}^n)$  der Fluss  $\phi_f$  also dynamisches System verstanden werden kann. Jedenfalls sofern  $y'(t) = f(y(t))$  stets rechtsglobale Lösungen besitzt.

### 4.1.2 Bahnen

**Definition 159.** BAHNEN/ORBITS. Es sei  $f \in C_{loc}^{0,1}(G; \mathbb{R}^n)$ . Für  $y_0 \in G$  nennen wir

$$\mathcal{O}(y_0) := \{\phi(t, y_0) : t \in \hat{I}(0, y_0)\} \quad (858)$$

die *Bahn* oder das *Orbit* von  $y_0$ . Ferner ist

$$\mathcal{O}^+(y_0) := \{\phi(t, y_0) : t \in \hat{I}(0, y_0) \cap [0, \infty)\} \quad (859)$$

die *Positiv-Bahn* oder das *Positiv-Orbit* von  $y_0$ .

**Beispiel 160.** Gegeben sei das autonome DGL-System

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_2(t) \\ y_1(t) + y_1(t)^2 + y_2(t)^2 - 1 \end{pmatrix}. \quad (860)$$

Das bedeutet  $G = \mathbb{R}^2$  und  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ist gegeben durch

$$f(z_1, z_2) = \begin{pmatrix} -z_2 \\ z_1 + z_1^2 + z_2^2 - 1 \end{pmatrix}. \quad (861)$$

Klarerweise gilt  $f \in C_{loc}^{0,1}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ . **Beobachtung:**  $t \mapsto (\cos(t), \sin(t))^T$ , ( $t \in \mathbb{R}$ ) ist eine Lösung (wie man leicht nachrechnet). Somit ist  $\phi(t, (1, 0)^T) = (\cos(t), \sin(t))^T$  und

$$\mathcal{O}((1, 0)^T) = \{(\cos(t), \sin(t))^T : t \in \mathbb{R}\} = \partial B_1(0). \quad (862)$$

Bahnen sind also Trajektorien von Lösungen. Wir werden später sehen, dass sich das Gebiet  $G$  in disjunkte Bahnen *zerlegen* lässt.

**Proposition 161.** Es sei  $f \in C_{loc}^{0,1}(G; \mathbb{R}^n)$ . Sei  $y_0 \in G$  und  $s \in \hat{I}(0, y_0)$ . Dann gilt

$$\mathcal{O}(y_0) = \mathcal{O}(\phi(s, y_0)) \quad (863)$$

**Beweis.** Zu ‘ $\supset$ ’. es sei  $z \in \mathcal{O}(\phi(s, y_0))$ , etwa  $z = \phi(\tau, \phi(s, y_0))$  für ein  $\tau \in \hat{I}(0, \phi(s, y_0))$ . Nach Lemma 157 gilt  $\tau + s \in \hat{I}(0, y_0)$  und

$$z = \phi(\tau, \phi(s, y_0)) = \phi(\tau + s, y_0) \in \mathcal{O}(y_0) \quad (864)$$

Zu ‘ $\subset$ ’. Mit der bereits gezeigten Richtung folgt  $\mathcal{O}(\phi(s, y_0)) \subset \mathcal{O}(\phi(-s, \phi(s, y_0)))$  und wir schließen

$$\mathcal{O}(\phi(s, y_0)) \subset \mathcal{O}(\phi(-s, \phi(s, y_0))) = \mathcal{O}(\phi(-s + s, y_0)) = \mathcal{O}(\phi(0, y_0)) = \mathcal{O}(y_0). \quad (865)$$

Wir werden nun zeigen, dass zwei Bahnen zu verschiedenen Anfangswerten entweder gleich oder disjunkt sind. Somit ist  $G$  zerlegt in die disjunkte Vereinigung verschiedener Bahnen.

**Proposition 162.** BAHNEN KREUZEN SICH NICHT! Es seien  $y_1, y_2 \in G$ . Dann gilt entweder  $\mathcal{O}(y_1) = \mathcal{O}(y_2)$  oder  $\mathcal{O}(y_1) \cap \mathcal{O}(y_2) = \emptyset$ .

**Beweis.** Es seien  $y_1, y_2 \in G$  mit  $\mathcal{O}(y_1) \cap \mathcal{O}(y_2) \neq \emptyset$ .  $\mathbb{Z} \mathcal{O}(y_1) = \mathcal{O}(y_2)$ . Dazu: Ist  $z \in \mathcal{O}(y_1) \cap \mathcal{O}(y_2)$ , so gibt es  $t_1 \in \hat{I}(0, y_1)$  mit  $z = \phi(t_1, y_1)$  und  $t_2 \in \hat{I}(0, y_2)$  mit  $z = \phi(t_2, y_2)$ . Die vorige Proposition liefert dann

$$\mathcal{O}(y_1) = \mathcal{O}(\phi(t_1, y_1)) = \mathcal{O}(z) = \mathcal{O}(\phi(t_2, y_2)) = \mathcal{O}(y_2). \quad (866)$$

Dass Bahnen sich nicht kreuzen, kann auch zum Nachweis von Beschränktheit von Lösungen und somit für Globalität verwendet werden, wie zum Beispiel hier:

**Beispiel 163.** Wir betrachten nochmal das autonome DGL-System aus Beispiel 160.

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_2(t) \\ y_1(t) + y_1(t)^2 + y_2(t)^2 - 1 \end{pmatrix} \quad (867)$$

**Behauptung.** Für alle  $y_0 \in B_1(0)$  gilt  $\hat{I}(0, y_0) = \mathbb{R}$  und  $\mathcal{O}(y_0) \subset B_1(0)$ .

**Begründung.** Aus Beispiel 160 wissen wir, dass  $\partial B_1(0) = \mathcal{O}((1, 0)^T)$  eine Bahn ist. Es sei nun  $y_0 \in B_1(0)$ . Dann ist  $\mathcal{O}(y_0) \neq \mathcal{O}((1, 0)^T)$ , da  $y_0 \in \mathcal{O}(y_0)$ , aber  $y_0 \notin \partial B_1(0) = \mathcal{O}((1, 0)^T)$ . Nach Proposition 162 sind also  $\mathcal{O}(y_0)$  und  $\mathcal{O}((1, 0)^T)$  disjunkt. Mit anderen Worten

$$\phi(t, y_0) \notin \mathcal{O}((1, 0)^T) \quad \forall t \in \hat{I}(0, y_0). \quad (868)$$

Erinnern wir uns wieder daran, dass  $\mathcal{O}((1, 0)^T) = \partial B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\}$  so erhalten wir

$$|\phi(t, y_0)| \neq 1 \quad \forall t \in \hat{I}(0, y_0). \quad (869)$$

Da  $|\phi(0, y_0)| = |y_0| < 1$  gilt

$$|\phi(t, y_0)| < 1 \quad \forall t \in \hat{I}(0, y_0). \quad (870)$$

(Denn gäbe es ein  $t_0 \neq 0$  mit  $|\phi(t_0, y_0)| > 1$ , so müsste wegen  $|\phi(0, y_0)| < 1$  nach dem Zwischenwertsatz auch der Wert 1 angenommen werden. Dies würde (869) widersprechen.) Nun beachte, dass (870) eine Blow-Up-Situation an den Rändern von  $\hat{I}(0, y_0)$  ausschließt. Eine Escape-Situation ist dadurch ausgeschlossen, dass  $G = \mathbb{R}^3$ . Dies zeigt die Globalität, d.h.  $\hat{I}(0, y_0) = \mathbb{R}$  (siehe Satz 106).

## 4.2 Äquilibria und Stabilität

### 4.2.1 Äquilibria

Im Folgenden studieren wir *Äquilibria* einer autonomen Differentialgleichung und das Verhalten von Lösungen um Äquilibria herum.

**Definition 164.** Es sei  $f \in C_{loc}^{0,1}(G; \mathbb{R}^n)$ . Ein Punkt  $\bar{y} \in G$  mit  $f(\bar{y}) = 0$  heißt *Äquilibrium* oder *Gleichgewichtspunkt* von  $y'(t) = f(y(t))$ .

**Proposition 165.** Es sei  $f \in C_{loc}^{0,1}(G; \mathbb{R}^n)$ . Ein Punkt  $\bar{y} \in G$  ist genau dann ein Äquilibrium, wenn  $\mathcal{O}(\bar{y}) = \{\bar{y}\}$ .

**Beweis.** Es sei  $f \in C_{loc}^{0,1}(G; \mathbb{R}^n)$ . Zu '⇒'. Ist  $\bar{y}$  ein Äquilibrium so gilt  $f(\bar{y}) = 0$ , weswegen das AWP

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t)) \\ y(0) = \bar{y} \end{cases} \quad (871)$$

durch  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $y(t) \equiv \bar{y}$  gelöst wird (wie man leicht durch Einsetzen in beide Seiten nachrechnet). Somit gilt  $\phi(t, \bar{y}) = \bar{y}$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  und daher  $\mathcal{O}(\bar{y}) = \{\bar{y}\}$ . Nun zu '⇐'. Ist  $\mathcal{O}(\bar{y}) = \{\bar{y}\}$  so gilt  $\phi(t, \bar{y}) = \bar{y}$  für alle  $t$  wo definiert. Man folgert

$$0 = \frac{d}{dt} \phi(t, \bar{y}) = f(\phi(t, \bar{y})) = f(\bar{y}). \quad (872)$$

**Beispiel 166.** Wir interessieren uns für die Gleichgewichtspunkte der SIR-Endemie, d.h.

$$f(z_1, z_2, z_3) = \begin{pmatrix} -\alpha z_1 z_2 + \gamma z_3 \\ \alpha z_1 z_2 - \beta z_2 \\ \beta z_2 - \gamma z_3 \end{pmatrix} \quad \text{für } \alpha, \beta, \gamma > 0. \quad (873)$$

Da diese sich (hoffentlich) nur in der zulässigen Menge

$$Z := \{(z_1, z_2, z_3) \in (0, 1)^3 : z_1 + z_2 + z_3 = 1\} \quad (874)$$

abspielt, sind wir auch nur an den Punkten in  $Z$  interessiert. Beachte nun

$$f_3(z_1, z_2, z_3) = 0 \Leftrightarrow z_3 = \frac{\beta}{\gamma} z_2, \quad (875)$$

und

$$f_2(z_1, z_2, z_3) = (\alpha z_1 - \beta) z_2 = 0 \Leftrightarrow z_2 = 0 \text{ oder } z_1 = \frac{\beta}{\alpha}. \quad (876)$$

Da  $z_2 = 0$  in  $Z$  nicht zugelassen ist folgt  $z_1 = \frac{\beta}{\alpha}$ . Nun hat man mit  $z_3 = \frac{\beta}{\gamma} z_2$  und der Definition von  $Z$

$$1 = z_1 + z_2 + z_3 = \frac{\beta}{\alpha} + z_2 + \frac{\beta}{\gamma} z_2 = \frac{\beta}{\alpha} + \left(1 + \frac{\beta}{\gamma}\right) z_2 \quad (877)$$

und somit

$$z_2 = \frac{1 - \frac{\beta}{\alpha}}{1 + \frac{\beta}{\gamma}} = \frac{\gamma \alpha - \beta}{\alpha \gamma + \beta}. \quad \Rightarrow \quad z_3 = \frac{\beta \alpha - \beta}{\alpha \gamma + \beta}. \quad (878)$$



Wir definieren nun  $\bar{y} := (\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\gamma}{\alpha} \frac{\alpha-\beta}{\gamma+\beta}, \frac{\beta}{\alpha} \frac{\alpha-\beta}{\gamma+\beta})$ . Man kann leicht zeigen, dass  $\frac{\beta}{\alpha} < 1$  impliziert, dass  $\bar{y} \in Z$ . Im Folgenden heißt dieser Punkt *endemisches Gleichgewicht*. Wir werden also im Folgenden immer  $\frac{\beta}{\alpha} < 1$  annehmen und erhalten dann genau ein Äquilibrium  $\bar{y} \in Z$ . Startet man eine Endemie bei diesem Punkt  $\bar{y} \in Z$ , so bleiben also Infektions- und Genesenzahlen konstant. Es wäre interessant zu wissen, was bei einer Endemie, die *in der Nähe dieses Punktes startet*, geschieht: Kreisen die Infektions/Genesenzahlen immer um diesen Punkt herum? Oder gehen sie in eine komplett andere Größenordnung? Eine Frage der *Stabilität*...

**Definition 167.** STABILITÄT UND ATTRAKTIVITÄT. Es sei  $f \in C_{loc}^{0,1}(G; \mathbb{R}^n)$ .

1. Ein Äquilibrium  $\bar{y}$  von  $f$  heißt *(in positiver Richtung) stabil*, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ so, dass } (|y_0 - \bar{y}| < \delta \Rightarrow \mathcal{O}^+(y_0) \subset B_\varepsilon(\bar{y})). \quad (879)$$

2. Ein Äquilibrium  $\bar{y}$  von  $f$  heißt *instabil*, wenn es nicht stabil ist.

3. Ein Äquilibrium  $\bar{y}$  von  $f$  heißt *(in positiver Richtung) attraktiv*, falls

$$\exists \delta > 0 \text{ so, dass } (|y_0 - \bar{y}| < \delta \Rightarrow \hat{I}(0, y_0) \supset [0, \infty) \text{ und } \phi(t, y_0) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \bar{y}). \quad (880)$$

4. Ein Äquilibrium  $\bar{y}$  von  $f$  heißt *asymptotisch stabil*, falls  $\bar{y}$  stabil und attraktiv ist.

#### 4.2.2 Linearisierte Stabilität

Wir lernen nun ein Stabilitätskriterium kennen, welches auf *Linearisierungstechniken* beruht. Hierfür ist es zunächst wichtig, den *Fall linearer Differentialgleichungen* zu betrachten. Von dort aus werden wir dann den allgemeinen Fall erschließen. Zunächst führen wir aber eine Notation ein

**Definition 168.** SPEKTRUM. Es sei  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  eine Matrix. Dann nennen wir

$$\sigma(A) := \{\lambda : \lambda \text{ Eigenwert von } A\}$$

das *Spektrum* von  $A$ .

Nun ein Stabilitätssatz im linearen Fall.

**Proposition 169.** STABILITÄT LINEARER SYSTEME. Es sei  $f(z) := Az$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , d.h. wir studieren die DGL  $y'(t) = Ay(t)$ . Dann ist  $\bar{y} = 0$  ein Äquilibrium von  $f$  für das gilt

- (I) Ist  $\max_{\lambda \in \sigma(A)} \operatorname{Re}(\lambda) < 0$ , so ist  $\bar{y} = 0$  asymptotisch stabil.

(II) Ist  $\max_{\lambda \in \sigma(A)} \operatorname{Re}(\lambda) > 0$ , so ist  $\bar{y} = 0$  instabil.

**Anmerkung 170.** Es sei wie im vorigen Satz  $f(z) = Az$  gegeben. Im Fall  $\max_{\lambda \in \sigma(A)} \operatorname{Re}(\lambda) = 0$  kann keine Aussage über die Stabilität getroffen werden: Sowohl Stabilität als auch Instabilität kann auftreten. Wir besprechen hier mal zwei Beispiele von Matrizen mit  $\max_{\lambda \in \sigma(A)} \operatorname{Re}(\lambda) = 0$  bei denen verschiedenes Stabilitätsverhalten auftritt:

1. Für  $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  gilt  $\sigma(A_1) = \{0\}$  und  $\bar{y} = 0$  ist instabil.
2. Für  $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  gilt  $\sigma(A_2) = \{-i, i\}$  und  $\bar{y} = 0$  ist stabil (allerdings nicht asymptotisch stabil).

Der Beweis dieser Behauptungen ist den Lesenden als Übungsaufgabe überlassen (die sich mithilfe von Zusammenfassung 31 angenehm lösen lässt).

**Beweis (von Proposition 169). Zu Teil (I).** Sei für diesen Teil des Beweises  $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$  für alle  $\lambda \in \sigma(A)$ . Wähle eine invertierbare Matrix  $S$  mit

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} J_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & J_r \end{pmatrix} \quad (881)$$

mit  $J_i = \lambda_i I + N \in \mathbb{C}^{d_i \times d_i}$  Jordan-Blöcke zum Eigenwert  $\lambda_i \in \sigma(A)$ . Definiere

$$M_i(t) := \begin{pmatrix} e^{\lambda_i t} & te^{\lambda_i t} & \frac{t^2 e^{\lambda_i t}}{2} & \dots & \frac{t^{d_i-2} e^{\lambda_i t}}{(d_i-2)!} & \frac{t^{d_i-1} e^{\lambda_i t}}{(d_i-1)!} \\ 0 & e^{\lambda_i t} & te^{\lambda_i t} & \dots & \dots & \frac{t^{d_i-2} e^{\lambda_i t}}{(d_i-2)!} \\ 0 & 0 & e^{\lambda_i t} & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & & 0 & e^{\lambda_i t} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{d_i \times d_i}. \quad (882)$$

Laut Methode 29 und Proposition 30 ist eine Fundamentalmatrix gegeben durch

$$M(t) = S \begin{pmatrix} M_1(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & M_r(t) \end{pmatrix} \quad (883)$$

und somit gilt für alle  $y_0 \in \mathbb{R}^n$  nach Korollar 123

$$\phi(t, y_0) = \Phi(t, (0, y_0)) = M(t)M(0)^{-1}y_0. \quad (884)$$

Es folgt wie in (692)

$$|\phi(t, y_0)| \leq \|M(t)M(0)^{-1}\| |y_0|, \quad (885)$$

wobei für eine Matrix  $B \in \mathbb{C}^n$  definiert ist, dass  $\|B\| := \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |b_{ij}|^2}$ .

**Zwischenbehauptung.** Es gibt ein  $R > 0$  mit  $\|M(t)M(0)^{-1}\| \leq R$  für alle  $t \geq 0$  und  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|M(t)M(0)^{-1}\| = 0$ . Da nach (883) jeder Eintrag von  $M(t)M(0)^{-1}$  eine endliche Linearkombination von Einträgen von  $M_1(t), \dots, M_r(t)$  mit festen Koeffizienten ist, genügt es zu zeigen, dass alle Einträge von  $M_i(t)$  beschränkt sind und für  $(t \rightarrow \infty)$  gegen 0 konvergieren. Hierzu genügt es nach (882) zu zeigen, dass für alle  $\alpha \in \{0, \dots, n\}$  und  $\theta \in \sigma(A)$  der Ausdruck  $t^\alpha e^{\theta t}$  beschränkt ist und gegen Null konvergiert. Dazu:

$$|t^\alpha e^{\theta t}| = |t^\alpha e^{\operatorname{Re}(\theta)t} e^{i\operatorname{Im}(\theta)t}| = |t|^\alpha e^{\operatorname{Re}(\theta)t} \quad (886)$$

ist beschränkt und konvergiert gegen 0 für  $t \rightarrow \infty$  (weil die Exponentialfunktion schneller fällt als jedes Polynom). **Ende der Zwischenbehauptung.** Es sei  $\varepsilon > 0$ . Mit der Wahl  $\delta := \frac{\varepsilon}{2R}$  folgt dann nach (885) für alle  $t \geq 0$

$$|y_0 - 0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |\phi(t, y_0)| \leq \|M(t)M(0)^{-1}\| |y_0| \leq R \frac{\varepsilon}{2R} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \quad (887)$$

also  $\mathcal{O}^+(y_0) \subset B_\varepsilon(0)$ . Ferner gilt nach (885) und der Zwischenbehauptung

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\phi(t, y_0)| \leq \|M(t)M(0)^{-1}\| |y_0| = 0. \quad (888)$$

Teil (I) folgt.

**Zu Teil (II).** Es sei nun etwa  $\operatorname{Re}(\lambda_0) > 0$  für ein  $\lambda_0 \in \sigma(A)$ . Sei ferner  $v_0 \in \mathbb{C}^n$  mit  $|v_0| = \frac{1}{2}$  ein Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda_0$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte  $\operatorname{Re}(v_0) \neq 0$  (denn wäre  $v_0$  rein imaginär so kann man  $v_0$  durch  $\frac{1}{i}v_0$  ersetzen, was auch noch ein Eigenvektor ist).

**Behauptung.** Es gibt für alle  $\delta > 0$  ein  $y_0 \in \mathbb{R}^n$  mit  $|y_0| < \delta$  gibt so, dass  $\mathcal{O}^+(y_0)$  unbeschränkt ist (also vor allem in keiner  $\varepsilon$ -Kugel liegt).

Dazu: Wir behaupten, dass für alle  $\delta > 0$

$$\phi(t, \delta \operatorname{Re}(v_0)) = \delta \operatorname{Re}(e^{\lambda_0 t} v_0), \quad (889)$$

denn für  $z(t) := \delta \operatorname{Re}(e^{\lambda_0 t} v_0)$  gilt  $z(0) = \delta \operatorname{Re}(v_0)$  und

$$z'(t) = \frac{d}{dt} \delta \operatorname{Re}(e^{\lambda_0 t} v_0) = \delta \operatorname{Re}(e^{\lambda_0 t} \lambda_0 v_0) \quad (890)$$

$$\underset{\lambda_0 \in \sigma(A)}{=} \delta \operatorname{Re}(e^{\lambda_0 t} A v_0) = \delta \operatorname{Re}(A e^{\lambda_0 t} v_0) \underset{A \in \mathbb{R}^{n \times n}}{=} \delta A \cdot \operatorname{Re}(e^{\lambda_0 t} v_0) = A z(t), \quad (891)$$

weswegen  $z(t) = \phi(t, z(0))$ , was (mit  $z(0) = \delta \operatorname{Re}(v_0)$ ) auch (889) zeigt. Man hat nun mit (889)

$$\phi(t, \delta \operatorname{Re}(v_0)) = \delta \operatorname{Re}(e^{\lambda_0 t} v_0) \quad (892)$$

$$= \delta \operatorname{Re}[e^{\operatorname{Re}(\lambda_0)t} (\cos(\operatorname{Im}(\lambda_0)t) + i \sin(\operatorname{Im}(\lambda_0)t)) (\operatorname{Re}(v_0) + i \operatorname{Im}(v_0))] \quad (893)$$

$$= \delta e^{\operatorname{Re}(\lambda_0)t} (\cos(\operatorname{Im}(\lambda_0)t) \operatorname{Re}(v_0) - \sin(\operatorname{Im}(\lambda_0)t) \operatorname{Im}(v_0)) \quad (894)$$

Da  $t \mapsto e^{\operatorname{Re}(\lambda_0)t}$  für  $t \in [0, \infty)$  unbeschränkt ist und  $\operatorname{Re}(v_0) \neq 0$ , ist also auch  $\mathcal{O}^+(\delta \operatorname{Re}(v_0))$  unbeschränkt. Beachte nun auch

$$|\delta \operatorname{Re}(v_0)| = \delta |\operatorname{Re}(v_0)| \leq \delta |v_0| = \frac{\delta}{2} < \delta. \quad (895)$$

Die Behauptung ist (mit der Wahl  $y_0 := \delta v_0$ ) gezeigt.

**Anmerkung 171.** Wir können in Fall (I) vom vorigen Satz sogar folgende Behauptung zeigen: Ist  $\phi_A$  der Fluss von  $f(z) = Az$  und erfüllt  $A$  die Bedingung auf Fall (I) in der vorigen Proposition, so gilt

$$\exists M, \sigma > 0 : \quad |\phi_A(t, y_0)| \leq M e^{-\sigma t} |y_0| \quad \forall y_0 \in \mathbb{R}^n. \quad (896)$$

Wir wiederholen nochmal, dass nach (885) gilt

$$|\phi_A(t, y_0)| \leq \|M(t)M(0)^{-1}\| |y_0|, \quad (897)$$

wobei laut (883) jeder Eintrag  $M(t)M(0)^{-1}$  aus endlichen Linearkombinationen von Funktionen der Form  $t^\alpha e^{\theta t}$  (mit  $\alpha \in \{0, \dots, n\}$  und  $\theta \in \sigma(A)$ ) besteht. Setze nun  $\sigma := -\frac{1}{2} \max_{\lambda \in \sigma(A)} \operatorname{Re}(\lambda) > 0$ . Dann gilt für  $\alpha$  und  $\theta$  wie oben und  $t \geq 0$

$$|t^\alpha e^{\theta t}| \stackrel{(886)}{=} |t|^\alpha e^{\operatorname{Re}(\theta)t} = |t|^\alpha e^{(\operatorname{Re}(\theta)+\sigma)t} e^{-\sigma t}. \quad (898)$$

Beachte nun, dass wegen der Wahl von  $\sigma$  gilt, dass  $\operatorname{Re}(\theta) + \sigma \leq \operatorname{Re}(\theta) - \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\theta) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\theta) \leq -\sigma$ . Somit hat man

$$|t^\alpha e^{\theta t}| \leq (|t|^\alpha e^{-\sigma t}) e^{-\sigma t} \leq C_{\alpha, \sigma} e^{-\sigma t} \quad (899)$$

für eine Konstante  $C_{\alpha, \sigma} := \sup_{t \in [0, \infty)} |t|^\alpha e^{-\sigma t} > 0$  (für  $\alpha = 0, \dots, n$ ). Nun ist also jeder Eintrag von  $M(t)M(0)^{-1}$  (als Linearkombination von Termen wie in (899)) abgeschätzt durch ein konstantes Vielfaches von  $e^{-\sigma t}$ . Dies impliziert, dass

$$\|M(t)M(0)^{-1}\| \leq M e^{-\sigma t} \quad (900)$$

und somit nach (897) auch die behauptete Ungleichung.

Nun kommen wir zum *Satz über die linearisierte Stabilität*, welcher die Stabilitätsfrage für nichtlineare Systeme auf die linearer Systeme zurückführt. Davor benötigen wir allerdings noch ein Hilfslemma über die Lösung von Systemen der Form  $y'(t) = Ay(t) + b(t)$ .

**Lemma 172.** Es sei  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  und  $b \in C^0(I; \mathbb{K}^n)$  und  $M \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{K}^{n \times n})$  eine Fundamentalmatrix für das homogene System  $z'(t) = Az(t)$ . Dann ist für alle  $t_0 \in I$  und  $y_0 \in \mathbb{K}^n$  die eindeutige Lösung von

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + b(t) & (t \in I) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (901)$$

gegeben durch

$$y(t) = M(t)M(t_0)^{-1}y_0 + \int_{t_0}^t M(t_0 + t - s)M(t_0)^{-1}b(s) \, ds \quad (902)$$

**Beweis.** Dies könnte man mit der Variation der Konstanten beweisen, siehe Kapitel 1. Wir zeigen es hier aber einfach direkt. Es sei  $y$  wie in (902). Dass  $y(t_0) = y_0$  ist, ist mit Formel (902) einsichtig. Nun rechnen wir nach, dass die DGL erfüllt ist. Dazu: Wir beobachten zunächst, dass für alle  $h \in C^1(\mathbb{R}^2)$  gilt

$$\frac{d}{dt} \int_{t_0}^t h(t, s) \, ds = \int_{t_0}^t \left( \frac{\partial h}{\partial t}(t, s) \right) \, ds + h(t, t). \quad (903)$$

Dies sieht man so: Definiere  $F(u_1, u_2) := \int_{t_0}^{u_2} h(u_1, s) \, ds$  und berechne mit der mehrdimensionalen Kettenregel

$$\frac{d}{dt} \int_{t_0}^t h(t, s) \, ds = \frac{d}{dt} F(t, t) = \left( \frac{\partial F}{\partial u_1}(t, t) \mid \frac{\partial F}{\partial u_2}(t, t) \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\partial F}{\partial u_1}(t, t) + \frac{\partial F}{\partial u_2}(t, t). \quad (904)$$

Schreibt man sich nun aus, dass  $\frac{\partial F}{\partial u_1}(u_1, u_2) = \int_{t_0}^{u_2} \frac{\partial h}{\partial u_1}(u_1, s) \, ds$ , und  $\frac{\partial F}{\partial u_2}(u_1, u_2) = h(u_1, u_2)$ , so folgt (903) direkt aus (904). Nun können wir (902) differenzieren. Man hat

$$y'(t) = M'(t)M(t_0)^{-1}y_0 + \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t M(t_0 + t - s)M(t_0)^{-1}b(s) \, ds \quad (905)$$

$$\stackrel{(903)}{=} M'(t)M(t_0)^{-1}y_0 + \int_{t_0}^t M'(t_0 + t - s)M(t_0)^{-1}b(s) \, ds + M(t_0 + t - t)M(t_0)^{-1}b(t) \quad (906)$$

$$\stackrel{\text{Lemma 124}}{=} AM(t)M(t_0)^{-1}y_0 + \int_{t_0}^t AM(t_0 + t - s)M(t_0)^{-1}b(s) \, ds + M(t_0)M(t_0)^{-1}b(t) \quad (907)$$

$$= A \left( M(t)M(t_0)^{-1}y_0 + \int_{t_0}^t M(t_0 + t - s)M(t_0)^{-1}b(s) \, ds \right) + b(t) = Ay(t) + b(t). \quad (908)$$

Die Behauptung folgt.

**Satz 173. LINEARISIERTE STABILITÄT.** Es sei  $f \in C^1(G; \mathbb{R}^n)$  und  $\bar{y} \in \mathbb{R}^n$  ein Äquilibrium für  $f$ . Sei  $A := Df(\bar{y}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

(I) Ist  $\max_{\lambda \in \sigma(A)} \operatorname{Re}(\lambda) < 0$ , so ist  $\bar{y}$  asymptotisch stabil.

(II) Ist  $\max_{\lambda \in \sigma(A)} \operatorname{Re}(\lambda) > 0$ , so ist  $\bar{y}$  instabil.

**Beweisidee.** Wir zeigen nur Teil (I). Es sei  $G_{\bar{y}} = \{w - \bar{y} : w \in G\}$ . Aus der totalen Differenzierbarkeit von  $f$  folgt, dass es ein  $r : G_{\bar{y}} \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{r(x)}{|x|} = 0$  und

$$f(y) - f(\bar{y}) = Df(\bar{y})(y - \bar{y}) + r(y - \bar{y}) = A(y - \bar{y}) + r(y - \bar{y}). \quad (909)$$

Definiere nun für fixiertes  $y_0 \in G$  die Funktion  $y(t) := \phi(t, y_0)$  und  $z(t) := y(t) - \bar{y}$ , für  $t \in [0, t_+(y_0))$ . Wir verwenden auch die Kurznotation  $t_+ := t_+(y_0)$ . Für  $t \in [0, t_+)$  gilt dann

$$z'(t) = y'(t) = f(y(t)) - f(\bar{y}) = A(y(t) - \bar{y}) + r(y(t) - \bar{y}) = Az(t) + r(z(t)). \quad (910)$$

Da  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{r(x)}{|x|} = 0$  gibt es zu jedem  $\eta > 0$  ein  $\rho > 0$  so, dass  $\overline{B_\rho(\bar{y})} \subset G$  und

$$|z_0| \leq \rho \quad \Rightarrow \quad |r(z_0)| \leq \eta|z_0|. \quad (911)$$

Seien nun  $M, \sigma$  wie in Anmerkung 171. Das bedeutet laut (900), dass für eine Fundamentalmatrix  $M \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^{n \times n})$  von  $v'(t) = Av(t)$  gilt, dass

$$\|M(t)M(0)^{-1}\| \leq Me^{-\sigma t} \quad \forall t \geq 0. \quad (912)$$

Wähle nun  $\eta > 0$  so, dass  $M\eta - \sigma < 0$ . Für dieses  $\eta$  wähle ein  $\rho > 0$  wie in (911). Sei nun  $\varepsilon > 0$  beliebig vorgegeben. Setze  $\delta := \frac{1}{2M+1} \min\{\rho, \varepsilon\}$ . Sei nun  $y_0$  so, dass  $|y_0 - \bar{y}| < \delta$  und  $y, z$  gewählt wie oben. Definiere

$$t_1 := \sup\{t \in [0, t_+) : |z(s)| < \rho \quad \forall s \in [0, t]\}. \quad (913)$$

Wir werden zeigen, dass  $t_1 = t_+$  (woraus übrigens auch folgt, dass  $t_+ = \infty$ , denn  $z(t) \in B_\rho(0)$  für alle  $t \in [0, t_+)$  impliziert, dass  $y(t) \in B_\rho(y_0)$  für alle  $t \in [0, t_+)$ ). Das heißt aber dass keine Escape oder Blow-Up-Situation auftritt, weil  $\overline{B_\rho(y_0)}$  eine beschränkte Teilmenge von  $G$  ist). Beachte, dass  $t_1 > 0$ , da  $|z(0)| = |y_0 - \bar{y}| < \delta < \rho$ , nach der Wahl von  $\delta$ . Angenommen nun  $t_1 < t_+$ . Dann gilt  $|z(t_1)| = \rho$ . Gleichung (910) impliziert nun, dass  $z$  eine Lösung ist von

$$\begin{cases} z'(t) = Az(t) + b(t) & (t \in (t_-, t_+)) \\ z(0) = y_0 - \bar{y} \end{cases} \quad \text{mit } b(t) := r(z(t)). \quad (914)$$

Wendet man nun die Lösungsformel in Proposition 172 mit  $t_0 = 0$  an, so erhält man

$$z(t) = M(t)M(0)^{-1}(y_0 - \bar{y}) + \int_0^t M(t-s)M(0)^{-1}b(s) \, ds \quad (915)$$

$$= M(t)M(0)^{-1}(y_0 - \bar{y}) + \int_0^t M(t-s)M(0)^{-1}r(z(s)) \, ds. \quad (916)$$

Wir folgern für  $t \in [0, t_1]$

$$|z(t)| \leq |M(t)M(0)^{-1}(y_0 - \bar{y})| + \int_0^t |M(t-s)M(0)^{-1}r(z(s))| \, ds \quad (917)$$

$$\leq \|M(t)M(0)^{-1}\| |y_0 - \bar{y}| + \int_0^t \|M(t-s)M(0)^{-1}\| |r(z(s))| \, ds \quad (918)$$

$$\leq Me^{-\sigma t} |y_0 - \bar{y}| + \int_0^t Me^{-\sigma(t-s)} \underbrace{|r(z(s))|}_{\leq \eta |z(s)| \text{ da } s \leq t_1, \text{ vgl. (913), (911)}} \, ds \quad (919)$$

$$\leq Me^{-\sigma t} |y_0 - \bar{y}| + e^{-\sigma t} \int_0^t M\eta e^{\sigma s} |z(s)| \, ds. \quad (920)$$

Multiplizieren wir mit  $e^{\sigma t}$ , so ergibt sich für  $t \in [0, t_1]$

$$e^{\sigma t} |z(t)| \leq M |y_0 - \bar{y}| + \int_0^t (e^{\sigma s} |z(s)|) M\eta \, ds \quad (921)$$

d.h. mit  $u(t) := e^{\sigma t} |z(t)|$  haben wir für  $t \in [0, t_1]$

$$u(t) \leq M |y_0 - \bar{y}| + \int_0^t u(s) M\eta \, ds. \quad (922)$$

Mit dem Gronwall-Lemma folgt

$$e^{\sigma t} |z(t)| = u(t) \leq M |y_0 - \bar{y}| e^{M\eta t} \quad \forall t \in [0, t_1] \quad (923)$$

und somit

$$|z(t)| \leq M |y_0 - \bar{y}| e^{(M\eta - \sigma)t} \quad \forall t \in [0, t_1]. \quad (924)$$

Zuerst folgt daraus mit  $t \rightarrow t_1$  und  $M\eta - \sigma < 0$  und der Wahl von  $\delta$

$$\rho = |z(t_1)| \leq M |y_0 - \bar{y}| e^{(M\eta - \sigma)t_1} \leq M\delta \leq \frac{1}{2} \min\{\rho, \varepsilon\} < \rho, \quad (925)$$

also ein Widerspruch. Wir folgern  $t_1 = t_+$  und (wie oben schon erklärt) auch  $t_+ = \infty$ . Somit lässt sich (924) für alle  $t \in [0, \infty)$  benutzen. Wir folgern, dass für  $t \geq 0$  gilt

$$|y(t) - \bar{y}| = |z(t)| \leq M |y_0 - \bar{y}| e^{(M\eta - \sigma)t} \leq M\delta < \frac{1}{2} \min\{\rho, \varepsilon\} \leq \varepsilon, \quad (926)$$

womit  $\mathcal{O}^+(y_0) \subset B_\varepsilon(\bar{y})$  gezeigt wäre. Die Stabilität folgt. Verwenden wir (924) noch einmal für alle  $t \in [0, \infty)$ , so erhalten wir

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |y(t) - \bar{y}| = \limsup_{t \rightarrow \infty} |z(t)| \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} M |y_0 - \bar{y}| e^{(M\eta - \sigma)t} = 0. \quad (927)$$

**Beispiel 174.** Wir betrachten wieder die SIR-Endemie, d.h.

$$f(z_1, z_2, z_3) = \begin{pmatrix} -\alpha z_1 z_2 + \gamma z_3 \\ \alpha z_1 z_2 - \beta z_2 \\ \beta z_2 - \gamma z_3 \end{pmatrix} \quad \alpha, \beta, \gamma > 0, \frac{\beta}{\alpha} < 1. \quad (928)$$

Wie schon in Beispiel 166 interessiert und das Verhalten nur auf der *zulässigen Menge*

$$Z := \{(z_1, z_2, z_3) \in (0, 1)^3 : z_1 + z_2 + z_3 = 1\}. \quad (929)$$

Wir haben in Beispiel 166 gesehen, dass  $\bar{y} := (\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\gamma}{\alpha} \frac{\alpha - \beta}{\gamma + \beta}, \frac{\beta}{\alpha} \frac{\alpha - \beta}{\gamma + \beta}) \in Z$  ein Äquilibrium ist. Wir wollen dieses nun mit Satz 173 auf Stabilität untersuchen. Dazu berechnen wir

$$Df(z_1, z_2, z_3) = \begin{pmatrix} -\alpha z_2 & -\alpha z_1 & \gamma \\ \alpha z_2 & \alpha z_1 - \beta & 0 \\ 0 & \beta & -\gamma \end{pmatrix}. \quad (930)$$

Somit ergibt sich mit  $\delta := \frac{\gamma}{\alpha} \frac{\alpha - \beta}{\gamma + \beta}$

$$A := Df(\bar{y}) = Df\left(\frac{\beta}{\alpha}, \delta, \frac{\beta}{\alpha} \frac{\alpha - \beta}{\gamma + \beta}\right) = \begin{pmatrix} -\alpha\delta & -\beta & \gamma \\ \alpha\delta & 0 & 0 \\ 0 & \beta & -\gamma \end{pmatrix}. \quad (931)$$

Wir berechnen das Spektrum von  $A$ . Dazu

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\alpha\delta - \lambda & -\beta & \gamma \\ \alpha\delta & -\lambda & 0 \\ 0 & \beta & -\gamma - \lambda \end{pmatrix} \quad (932)$$

$$\stackrel{\text{Sarrus}}{=} (-\alpha\delta - \lambda)(-\gamma - \lambda)(-\lambda) + \gamma\alpha\delta\beta - (-\beta)\alpha\delta(-\gamma - \lambda) \quad (933)$$

$$= (-\alpha\delta - \lambda)(-\gamma - \lambda)(-\lambda) + \gamma\alpha\delta\beta - \beta\alpha\delta\gamma - \lambda\beta\delta\alpha \quad (934)$$

$$= (-\alpha\delta - \lambda)(-\gamma - \lambda)(-\lambda) + \gamma\alpha\delta\beta - \beta\alpha\delta\gamma + \beta\delta\alpha(-\lambda) \quad (935)$$

$$= (-\lambda)[(\alpha\delta + \lambda)(\gamma + \lambda) + \beta\delta\alpha] \quad (936)$$

$$= (-\lambda)[\lambda^2 + (\alpha\delta + \gamma)\lambda + \alpha\delta(\gamma + \beta)] = (-\lambda + 0)(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \quad (937)$$

wobei

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\alpha\delta + \gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{(\alpha\delta + \gamma)^2}{4} - \alpha\delta\gamma - \alpha\delta\beta}. \quad (938)$$



Insbesondere  $\sigma(A) = \{0, \lambda_1, \lambda_2\}$  Ist der Term unter der Wurzel nun negativ, so ist die Wurzel rein imaginär und  $\operatorname{Re}(\lambda_1) = \operatorname{Re}(\lambda_2) = -\frac{\alpha\delta + \gamma}{2} < 0$ . In diesem Fall ist also  $\max_{\lambda \in \sigma(A)} \operatorname{Re}(\lambda) = 0$ . Ist der Term unter der Wurzel nichtnegativ, so gilt für ihn

$$0 \leq \frac{(\alpha\delta + \gamma)^2}{4} - \alpha\delta\gamma - \alpha\delta\beta < \frac{(\alpha\delta + \gamma)^2}{4} \quad (939)$$

und somit

$$0 \leq \sqrt{\frac{(\alpha\delta + \gamma)^2}{4} - \alpha\delta\gamma - \alpha\delta\beta} < \frac{(\alpha\delta + \gamma)}{2}. \quad (940)$$

Dies impliziert, dass

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\alpha\delta + \gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{(\alpha\delta + \gamma)^2}{4} - \alpha\delta\gamma - \alpha\delta\beta} < -\frac{\alpha\delta + \gamma}{2} + \frac{\alpha\delta + \gamma}{2} = 0 \quad (941)$$

und somit wiederum  $\operatorname{Re}(\lambda_1), \operatorname{Re}(\lambda_2) < 0$ . Wir folgern auch in diesem Fall  $\max_{\lambda \in \sigma(A)} \operatorname{Re}(\lambda) = 0$ . Es kann also in keinen der beiden Fällen eine Aussage über die Stabilität getroffen werden.

**Beispiel 175.** Im vorigen Beispiel haben wir die SIR-Endemie  $y'(t) = f(y(t))$  mit

$$f(z_1, z_2, z_3) = \begin{pmatrix} -\alpha z_1 z_2 + \gamma z_3 \\ \alpha z_1 z_2 - \beta z_2 \\ \beta z_2 - \gamma z_3 \end{pmatrix} \quad \text{d.h.} \quad \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ y_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha y_1(t) y_2(t) + \gamma y_3(t) \\ \alpha y_1(t) y_2(t) - \beta y_2(t) \\ \beta y_2(t) - \gamma y_3(t) \end{pmatrix}. \quad (942)$$

So wie wir hoffen spielt sich die ganze Endemie nur in der *zulässigen Menge*

$$Z := \{(z_1, z_2, z_3) \in (0, 1)^3 : z_1 + z_2 + z_3 = 1\} \quad (943)$$

ab, d.h.  $y_3(t) = 1 - y_1(t) - y_2(t)$ . Diese Bedingung können wir in die Differentialgleichung einsetzen. In dem Fall ergibt sich

$$y_1'(t) = -\alpha y_1(t) y_2(t) + \gamma(1 - y_1(t) - y_2(t)) \quad (944)$$

und

$$y_2'(t) = \alpha y_1(t) y_2(t) - \beta y_2(t) \quad (945)$$

(und  $y_3'(t)$  brauchen wir gar nicht anzugeben, da es bereits aus der Bedingung  $y_3(t) = 1 - y_1(t) - y_2(t)$  berechnet werden kann). Wir erhalten das neue DGL-System

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha y_1(t) y_2(t) + \gamma(1 - y_1(t) - y_2(t)) \\ \alpha y_1(t) y_2(t) - \beta y_2(t) \end{pmatrix}. \quad (946)$$

Wir können nun die Äquilibria dieser DGL berechnen und diese wiederum auf Stabilität untersuchen. Hierzu suchen wir zunächst die Nullstellen von

$$\tilde{f}(z_1, z_2) := \begin{pmatrix} -\alpha z_1 z_2 + \gamma(1 - z_1 - z_2) \\ \alpha z_1 z_2 - \beta z_2 \end{pmatrix} \quad (z_1, z_2) \in (0, 1)^2. \quad (947)$$

Das einzige Äquilibrium in  $(0, 1)^2$  ist  $\tilde{y} = (\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\gamma}{\alpha} \frac{\alpha - \beta}{\gamma + \alpha}) \in (0, 1)^2$ . Mit der Formel

$$D\tilde{f}(z_1, z_2) = \begin{pmatrix} -\alpha z_2 - \gamma & -\alpha z_1 - \gamma \\ \alpha z_2 & \alpha z_1 - \beta \end{pmatrix} \quad (948)$$

und der Notation  $\delta := \frac{\gamma}{\alpha} \frac{\alpha - \beta}{\gamma + \alpha}$  berechnen wir die Jacobi-Matrix am Gleichgewichtspunkt

$$\tilde{A} := D\tilde{f}(\tilde{y}) = D\tilde{f}(\frac{\beta}{\alpha}, \delta) = \begin{pmatrix} -\alpha\delta - \gamma & -\beta - \gamma \\ \alpha\delta & 0 \end{pmatrix}. \quad (949)$$

Wir berechnen nun die Eigenwerte

$$\det(\tilde{A} - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\alpha\delta - \gamma - \lambda & -\beta - \gamma \\ \alpha\delta & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + (\alpha\delta + \gamma)\lambda + \alpha\delta(\beta + \gamma) \quad (950)$$

Dieses Polynom ist dasselbe wie in der eckigen Klammer (937). Damit sind seine Nullstellen gegeben durch  $\lambda_1, \lambda_2$  wie in (938). Wir haben im vorigen Beispiel bereits diskutiert, dass stets gilt, dass  $\operatorname{Re}(\lambda_1), \operatorname{Re}(\lambda_2) < 0$ . Es folgt

$$\max_{\lambda \in \sigma(\tilde{A})} \operatorname{Re}(\lambda) < 0. \quad (951)$$

Somit ist  $\tilde{y}$  asymptotisch stabil. Wir haben für die SIR-Endemie also doch noch eine Stabilitätsaussage herleiten können. Dass das noch geklappt hat lag an im Wesentlichen dem Integral der Bewegung  $y_1(t) + y_2(t) + y_3(t) = 1$ . Denn durch dieses konnten wir die *Dimension reduzieren*.

### 4.3 Invariante Mengen

Unsere Berechnungen im vorigen Kapitel über die SIR-Endemie (s. Beispiele 166, 174, 175) beruhen auf der Annahme, dass sich der Fluss (zumindest für positive Zeiten) stets in der zulässigen Menge

$$Z := \{(z_1, z_2, z_3) \in (0, 1)^3 : z_1 + z_2 + z_3 = 1\} \quad (952)$$

aufhält. Dass das tatsächlich so ist, haben wir aber nie bewiesen. Jetzt wollen wir diesen Sachverhalt ergründen. Es sei im Folgenden stets  $f \in C_{loc}^{0,1}(G; \mathbb{R}^n)$  und  $\phi : A \rightarrow G$  der zu  $f$  assoziierte Fluss.

**Definition 176.** INVARIANZ VON MENGEN. Eine Menge  $M \subset G$  heißt

1. *positiv invariant* falls  $y_0 \in M$  stets impliziert, dass  $\mathcal{O}^+(y_0) \subset M$ ,

2. *invariant* falls  $y_0 \in M \Rightarrow \mathcal{O}(y_0) \subset M$ .

**Proposition 177.** BAHNEN SIND INVARIANT. Für alle  $z_0 \in G$  ist  $M := \mathcal{O}(z_0)$  eine invariante Menge.

**Beweis.** Es sei  $y_0 \in M = \mathcal{O}(z_0)$ , d.h.  $y_0 = \phi(t, z_0)$  für ein  $t \in \hat{I}(0, z_0)$ . Es gilt nach Proposition 161, dass

$$\mathcal{O}(\phi(t, z_0)) = \mathcal{O}(z_0) = M. \quad (953)$$

und somit schließlich  $\mathcal{O}(y_0) = \mathcal{O}(\phi(t, z_0)) = \mathcal{O}(z_0) \subset M$ . Die Behauptung ist gezeigt.

Eine weitere Klasse invarianter Mengen sind *Einzugsgebiete*.

**Definition 178.** Es sei  $f \in C_{loc}^{0,1}(G; \mathbb{R}^n)$  und  $\bar{y} \in G$  ein Äquilibrium von  $f$ . Wir definieren dann das *Einzugsgebiet* von  $\bar{y}$  durch

$$E(\bar{y}) := \{y_0 \in G : \hat{I}(0, y_0) \supset [0, \infty) \text{ und } \lim_{s \rightarrow \infty} \phi(s, y_0) = \bar{y}\}. \quad (954)$$

**Anmerkung 179.** Mit Definition 167 sieht man: Ein Äquilibrium  $\bar{y}$  von  $f$  ist genau dann attraktiv, wenn es  $\delta > 0$  gibt mit  $B_\delta(\bar{y}) \subset E(\bar{y})$ .

**Proposition 180.** INVARIANZ DES EINZUGSGEBIETS. Es seien  $f, \bar{y}$  wie in Definition 178. Dann ist  $E(\bar{y})$  eine invariante Menge.

**Beweis.** Es sei  $y_0 \in E(\bar{y})$ .  $\mathcal{Z} : \mathcal{O}(y_0) \subset E(\bar{y})$ . Dazu sei  $z \in \mathcal{O}(y_0)$ , etwa  $z = \phi(t, y_0)$  für ein  $t \in \hat{I}(0, y_0)$ . Wir berechnen mithilfe der Flusseigenschaft (D2) aus Lemma 157

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \phi(s, z) = \lim_{s \rightarrow \infty} \phi(s, \phi(t, y_0)) \stackrel{(D2)}{=} \lim_{s \rightarrow \infty} \phi(s + t, y_0) \stackrel{\tilde{s} := s+t}{=} \lim_{\tilde{s} \rightarrow \infty} \phi(\tilde{s}, y_0) \stackrel{y_0 \in E(\bar{y})}{=} \bar{y}. \quad (955)$$

Es folgt somit, dass  $z \in E(\bar{y})$ , was zu zeigen war. [Eine kleine Subtilität bleibt: Wir hätten nämlich noch zeigen müssen, dass  $\hat{I}(0, z) \supset [0, \infty)$ . Dazu: Sei  $\hat{I}(0, z) = (t_-(0, z), t_+(0, z))$ . Wie in Lemma 157 zeigen wir  $\hat{I}(0, z) = \hat{I}(0, \phi(t, y_0)) = \hat{I}(0, y_0) - t$ . Das bedeutet, dass  $t_+(0, z) = t_+(0, y_0) - t = \infty - t = \infty$ . Die Behauptung folgt.]

#### 4.3.1 Ein Invarianzkriterium für abgeschlossene Mengen

Im Folgenden besprechen wir ein Kriterium, welches benutzt werden kann um die positive Invarianz abgeschlossener Mengen zu zeigen. Vorab benötigen wir aber ein Hilfs-Lemma zur *Distanzfunktion*, gegeben durch

$$\text{dist}(x, M) := \inf_{w \in M} |x - w| \quad (956)$$

für ein  $M \subset \mathbb{R}^n$

**Lemma 181.** Es sei  $A \subset \mathbb{R}^n$  abgeschlossen und nichtleer. Dann gibt es für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  ein  $v \in A$  mit

$$|x - v| = \text{dist}(x, A). \quad (957)$$

**Beweis.** Es sei  $x \in \mathbb{R}^n$ . Wähle ein  $R > 0$  mit  $\overline{B_R(x)} \cap A \neq \emptyset$ . (Ein solches  $R > 0$  gibt es: Denn schließlich ist  $\emptyset \neq A = \bigcup_{N=1}^{\infty} (A \cap \overline{B_N(x)})$ , weswegen für ein  $N \in \mathbb{N}$  die Menge  $(A \cap \overline{B_N(x)})$  nichtleer sein muss.). Wir folgern, dass  $\text{dist}(x, A) \leq R$ . Wähle nun eine Folge  $(w_l)_{l \in \mathbb{N}} \subset A$  mit

$$|x - w_l| \xrightarrow{l \rightarrow \infty} \inf_{w \in A} |x - w| = \text{dist}(x, A). \quad (958)$$

Da  $\text{dist}(x, A) \leq R$  gibt es ein  $l_0 \in \mathbb{N}$  so, dass  $l \geq l_0 \Rightarrow |x - w_l| \leq R + 1$ . Insbesondere gilt für  $l \geq l_0$ , dass  $w_l \in \overline{B_{R+1}(x)} \cap A$ . Da nun aber  $\overline{B_{R+1}(x)} \cap A$  kompakt ist, gibt es eine Teilfolge  $(w_{l_k})_{k \in \mathbb{N}}$  und ein  $v \in A$  mit  $w_{l_k} \rightarrow v$  für  $(k \rightarrow \infty)$ . Wir finden

$$\text{dist}(x, A) \stackrel{(958)}{=} \lim_{l \rightarrow \infty} |x - w_l| = \lim_{k \rightarrow \infty} |x - w_{l_k}| = |x - v|. \quad (959)$$

Die Behauptung folgt.

**Satz 182.** Es sei  $f \in C_{loc}^{0,1}(G; \mathbb{R}^n)$  und es sei  $A \subset G$  abgeschlossen. Ferner gelte

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \sup_{x \in A} \frac{\text{dist}(x + hf(x), A)}{h} = 0. \quad (960)$$

Dann ist  $A$  positiv invariant.

**Beweis.** Definiere für  $h \in (0, 1)$

$$w(h) := \frac{1}{h} \sup_{x \in A} \text{dist}(x + hf(x), A). \quad (961)$$

Nach der Voraussetzung gilt  $\lim_{h \rightarrow 0^+} w(h) = 0$ . Wir beweisen zunächst folgende

**Zwischenbehauptung.** Für alle  $z \in \partial A$  gibt es ein  $\delta > 0$  mit  $\phi(t, z) \in A$  für alle  $t \in [0, \delta)$ .

**Dazu:** Es sei  $z \in \partial A$  (insbesondere  $z \in G$ , da  $\partial A \subset A \subset G$ ). Dann gibt es  $R > 0$  mit  $\overline{B_{2R}(z)} \subset G$ . Definiere  $C := \max_{w \in \overline{B_R(z)}} |f(w)|$ . Beachte auch, dass  $f$  auf dem Kompaktum  $\overline{B_{2R}(z)}$  eine *globale Lipschitzbedingung* erfüllt, d.h. es gibt  $L > 0$  mit

$$|f(z_2) - f(z_1)| \leq L|z_2 - z_1| \quad \forall z_1, z_2 \in \overline{B_{2R}(z)}. \quad (962)$$

Nun gibt es  $\delta > 0$  mit  $\phi(t, z) \in B_R(z)$  für alle  $t \in (-\delta, \delta)$ . Definiere  $\rho : [0, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$\rho(t) := \text{dist}(\phi(t, z), A). \quad (963)$$

Beachte: Für alle  $t \in [0, \delta)$  gibt es nach Lemma 181 ein  $q_t \in A$  mit  $\rho(t) = |\phi(t, z) - q_t|$ . Außerdem ist  $\rho(0) = \text{dist}(z, A) = 0$ . Ferner gilt  $q_t \in B_{2R}(z)$  für alle  $t \in [0, \delta)$ , denn

$$|z - q_t| \leq |z - \phi(t, z)| + |\phi(t, z) - q_t| = |z - \phi(t, z)| + \text{dist}(\phi(t, z), A) \quad (964)$$

$$\stackrel{z \in A}{=} |z - \phi(t, z)| + |\phi(t, z) - z| = 2 \underbrace{|z - \phi(t, z)|}_{< R \text{ da } \phi(t, z) \in B_R(z)} < 2R. \quad (965)$$

Da  $q_t \in A$  gibt es nach Lemma 181 für alle  $h \in (0, 1)$  ein  $p_{t,h} \in A$  mit

$$|q_t + hf(q_t) - p_{t,h}| = \text{dist}(q_t + hf(q_t), A) \stackrel{(961)}{\leq} w(h)h. \quad (966)$$

Sei nun  $s \in (0, \delta)$  mit  $t + s < \delta$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \rho(t + s) &= \text{dist}(\phi(t + s, z), A) \leq |\phi(t + s, z) - p_{t,s}| \leq |\phi(t + s, z) - \phi(t, z) - sf(\phi(t, z)) \\ &\quad + \phi(t, z) - q_t + q_t + sf(q_t) - p_{t,s} + s(f(\phi(t, z)) - f(q_t))| \end{aligned} \quad (967)$$

$$\leq |\phi(t + s, z) - \phi(t, z) - sf(\phi(t, z))| + |\phi(t, z) - q_t| + |q_t + sf(q_t) - p_{t,s}| \quad (968)$$

$$+ s|f(\phi(t, z)) - f(q_t)|. \quad (969)$$

Wir bemerken: Der zweite Summand ist  $\rho(t)$ . Für den vierten Summanden gilt (da  $\phi(t, z) \in B_r(z) \subset B_2(z)$  und  $q_t \in B_2(z)$  wegen (965)) mit (962), dass

$$s|f(\phi(t, z)) - f(q_t)| \leq sL|\phi(t, z) - q_t| = sL\rho(t) \quad (970)$$

Für den dritten Summanden in (968) gilt

$$|q_t + sf(q_t) - p_{t,s}| = \text{dist}(q_t + sf(q_t), A) \leq w(s)s. \quad (971)$$

Wir folgern mit den zwei vorigen Gleichungen und (968), dass

$$\rho(t + s) \leq |\phi(t + s, z) - \phi(t, z) - sf(\phi(t, z))| + \rho(t) + w(s)s + sL\rho(t). \quad (972)$$

Beachte nun

$$|\phi(t+s, z) - \phi(t, z) - sf(\phi(t, z))| = \left| \int_t^{t+s} f(\phi(r, z)) \, dr - sf(\phi(t, z)) \right| \quad (973)$$

$$= \left| \int_t^{t+s} (f(\phi(r, z)) - f(\phi(t, z))) \, dr \right| \leq \int_t^{t+s} |f(\phi(r, z)) - f(\phi(t, z))| \, dr \quad (974)$$

$$\leq L \int_t^{t+s} |\phi(r, z) - \phi(t, z)| \, dr = L \int_t^{t+s} \left| \int_t^r f(\phi(u, z)) \, du \right| \, dr \quad (975)$$

$$\leq L \int_t^{t+s} \int_t^r |f(\phi(u, z))| \, du \, dr \leq \underbrace{LC}_{\phi(u, z) \in B_R(z)} \int_t^{t+s} \int_t^r 1 \, du \, dr \quad (976)$$

$$= LC \int_t^{t+s} (r-t) \, dr = LC \left[ \frac{1}{2}(r-t)^2 \right]_{r=t}^{r=t+s} = \frac{1}{2} LC s^2 \leq LC s^2. \quad (977)$$

In (972) eingesetzt erhalten wir

$$\rho(t+s) \leq \rho(t) + sL\rho(t) + w(s)s + LCs^2. \quad (978)$$

Umgestellt bedeutet das

$$\rho(t+s) - \rho(t) \leq Ls\rho(t) + s(w(s) + LCs). \quad (979)$$

Wähle nun  $t_0 \in [0, \delta)$  beliebig. Dann gilt für ein beliebiges  $n \in \mathbb{N}$

$$\rho(t_0) = \rho(t_0) - \rho(0) = \sum_{k=1}^n \rho\left(\frac{k}{n}t_0\right) - \rho\left(\frac{k-1}{n}t_0\right) = \sum_{k=1}^n \rho\left(\frac{k-1}{n}t_0 + \frac{t_0}{n}\right) - \rho\left(\frac{k-1}{n}t_0\right) \quad (980)$$

$$\stackrel{(979) \text{ mit } s=\frac{t_0}{n}}{\leq} \sum_{k=1}^n \left( L\frac{t_0}{n} \rho\left(\frac{k-1}{n}t_0\right) + \frac{t_0}{n} (w\left(\frac{t_0}{n}\right) + LC\frac{t_0}{n}) \right) \quad (981)$$

$$= t_0(w\left(\frac{t_0}{n}\right) + LC\frac{t_0}{n}) + L \sum_{k=1}^n \frac{t_0}{n} \rho\left(\frac{k-1}{n}t_0\right) \quad (982)$$

$$= t_0(w\left(\frac{t_0}{n}\right) + LC\frac{t_0}{n}) + L \sum_{k=1}^n \rho\left(\frac{k-1}{n}t_0\right) \left(\frac{k}{n}t_0 - \frac{k-1}{n}t_0\right) \quad (983)$$

Der letzte Term ist für jedes  $n \in \mathbb{N}$  eine *Riemann'sche Zwischensumme* der Form  $\sum_{k=1}^n \rho(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$  für eine (äquidistante) Unterteilung  $\{x_0, \dots, x_n\}$  des Intervalls  $[0, t_0]$  und  $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$  für alle  $k$ . Da  $\rho$  stetig ist, ist  $\rho$  auch Riemann-integrierbar. Deswegen konvergieren die Riemann'schen Zwischensummen bezüglich der äquidistanten Unterteilung gegen  $\int_0^{t_0} \rho(\tau) \, d\tau$ . Gehen wir in (983) zum Grenzwert über, finden wir also (weil

$w(h) \rightarrow 0$  für  $h \rightarrow 0+$ )

$$\rho(t_0) \leq t_0(0 + LC0) + L \int_0^{t_0} \rho(\tau) \, d\tau = L \int_0^{t_0} \rho(\tau) \, d\tau. \quad (984)$$

Mit dem Gronwall-Lemma folgt

$$\rho(t) \leq 0e^{Lt} = 0 \quad \forall t \in [0, \delta]. \quad (985)$$

**Ende der Zwischenbehauptung.** Nun zum eigentlichen Beweis. Es sei  $y_0 \in A$  und  $\hat{I}(0, y_0) = (t_-, t_+)$ . Sei

$$t_1 := \sup\{t \in (0, t_+) : \phi(\tau, y_0) \in A \, \forall \tau \in [0, t]\}. \quad (986)$$

Wir zeigen  $t_1 = t_+$ . Wäre  $t_1 < t_+$ , so wäre  $\phi(t_1, y_0) \in \partial A$  (denn wegen der Abgeschlossenheit von  $A$  muss es ein Element in  $A$  sein und es kann wegen der Maximalität von  $t_1$  nicht im Inneren von  $A$  liegen). Definiere  $z := \phi(t_1, y_0)$ . Nach der Zwischenbehauptung gibt es  $\delta > 0$  mit  $\phi(s, z) \in A$  für alle  $s \in [0, \delta]$ . Dann folgt aber für alle  $t \in [t_1, t_1 + \delta)$

$$\phi(t, y_0) = \phi(t - t_1 + t_1, y_0) = \phi(t - t_1, \phi(t_1, y_0)) = \phi(t - t_1, z) \in A \quad (987)$$

da  $t - t_1 \in [0, \delta)$ . Dies widerspricht der Maximalität von  $t_1$ , siehe die Definition von  $t_1$  in (986).

**Beispiel 183.** Gegeben sei wieder die SIR-Endemie, d.h.

$$f(z_1, z_2, z_3) = \begin{pmatrix} -\alpha z_1 z_2 + \gamma z_3 \\ \alpha z_1 z_2 - \beta z_2 \\ \beta z_2 - \gamma z_3 \end{pmatrix} \quad (\alpha, \beta, \gamma > 0) \quad (988)$$

Wir zeigen nun, dass

$$A := \{(z_1, z_2, z_3)^T \in [0, 1]^3 : z_1 + z_2 + z_3 = 1\} \quad (989)$$

eine positiv invariante Menge ist. Beachte hierfür, dass

$$A = \{(z_1, z_2, z_3)^T \in [0, \infty)^3 : z_1 + z_2 + z_3 = 1\}. \quad (990)$$

Dazu betrachte  $z = (z_1, z_2, z_3)^T \in A$  und berechne

$$z + hf(z) = (z_1, z_2, z_3)^T + hf(z_1, z_2, z_3) = \begin{pmatrix} z_1 - h\alpha z_1 z_2 + h\gamma z_3 \\ z_2 + h\alpha z_1 z_2 - h\beta z_2 \\ z_3 + h\beta z_2 - h\gamma z_3 \end{pmatrix} \quad (991)$$

Beachte

$$(z_1 - h\alpha z_1 z_2 + h\gamma z_3) + (z_2 + h\alpha z_1 z_2 - h\beta z_2) + (z_3 + h\beta z_2 - h\gamma z_3) = z_1 + z_2 + z_3 = 1. \quad (992)$$

Wir behaupten nun, dass für  $h \in (0, \min\{\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}\})$  gilt dass  $z + hf(z) \in A$ . Dank (992) genügt es zu zeigen, dass jede Komponente in (991) in  $[0, \infty)$  liegt. Für die erste Komponente gilt

$$z_1 - h\alpha z_1 z_2 + h\gamma z_3 \geq z_1(1 - h\alpha z_2) \geq z_1(1 - h\alpha(z_1 + z_2 + z_3)) = z_1(1 - h\alpha) \geq 0, \quad (993)$$

weil  $h < \frac{1}{\alpha}$ . Für die zweite Komponente gilt

$$z_2 + \underbrace{h\alpha z_1 z_2}_{\geq 0} - h\beta z_2 \geq z_2(1 - h\beta) \geq 0, \quad (994)$$

weil  $h < \frac{1}{\beta}$  und analog

$$z_3 + h\beta z_2 - h\gamma z_3 \geq z_3(1 - h\gamma) \geq 0, \quad (995)$$

weil  $h < \frac{1}{\gamma}$ . Wir folgern: Für  $h \in (0, \min\{\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}\})$  gilt

$$\frac{1}{h} \text{dist}(z + hf(z), A) = 0 \quad \forall z \in A. \quad (996)$$

und somit

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \sup_{x \in A} \frac{\text{dist}(x + hf(x), A)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+, h < \min\{\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}\}} \sup_{x \in A} \frac{\text{dist}(x + hf(x), A)}{h} = 0. \quad (997)$$

Die Invarianz von  $A$  ist gezeigt.

**Beispiel 184.** Die Invarianz von  $A$  aus dem vorigen Beispiel erlaubt uns, wie in Beispiel 175 die Dimension zu reduzieren und stattdessen das DGL-System  $y'(t) = \tilde{f}(y(t))$  mit

$$\tilde{f}(z_1, z_2) := \begin{pmatrix} -\alpha z_1 z_2 + \gamma(1 - z_1 - z_2) \\ \alpha z_1 z_2 - \beta z_2 \end{pmatrix} \quad (998)$$

zu betrachten. Für dieses ist dann

$$\tilde{A} := \{(z_1, z_2) \in [0, \infty)^2 : z_1 + z_2 \leq 1\} \quad (999)$$

eine positiv invariante Menge (wie man direkt aus dem vorigen Beispiel lernt, denn  $(z_1, z_2, z_3) \in A \Rightarrow (z_1, z_2) \in \tilde{A}$ ).

**Beispiel 185.** Es sei  $f$  wie im vorigen Beispiel. Mit der Erkenntnis aus dem vorigen Beispiel kann man auch leicht zeigen, dass für alle  $y_0 \in A$  eine eindeutige rechtsglobale maximale Lösung von

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t)) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (1000)$$



existiert. (Beachte hierzu:  $A$  ist beschränkt, deswegen kann in  $A$  keine Blow-Up Situation stattfinden)

**Beispiel 186.** Wir betrachten wiederum eine Lösung  $y \in C^1(J; \mathbb{R}^2)$  der SIR-Endemiegleichung  $y'(t) = f(y(t))$  mit

$$f(z_1, z_2, z_3) = \begin{pmatrix} -\alpha z_1 z_2 + \gamma z_3 \\ \alpha z_1 z_2 - \beta z_2 \\ \beta z_2 - \gamma z_3 \end{pmatrix} \quad (\alpha, \beta, \gamma > 0) \quad (1001)$$

In den letzten Abschnitten haben wir immer behauptet, dass auch die nicht-abgeschlossene(!) Menge  $Z := \{(z_1, z_2, z_3)^T \in (0, 1)^3 : z_1 + z_2 + z_3 = 1\}$  positiv invariant ist. Für nicht-abgeschlossene Mengen lässt sich unser Kriterium nicht anwenden. Wir werden aber unser Wissen aus Beispiel 183, dass  $A = \bar{Z}$  positiv invariant ist, geschickt anwenden können. Sei dazu  $y_0 \in Z$  und  $y(t) := \phi(t, y_0)$ . Dann ist auch  $y_0 \in A$  weil  $Z \subset A$ . Deswegen gilt auch  $y(t) \in A$  für alle  $t \geq 0$ . Mit diesem Wissen gilt für alle  $t \geq 0$

$$y_1'(t) = -\alpha y_1(t) y_2(t) + \underbrace{\gamma y_3(t)}_{\geq 0} \geq -\alpha y_1(t) \underbrace{y_2(t)}_{\leq 1} \geq -\alpha y_1(t) \quad (1002)$$

und somit  $\frac{d}{dt} \log(y_1(t)) \geq -\alpha$ . Wir folgern

$$\log(y_1(t)) \geq \log y_1(0) - \alpha t \quad \forall t \geq 0 \quad (1003)$$

und daher

$$y_1(t) \geq y_1(0) e^{-\alpha t} \quad \forall t \geq 0. \quad (1004)$$

Ist also  $y_1(0) > 0$  so folgt durch diese Gleichung auch  $y_1(t) > 0$  für alle  $t \geq 0$ . Analog zeigt man  $y_2(t) > 0$  und  $y_3(t) > 0$  für alle  $t \geq 0$  und folgert die Invarianz von  $Z$ .

## 4.4 Bonussektion. Asymptotik

Was macht eine SIR-Endemie für große Zeiten? Nähert sie sich immer dem endemischen Gleichgewicht  $\bar{y} \in \bar{Z}$  an? Oder stirbt sie aus? Könnte sie nicht sogar immer *periodisch schwanken*?

(Beachte: Für die Asymptotik müssen wir in  $\bar{Z}$  anstatt  $Z$  arbeiten, weil die Endemie sich auch dem Rand von  $Z$  annähern kann.)

**Definition 187.** OMEGA-LIMESMENGE. Es sei  $f \in C_{loc}^{0,1}(G; \mathbb{R}^n)$  und  $y_0 \in G$  mit  $\hat{I}(0, y_0) \supset [0, \infty)$ . Dann definieren wir die *Omega-Limesmenge*

$$\omega(y_0) := \{z \in \mathbb{R}^n : \exists (t_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset [0, \infty), t_j \rightarrow \infty \text{ mit } z = \lim_{j \rightarrow \infty} \phi(t_j, y_0)\}. \quad (1005)$$

Mit der Omega-Limesmenge beschreiben wir das asymptotische Verhalten

**Proposition 188.** Es sei  $f \in C_{loc}^{0,1}(G; \mathbb{R}^n)$  und  $\bar{y} \in G$  ein asymptotisch stabiles Äquilibrium von  $f$ . Sei  $y_0 \in G$ . Dann gilt  $\bar{y} \in \omega(y_0) \Rightarrow y_0 \in E(\bar{y})$  (und insbesondere  $\omega(y_0) = \{\bar{y}\}$ )

**Beweis.** Es sei  $\delta > 0$  so, dass  $z_0 \in B_\delta(\bar{y}) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, z_0) = \bar{y}$ . (Ein solches  $\delta > 0$  existiert, weil  $\bar{y} \in G$  attraktiv ist). Da  $\bar{y} \in \omega(y_0)$  gibt es eine Folge  $t_j \rightarrow \infty$  mit  $\phi(t_j, y_0) \rightarrow \bar{y}$ . Insbesondere gibt es ein  $j_0 \in \mathbb{N}$  mit  $\phi(t_{j_0}, y_0) \in B_\delta(\bar{y})$ . Es folgt mit der Wahl von  $\delta$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, \phi(t_{j_0}, y_0)) = \bar{y}. \quad (1006)$$

Wegen der Flusseigenschaft folgern wir

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t + t_{j_0}, y_0) = \bar{y}. \quad (1007)$$

Mit  $\tau = t + t_{j_0}$  lernen wir

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \phi(\tau, y_0) = \bar{y}, \quad (1008)$$

was gerade bedeutet, dass  $y_0 \in E(\bar{y})$ . Ferner folgt aus dieser Tatsache, dass für jede beliebige Folge  $(s_j)_{j \in \mathbb{N}}$  mit  $s_j \rightarrow \infty$  gilt

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \phi(s_j, y_0) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \phi(\tau, y_0) = \bar{y}, \quad (1009)$$

weswegen  $\omega(y_0) = \{\bar{y}\}$ .

Man könnte hier an der Stelle noch viele andere interessante Eigenschaften der Omega-Limesmenge zeigen. Wir wollen aber schnellstmöglich zur Beschreibung der SIR-Endemie kommen und verzichten daher an der Stelle.

#### 4.4.1 Asymptotik planarer Systeme

Wir lernen nun den *Satz von Poincaré-Bendixson* kennen, der das asymptotische Verhalten *planarer* dynamischer Systeme beschreibt. *Planar* bedeutet hier, dass  $G \subset \mathbb{R}^2$ .

**Satz 189. SATZ VON POINCARÉ-BENDIXSON** Es sei  $G \subset \mathbb{R}^2$  und  $f \in C_{loc}^{0,1}(G; \mathbb{R}^2)$ . Es sei  $y_0 \in G$  so, dass  $\overline{\mathcal{O}(y_0)}$  eine kompakte Teilmenge von  $G$  ist. Dann tritt genau einer der folgenden zwei Fälle auf

1. Es existiert ein Äquilibrium  $\bar{y} \in G$  von  $f$  mit  $\bar{y} \in \omega(y_0)$ .
2.  $y'(t) = f(y(t)), (t \in \mathbb{R})$  hat eine periodische Lösung  $y_{per} \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)$  und  $\omega(y_0) = y_{per}(\mathbb{R})$ ,

(Hierbei heißt eine nichtkonstante Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  periodisch, wenn es ein  $p > 0$  gibt mit  $f(x + p) = f(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ )

**Ohne Beweis.**

Mit anderen Worten: Für jeden Anfangswert  $y_0$  liegt entweder ein Äquilibrium in der Omega-Limeamenge oder das System nähert sich einem *periodischen Orbit* an.

**Anmerkung 190.** In höheren Dimensionen als 2 gilt ein solches Resultat nicht. Ein gutes Beispiel dafür ist das Folgende. Seien  $\alpha_1, \alpha_2 > 0$  so, dass  $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \notin \mathbb{Q}$ . Sei  $G = \mathbb{R}^4$  und betrachte

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_2(t) \\ y_2'(t) = -\alpha_1 y_1(t) \\ y_3'(t) = y_4(t) \\ y_4'(t) = -\alpha_2 y_3(t) \end{cases} \quad \text{d.h.} \quad y'(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\alpha_2 & 0 \end{pmatrix}}_{:=A} y(t). \quad (1010)$$

Man kann  $A$  in zwei  $2 \times 2$  Blockmatrizen aufteilen. Man findet dann durch Diagonalisieren wie in Kapitel 1 heraus, dass es  $S_1, S_2 \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$  invertierbar gibt, so, dass für  $S := \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$  gilt

$$M(t) = S \text{diag}(e^{i\alpha_1 t}, e^{-i\alpha_1 t}, e^{i\alpha_2 t}, e^{-i\alpha_2 t}). \quad (1011)$$

Dann gilt für alle  $z_0 \in \mathbb{R}^4$ , dass  $\phi(t, z_0) = M(t)M(0)^{-1}z_0$ . Mit dieser Formel (oder einfach durch explizites Nachrechnen) kann man auch sehen, dass

$$\phi(t, (1, 0, 1, 0)^T) = (\cos(\alpha_1 t), \sin(\alpha_1 t), \cos(\alpha_2 t), \sin(\alpha_2 t)). \quad (1012)$$

Sei von nun an  $y_0 := (1, 0, 1, 0)^T$ . Wir zeigen, dass keiner der beiden Fälle in Satz 189 auftritt.

ZU FALL 1. Man überzeugt sich leicht, dass  $A$  invertierbar ist und deswegen  $\bar{y} = 0$  das einzige Äquilibrium ist. Da  $|e^{i\alpha_1 t}| = |e^{i\alpha_2 t}| = 1$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  gilt jedoch für jede Teilfolge  $(t_j)_{j \in \mathbb{N}}$  mit  $t_j \rightarrow \infty$ , dass  $\text{diag}(e^{i\alpha_1 t_j}, e^{-i\alpha_1 t_j}, e^{i\alpha_2 t_j}, e^{-i\alpha_2 t_j}) \not\rightarrow 0$ . Somit gilt  $0 \notin \omega(y_0)$ , weswegen also kein Äquilibrium in der Omega-Limesmenge liegt.

ZU FALL 2. Wir bestimmen zunächst alle periodischen Lösungen von (1010). Angenommen,  $z_0 \in \mathbb{R}^4$  erfüllt, dass  $\phi(t, z_0)$  periodisch ist, d.h. es gibt ein  $p > 0$  mit  $\phi(t, z_0) = \phi(t + p, z_0)$ . Insbesondere  $M(t)M(0)^{-1}z_0 = M(t + p)M(0)^{-1}z_0$ . Mit (1011) schließen wir

$$M(t + p) = S \text{diag}(e^{i\alpha_1(t+p)}, e^{-i\alpha_1(t+p)}, e^{i\alpha_2(t+p)}, e^{-i\alpha_2(t+p)}) \quad (1013)$$

$$\stackrel{e^{z+w} = e^z e^w}{=} S \text{diag}(e^{i\alpha_1 t}, e^{-i\alpha_1 t}, e^{i\alpha_2 t}, e^{-i\alpha_2 t}) \text{diag}(e^{i\alpha_1 p}, e^{-i\alpha_1 p}, e^{i\alpha_2 p}, e^{-i\alpha_2 p}) \quad (1014)$$

$$= M(t) \text{diag}(e^{i\alpha_1 p}, e^{-i\alpha_1 p}, e^{i\alpha_2 p}, e^{-i\alpha_2 p}), \quad (1015)$$

Somit gilt  $M(t)M(0)^{-1}z_0 = M(t) \text{diag}(e^{i\alpha_1 p}, e^{-i\alpha_1 p}, e^{i\alpha_2 p}, e^{-i\alpha_2 p}) M(0)^{-1}z_0$  und daher

$$\text{diag}(e^{i\alpha_1 p}, e^{-i\alpha_1 p}, e^{i\alpha_2 p}, e^{-i\alpha_2 p})(M(0)^{-1}z_0) = 1 \cdot (M(0)^{-1}z_0). \quad (1016)$$

Falls  $z_0 \neq 0$  so ist aufgrund der vorigen Gleichung 1 ein Eigenwert von  $\text{diag}(e^{i\alpha_1 p}, e^{-i\alpha_1 p}, e^{i\alpha_2 p}, e^{-i\alpha_2 p})$ . Die Eigenwerte einer Diagonalmatrix sind aber gerade gegeben durch die Diagonaleinträge. Wir folgern  $e^{\pm i\alpha_1 p} = 1$  oder  $e^{\pm i\alpha_2 p} = 1$ . Insbesondere ist  $\alpha_1 p = 2k_1\pi$  für ein  $k_1 \in \mathbb{N}$  und  $\alpha_2 p = 2k_2\pi$  für ein  $k_2 \in \mathbb{N}$ . Es kann jedoch nicht beides gleichzeitig eintreten, denn ansonsten wäre

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{k_1}{k_2} \in \mathbb{Q}. \quad (1017)$$

**Fall 2.1.** Es gelte  $\alpha_1 p = 2k_1\pi$  und  $\frac{\alpha_2 p}{2\pi} \notin \mathbb{N}$ , d.h.  $e^{\pm i\alpha_1 p} = 1$  und  $e^{\pm i\alpha_2 p} \neq 1$ . Aus (1016) folgern wir, dass die dritte und vierte Komponente von  $M(0)^{-1}z_0$  Null sein muss, d.h.  $M(0)^{-1}z_0 \in \mathbb{R}^2 \times \{(0, 0)\}$ . Insbesondere gilt  $z_0 = M(0)M(0)^{-1}z_0 = S(M(0)^{-1}z_0) = \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix} M(0)^{-1}z_0 \in \mathbb{R}^2 \times \{(0, 0)\}$ , wegen der Blockstruktur von  $S$ .

**Fall 2.2.** Es gelte  $\alpha_2 p = 2k_2\pi$  und  $\frac{\alpha_1 p}{2\pi} \notin \mathbb{N}$ , d.h.  $e^{\pm i\alpha_2 p} = 1$  und  $e^{\pm i\alpha_1 p} \neq 1$ . Ganz analog zu oben erhält man  $z_0 \in \{(0, 0)\} \times \mathbb{R}^2$ . Gäbe es nun eine periodische Lösung  $y_{per} \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)$  mit  $\omega(y_0) = y_{per}(\mathbb{R})$  so müsste  $\omega(y_0)$  entweder einen Punkt in  $\mathbb{R}^2 \times \{(0, 0)\}$  oder  $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}^2$  enthalten. Wir sehen aber

$$\text{dist}(\phi(t, y_0), \mathbb{R}^2 \times \{(0, 0)\}) = \text{dist}((\cos(\alpha_1 t), \sin(\alpha_1 t), \cos(\alpha_2 t), \sin(\alpha_2 t))^T, \mathbb{R}^2 \times \{(0, 0)\}) \quad (1018)$$

$$\geq |(\cos(\alpha_2 t), \sin(\alpha_2 t))| = 1 > 0. \quad (1019)$$

Analog zeigen wir auch, dass  $\omega(y_0)$  keinen Punkt in  $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}^2$  enthalten kann. Wir haben gezeigt, dass die Aussage von Poincare-Bendixson nicht verallgemeinert werden kann.

Unsere SIR-Endemie können wir durchaus als planares System auffassen. Sie ist zwar dreidimensional, kann aber auf ein zweidimensionales System reduziert werden, siehe Beispiel 175. Im Folgenden betrachten wir die SIR-Endemie also nur noch wie in Beispiel 175, d.h. als  $y'(t) = f(y(t))$  mit

$$\tilde{f}(z_1, z_2) = \begin{pmatrix} -\alpha z_1 z_2 + \gamma(1 - z_1 - z_2) \\ \alpha z_1 z_2 - \beta z_2 \end{pmatrix} \quad (\alpha, \beta, \gamma > 0, \frac{\beta}{\alpha} < 1). \quad (1020)$$

Aus Beispiel 184 folgt, dass  $\tilde{A} := \{(z_1, z_2) \in [0, 1]^2 : z_1 + z_2 \leq 1\}$  eine positiv invariante Menge für dieses DGL-System ist. Aus Beispiel 186 können wir dann sogar folgern, dass

$$\tilde{Z} := \{(z_1, z_2) \in (0, 1)^2 : z_1 + z_2 < 1\} \quad (1021)$$

eine positiv invariante Menge ist. Wir wollen die Omega-Limesmenge von  $\omega(y_0)$  für  $y_0 \in \tilde{Z}$  verstehen. Nach dem Satz von Poincare Bendixson (Satz 189) enthält  $\omega(y_0)$  entweder Äquilibria oder periodische Orbits. Wir untersuchen im Folgenden also die Äquilibria und periodischen Orbits von  $y'(t) = \tilde{f}(y(t))$ .

**Erstens. Zu den Äquilibria.** Die Äquilibria von  $\tilde{f}$  in  $\tilde{A} := \tilde{Z}$  sind gegeben durch das *endemische Gleichgewicht*  $\bar{y}_e = (\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\gamma \alpha - \beta}{\alpha \gamma + \beta})^T$  und das *krankheitsfreie Gleichgewicht*  $\bar{y}_v = (1, 0)^T$  (der Bevölkerungszustand ohne Ausbruch des Virus). Für  $\bar{y}_e$  haben wir bereits gezeigt, dass

es asymptotisch stabil ist, vgl Beispiel 175. Für  $\bar{y}_v$  beobachten wie Instabilität:

$$D\tilde{f}(y_v) = \begin{pmatrix} -\gamma & -\alpha - \gamma \\ 0 & \alpha - \beta \end{pmatrix} \quad \text{d.h. } \sigma(D\tilde{f}(y_v)) = \{-\gamma, \alpha - \beta\}. \quad (1022)$$

Beachte, dass  $\alpha - \beta = \alpha(1 - \frac{\beta}{\alpha}) > 0$ , weswegen  $\bar{y}_v$  instabil ist. Kann  $\bar{y}_v$  dann noch in einer Omega-Limesmenge  $\omega(y_0)$  auftreten? In der Theorie schon, denn auch wenn ein Gleichgewicht instabil ist, ist es trotzdem möglich, dass Lösungen gegen dieses konvergieren. In unserem konkreten Fall können wir das aber ausschließen.

**Lemma 191.** Es sei  $y'(t) = \tilde{f}(y(t))$  für  $\tilde{f}$  wie in (1020) mit  $\alpha, \beta, \gamma > 0$  und  $\frac{\beta}{\alpha} < 1$ . Ferner sei  $y_0 \in \tilde{Z}$  beliebig (wobei  $\tilde{Z}$  wie in (1021)). Dann ist  $\bar{y}_v := (0, 1)^T$  kein Element von  $\omega(y_0)$ .

**Beweis.** Wir schreiben zunächst die gegebene DGL aus. Mit (1020) ergibt sich

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = y'(t) = \tilde{f}(y(t)) = \begin{pmatrix} -\alpha y_1(t)y_2(t) + \gamma(1 - y_1(t) - y_2(t)) \\ \alpha y_1(t)y_2(t) - \beta y_2(t) \end{pmatrix}. \quad (1023)$$

Angenommen es gibt ein  $y_0 \in (0, 1)^2$  mit  $\bar{y}_v \in \omega(y_0)$ . Es sei  $s_j \rightarrow \infty$  so, dass  $\phi(s_j, y_0) \rightarrow \bar{y}_v$  für  $(j \rightarrow \infty)$ . Definiere nun  $y(t) := \phi(t, y_0)$ . Insbesondere gilt  $y_1(s_j) \rightarrow 1$  und  $y_2(s_j) \rightarrow 0$  für  $j \rightarrow \infty$ . Wir definieren

$$R(t) = 1 - y_1(t) - y_2(t) \quad (1024)$$

und leiten her, dass

$$R'(t) = -y_1'(t) - y_2'(t) \quad (1025)$$

$$= \alpha y_1(t)y_2(t) - \gamma(1 - y_1(t) - y_2(t)) - \alpha y_1(t)y_2(t) + \beta y_2(t) = \beta y_2(t) - \gamma R(t). \quad (1026)$$

Wir definieren nun für ein  $C > 0$

$$f(t) := \frac{1}{2\alpha}(\alpha y_1(t) - \beta)^2 + \beta y_2(t) - C \log y_2(t) + \frac{\alpha}{2\beta\gamma}(\gamma R(t) - C)^2. \quad (1027)$$

$$f'(t) = (\alpha y_1(t) - \beta)y_1'(t) + \beta y_2'(t) - C \frac{y_2'(t)}{y_2(t)} + \frac{\alpha}{\beta}(\gamma R(t) - C)R'(t) \quad (1028)$$

$$= (\alpha y_1(t) - \beta)(-\alpha y_1(t)y_2(t) + \gamma R(t)) + \beta y_2(t)(\alpha y_1(t) - \beta) - C(\alpha y_1(t) - \beta) \quad (1029)$$

$$+ \frac{\alpha}{\beta}(\gamma R(t) - C)(\beta y_2(t) - \gamma R(t)) \quad (1030)$$

$$= (\alpha y_1(t) - \beta)(-\alpha y_1(t)y_2(t) + \gamma R(t) + \beta y_2(t)) \quad (1031)$$

$$- C(\alpha y_1(t) - \beta) + \frac{\alpha}{\beta}(\gamma R(t) - C)(\beta y_2(t) - \gamma R(t)) \quad (1032)$$

$$= -(\alpha y_1(t) - \beta)^2 y_2(t) + (\alpha y_1(t) - \beta)(\gamma R(t) - C) + (\gamma R(t) - C)(\alpha y_2(t) - \frac{\gamma \alpha}{\beta} R(t)) \quad (1033)$$

$$= -(\alpha y_1(t) - \beta)^2 y_2(t) + (\gamma R(t) - C)[\alpha y_1(t) - \beta + \alpha y_2(t) - \frac{\gamma \alpha}{\beta} R(t)] \quad (1034)$$

$$= (\alpha y_1(t) - \beta)^2 y_2(t) + (\gamma R(t) - C)(\alpha(1 - R(t)) - \beta - \frac{\gamma \alpha}{\beta} R(t)) \quad (1035)$$

$$= (\alpha y_1(t) - \beta)^2 y_2(t) + (\gamma R(t) - C)(\alpha - \beta - \alpha R(t)(1 + \frac{\gamma}{\beta})) \quad (1036)$$

$$= (\alpha y_1(t) - \beta)^2 y_2(t) + \frac{\alpha}{\gamma}(1 + \frac{\gamma}{\beta})(\gamma R(t) - C)(\frac{\gamma}{\alpha} \frac{\alpha - \beta}{1 + \frac{\gamma}{\beta}} - \gamma R(t)). \quad (1037)$$

Wählt man nun  $C := \frac{\gamma}{\alpha} \frac{\alpha - \beta}{1 + \frac{\gamma}{\beta}} > 0$  so erhält man  $f'(t) \leq 0$  für alle  $t \geq 0$ . Somit ist  $f$  monoton fallend. Da jedoch  $y_2(s_j) \rightarrow 0$  gilt  $-C \log y_2(s_j) \rightarrow \infty$  und daher auch  $f(s_j) \rightarrow \infty$ . Ein Widerspruch.

Somit ist  $\bar{y}_e$  das einzige Äquilibrium, welches in einer Omega-Limesmenge enthalten sein kann. Wir haben auch gesehen: Liegt ein asymptotisch stabiles Äquilibrium  $\bar{y}$  in der Omega-Limesmenge eines Punktes  $y_0 \in G$ , so gilt direkt  $y_0 \in E(\bar{y})$ , vgl. Proposition 188. Wir folgern mit Satz 189 und der asymptotischen Stabilität von  $\bar{y}_e$ :

$\tilde{Z}$  besteht aus  $E(\bar{y}_e)$  und Mengen der Form  $y_{per}(\mathbb{R})$  (wobei  $y_{per}$  periodische Lösung). (1038)

**Zweitens. Zu periodischen Orbits.** Wie viele periodische Lösungen gibt es nun?

**Proposition 192. BENDIXSON-DULAC-KRITERIUM.** Es sei  $G \subset \mathbb{R}^n$  offen und sternförmig und  $f \in C^1(G; \mathbb{R}^n)$ . Falls es  $\rho \in C^1(G; \mathbb{R})$  gibt mit  $\text{div}(\rho(x)f(x)) > 0$  für alle  $x \in G$ , so besitzt die DGL  $y'(t) = f(y(t))$  keine periodische Lösung.

**Beweis.** Dieser Beweis ist eine besonders schöne Anwendung des Satzes von Gauß. Angenommen es gibt eine periodische Funktion  $y_{per} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $y_{per}'(t) = f(y_{per}(t))$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Sei

$$p^* := \inf\{p > 0 : y_{per}(x + p) = y_{per}(x) \forall x \in \mathbb{R}\}. \quad (1039)$$

die kleinstmögliche Periode von  $y_{per}$ . Definiere dann  $y_0 := y_{per}(0)$  und  $\Gamma := y_{per}(\mathbb{R}) = y_{per}([0, p^*])$ . **Zwischenbehauptung.** Auf  $[0, p^*]$  ist die Funktion  $y_{per}$  injektiv und  $y_{per}' \neq 0$  auf  $[0, p^*]$ . Zur Injektivität: Gäbe es  $t_1, t_2 \in [0, p^*]$  verschieden (etwa  $t_1 < t_2$ ) so, dass  $y_{per}(t_1) = y_{per}(t_2) =: y_1$ . Definiere dann  $z_1(t) := y_{per}(t + t_1)$  und  $z_2(t) := y_{per}(t + t_2)$ . Dann

lösen  $z_1, z_2$  beide das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} z'(t) = f(z(t)) \\ z(0) = y_1 \end{cases}. \quad (1040)$$

Aus der Eindeutigkeit folgt  $z_1 = z_2$  und somit  $y_{per}(t + t_1) = y_{per}(t + t_2)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Man folgert  $y_{per}(x) = y_{per}(x + (t_2 - t_1))$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ , weswegen  $t_2 - t_1$  eine Periode von  $y_{per}$  ist. Ein Widerspruch, denn  $t_2 - t_1 \leq t_2 < p^*$ , aber  $p^*$  ist nach (1039) bereits die kleinstmögliche Periode. Zum Nichtverschwinden der Ableitung: Gäbe es ein  $t_0 \in [0, p^*]$  mit  $y'_{per}(t_0) = 0$  so wäre  $f(y_{per}(t_0)) = 0$  und somit wäre  $z_0 := y_{per}(t_0)$  ein Äquilibrium in  $y_{per}(\mathbb{R})$ . Nun gilt aber

$$y_{per}(\mathbb{R}) = \mathcal{O}(y_0) = \mathcal{O}(\phi(t_0, y_0)) = \mathcal{O}(z_0) = \{z_0\}. \quad (1041)$$

Dies würde implizieren, dass  $y_{per}$  konstant ist, (jedoch sind gemäß unserer Definition periodische Funktionen nicht konstant). **Ende der Zwischenbehauptung.** Aus der Injektivität von  $y_{per}|_{[0, p^*)}$  folgt, dass  $y_{per}$  auf  $[0, p^*]$  *einfach geschlossen* ist. Nach dem *Jordan'schen Kurvensatz* gibt es ein eindeutiges beschränktes Gebiet  $\Omega \subset G$  mit  $\partial\Omega = y_{per}([0, p]) = \Gamma$ . (Beachte: Bei der Aussage  $\Omega \subset G$  wurde die Sternförmigkeit benutzt - Aus dem Jordan'schen Kurvensatz erhält man sonst nur  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ). Man kann auch zeigen (siehe Maß- und Integrationstheorie), dass  $y'_{per}(t) \neq 0$  impliziert, dass  $\Omega$  einen  $C^1$ -Rand hat und für die äußere Normale gilt

$$\nu(y_{per}(t)) = \pm \frac{1}{|y'_{per}(t)|} \begin{pmatrix} -y'_{per,2}(t) \\ y'_{per,1}(t) \end{pmatrix}. \quad \text{Insbesondere } y'_{per}(t) \cdot \nu(y_{per}(t)) = 0. \quad (1042)$$

Wir berechnen nun mit der Voraussetzung  $\text{div}(\rho f) > 0$  und dem Satz von Gauß

$$0 < \int_{\Omega} \text{div}(\rho(x)f(x)) \, dx = \int_{\partial\Omega} \rho(x)f(x) \cdot \nu(x) \, dS(x) \quad (1043)$$

$$= \int_0^{p^*} \rho(y_{per}(t)) [f(y_{per}(t)) \cdot \nu(y_{per}(t))] |y'_{per}(t)| \, dt. \quad (1044)$$

Beachte nun, dass  $f(y_{per}(t)) \cdot \nu(y_{per}(t)) = y'_{per}(t) \cdot \nu(y_{per}(t)) = 0$  für alle  $t$ , siehe (1042). Somit liefert (1043) den Widerspruch  $0 < 0$ . Wir folgern, dass die Annahme ("es gibt eine periodische Lösung") falsch sein muss.

Wir sagen im Folgenden, dass eine Funktion  $f \in C^1(G; \mathbb{R}^2)$  das *Bendixson-Dulac-Kriterium* erfüllt, falls es ein  $\rho \in C^1(G; \mathbb{R})$  gibt mit  $\text{div}(\rho(x)f(x)) > 0$ .

**Beispiel 193.** Es sei  $\tilde{f} : (0, \infty)^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  gegeben durch

$$\tilde{f}(z_1, z_2) = \begin{pmatrix} -\alpha z_1 z_2 + \gamma(1 - z_1 - z_2) \\ \alpha z_1 z_2 - \beta z_2 \end{pmatrix}. \quad (1045)$$

Besitzt  $y'(t) = \tilde{f}(y(t))$  periodische Lösungen? Die Antwort ist nein: Wir behaupten dass  $\tilde{f}$  das Bendixson-Dulac-Kriterium aus Proposition 192 erfüllt mit  $\rho(z_1, z_2) := -\frac{1}{z_2}$ . Dazu berechnen wir

$$\operatorname{div}(\rho(z_1, z_2)\tilde{f}(z_1, z_2)) = \operatorname{div}\left(-\frac{1}{z_2}\begin{pmatrix} -\alpha z_1 z_2 + \gamma(1 - z_1 - z_2) \\ \alpha z_1 z_2 - \beta z_2 \end{pmatrix}\right) \quad (1046)$$

$$= \operatorname{div}\left(\begin{pmatrix} \alpha z_1 + \gamma(-\frac{1}{z_2} + 1 + \frac{z_1}{z_2}) \\ -(\alpha z_1 - \beta) \end{pmatrix}\right) \quad (1047)$$

$$= \partial_{z_1}[\alpha z_1 + \gamma(-\frac{1}{z_2} + 1 + \frac{z_1}{z_2})] + \partial_{z_2}[-(\alpha z_1 - \beta)] \quad (1048)$$

$$= \alpha + \frac{1}{z_2} + 0 \geq \alpha > 0. \quad (1049)$$

Somit ist das Bendixson-Dulac Kriterium für das sternförmige Gebiet  $G = (0, \infty)^2$  erfüllt. Deswegen kann die DGL  $y'(t) = \tilde{f}(y(t))$  keine periodische Lösung haben.

Mithilfe aller Erkenntnisse dieses Kapitels können wir nun folgendes finale Resultat über die SIR-Endemie zeigen

**Satz 194.** Es sei gegeben  $y'(t) = f(y(t))$  mit  $f \in C_{loc}^{0,1}(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$  gegeben durch

$$f(z_1, z_2, z_3) = \begin{pmatrix} -\alpha z_1 z_2 + \gamma z_3 \\ \alpha z_1 z_2 - \beta z_2 \\ \beta z_2 - \gamma z_3 \end{pmatrix} \quad (\alpha, \beta, \gamma > 0, \frac{\beta}{\alpha} < 1). \quad (1050)$$

Es sei  $Z := \{(z_1, z_2, z_3) \in (0, 1)^3 : z_1 + z_2 + z_3 = 1\}$ . Sei  $\bar{y}_e := (\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\gamma}{\alpha} \frac{\alpha - \beta}{\gamma + \beta}, \frac{\gamma}{\alpha} \frac{\alpha - \beta}{\gamma + \beta})^T$  das endemische Gleichgewicht. Dann ist  $Z \subset E(\bar{y}_e)$ , d.h. jede Lösung  $t \mapsto \phi(t, y_0)$  mit Startwert in  $y_0 \in Z$  konvergiert gegen  $\bar{y}_e$  für  $t \rightarrow \infty$ .

**Beweis.** Hier fassen wir nochmal zusammen. Wir haben zuerst gezeigt (vgl. Beispiel 186), dass  $Z$  eine positiv invariante Menge ist. Dies erlaubte uns, die Bedingung  $z_1 + z_2 + z_3 = 1$  in die DGL einzusetzen und die Hilfs-DGL  $y'(t) = \tilde{f}(y(t))$  zu betrachten, für

$$\tilde{f}(z_1, z_2) := \begin{pmatrix} -\alpha z_1 z_2 + \gamma(1 - z_1 - z_2) \\ \alpha z_1 z_2 - \beta z_2 \end{pmatrix} \quad (1051)$$

Löst nun  $t \mapsto (y_1(t), y_2(t))^T$  die DGL für  $\tilde{f}$ , so löst  $t \mapsto (y_1(t), y_2(t), 1 - y_1(t) - y_2(t))^T$  die DGL für  $f$ . Mit dieser Information schließen wir, dass  $\tilde{Z} := \{(z_1, z_2) \in (0, 1)^2 : z_1 + z_2 < 1\}$  positiv invariant ist. Die DGL für  $\tilde{f}$  ist nun zweidimensional. Für  $y_0 \in \tilde{Z}$  ist nun  $\omega(y_0) \subset \tilde{Z}$ . Nach dem Satz von Poincare Bendixson (vgl. 189) gilt entweder, dass  $\omega(y_0)$  ein Äquilibrium enthält oder  $\omega(y_0)$  ein periodischer Orbit ist. Die Äquilibria sind gegeben durch  $\bar{y}_e = (\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\gamma}{\alpha} \frac{\alpha - \beta}{\gamma + \beta})^T$  und  $\bar{y}_v = (1, 0)^T$ .

FALL 1.  $\omega(y_0)$  ist ein periodischer Orbit. Dieser Fall ist nach Beispiel 193 ausgeschlossen.

FALL 2.  $\bar{y}_v \in \omega(y_0)$ . Dieser Fall ist nach Lemma 191 ausgeschlossen.

Es bleibt nur noch ein Fall übrig!

FALL 3.  $\bar{y}_e \in \omega(y_0)$ . In diesem Fall gilt, weil  $\bar{y}_e$  nach Beispiel 175 asymptotisch stabil ist,



auch  $y_0 \in E(\bar{y}_e)$ , vgl. Proposition 188. Da nur Fall 3 eintreten kann haben wir nachgewiesen, dass jedes  $y_0 \in Z$  auch in  $E(\bar{y}_e)$  liegt.

## 5 Literaturhinweise

Folgende Bücher eignen sich zum Nachlesen und Weiterlesen.

- J. Prüss, M. Wilke. *Gewöhnliche Differentialgleichungen und dynamische Systeme*.  
(Eine gute Einführung in die Basics, Teil II des Buches behandelt vertiefende Themen über unseren Kurs hinaus)
- J. Prüss, R. Schaubelt, R. Zacher. *Mathematische Modelle in der Biologie*  
(Eine ausführliche Sammlung von Anwendungen der Theorie dynamischer Systeme in Biologie und Epidemiologie)
- M. Hirsch, S. Smale, R. L. Devaney. *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*.  
(Eine spannende Sammlung von Phänomenen, die für verschiedene dynamische Systeme auftreten können)