Marius Müller
Bernd Käßemodel
Sommersemester 2023
Punktzahl: 16 Punkte

Funktionentheorie: Blatt 10

1. [2+2+2= 6 Punkte]

(a) Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}(D)$ eine Folge holomorpher Funktionen auf D und $f \in C(D)$ nur stetig. Es gelte $f_n \to f$ punktweise auf D und es gebe ein $C > 0$ so, dass $|f_n(z)| \leqslant C$ für alle $z \in D$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Dann ist $f \in \mathcal{H}(D)$.

(b) Es seien $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und f wie in Teilaufgabe (a). Zeigen Sie, dass $f_n' \to f'$ punktweise auf D.

(c) Es sei $I = (-1, 1)$ und $f \in C(I)$. Wahr oder falsch: Es sei $(f_n : I \to \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reell differenzierbarer Funktionen so, dass $f_n \to f$ punktweise auf I. Ferner gebe es ein $C > 0$ so, dass $|f_n(x)| \leqslant C$ für alle $x \in I$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann ist f auf I differenzierbar.

2. [1+1+1+2=5 Punkte] Berechnen Sie die nachstehenden Integrale

(a)
$$\int_{\partial B_1(0)} \frac{1}{z} e^{\frac{1}{z}} \,\mathrm{d}z,$$

(b)
$$\int_{\partial B_1(0)} \frac{1}{(4z-1)^3 e^z} \,\mathrm{d}z,$$

(c)
$$\int_\gamma \frac{e^z}{z - (2\sqrt{2} + i)} \,\mathrm{d}z,$$

wobei $\gamma(t) = 3\cos(t) + 2i\sin(t), (t \in [0, 2\pi])$ den Rand der Ellipse $E := \{z \in \mathbb{C} : \frac{\mathrm{Re}(z)^2}{9} + \frac{\mathrm{Im}(z)^2}{4} = 1\}$ durchläuft.

(d)
$$\int_{\partial B_\pi(0)} \frac{1}{\cos(z)} \,\mathrm{d}z.$$

3. [1+...+1=5 Punkte] Es erfülle $f \in C(D)$ auf einem Gebiet D die *Mittelwerteigenschaft*, d.h.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{it}) \,\mathrm{d}t \quad \forall r > 0, z \in D : \overline{B_r(z_0)} \subset D.$$

Diese ist zum Beispiel erfüllt falls $f \in \mathcal{H}(D)$ (vgl. Korollar 153). Es sei $M := \sup_{w\in D} |f(w)|$ Definieren Sie $A := \{z \in D : |f(z)| = M\}$

(a) Zeigen Sie: $D \setminus A$ ist offen.

(b) Zeigen Sie: A ist offen.

(c) Folgern Sie das Maximumsprinzip (Satz 183) aus Aufgabenteil (a) und (b).

(d) Geben Sie ein Beispiel für eine Funktion, die auf $\mathbb{C}$ nicht holomorph ist, aber trotzdem die Mittelwerteigenschaft erfüllt.

(e) Es sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein sternförmiges Gebiet und $u \in C^2(G)$ harmonisch. Zeigen Sie: Gibt es ein $x_0 \in G$ mit

$$|u(x_0)| = \max_{x\in G} |u(x)|$$

so ist u konstant auf G.