



UNIVERSITÄT LEIPZIG

ÜBUNGSBLATT

Abgabe am:
Montag, 17.04.2023

Marius Müller
Bernd Käsemodel
Sommersemester 2023
Punktzahl: 20 Punkte

Funktionentheorie: Blatt 2

1. [2+1+1=4 Punkte]

- (a) Zeigen Sie $\cos(\frac{\pi}{2} + z) = -\sin(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ (siehe Proposition 45).
- (b) Zeigen Sie, dass $\cosh(iz) = \cos(z)$ und $\sinh(iz) = i \sin(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.
- (c) Folgern Sie aus (b), dass $\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

2. [1+1+1+1+1+1+1+1=8 Punkte]

- (a) Stellen Sie $1 + \sqrt{3}i$ in Polarkoordinaten dar.
- (b) Stellen Sie $-1 + \sqrt{3}i$ in Polarkoordinaten dar.
- (c) Berechnen Sie $(1 + \sqrt{3}i)^8$
- (d) Berechnen Sie $\log(1 + \sqrt{3}i)$.
- (e) Berechnen Sie $\log(i)$.
- (f) Berechnen Sie $\log(-1)$.
- (g) Berechnen Sie i^i .
- (h) Wahr oder falsch? Für alle $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt $\log(zw) = \log(z) + \log(w)$.

3. [2+2= 4 Punkte]

- (a) Berechnen Sie

$$\sum_{k=0}^n \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right).$$

- (b) Berechnen Sie

$$\sum_{k=0}^n \cos^2\left(\frac{2k\pi}{n}\right).$$

4. [2+1=3 Punkte]

- (a) Berechnen Sie für $\theta \in (-\pi, \pi]$ das Argument $\arg(e^{i\theta} + 1)$.
- (b) Es sei z_w wie in der Aufgabe 4 von Blatt 1 definiert. Zeigen Sie $z_w = e^{\frac{1}{2} \log(w)}$ für alle $w \in \mathbb{C}$.