Uni Freiburg

Abgabe am:
Donnerstag, 20.01.2022

Marius Müller
Saskia Glaffig
Simone Hermann
Wintersemester 2021/2022
Punktzahl: 8+3=11 Punkte

Gewöhnliche Differentialgleichungen: Blatt 10

1. [Wiederholungsübung, s. Übung 100, p. 96] Globalität dank Energieerhaltung. (3 Punkte)
Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y''(t) = -\nabla U(y(t)) \quad (t \in \mathbb{R}) \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = y_1 \end{cases}$$

für ein $U \in C^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ und $y_0, y_1 \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie: Falls $\lim_{|x|\to\infty} U(x) = \infty$ so existert eine eindeutige globale Lösung $y \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R}^n)$.

2. [s. Übung 113, p. 111] Picard-Iteration für lineare DGLs. (1+2+1+1 = 5 Punkte)
Es sei für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $y_0 \in \mathbb{R}^n$ das AWP

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) \quad (t \in \mathbb{R}) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{1}$$

gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass das AWP eine eindeutige Lösung auf $\mathbb{R}$ hat.

(b) Beweisen Sie, dass die Picard-Iterierten mit Startwert $z_0(t) := 0$ gegeben sind durch

$$z_j(t) = \sum_{k=0}^{j-1} \frac{(t-t_0)^k}{k!} A^k y_0. \tag{2}$$

(c) Zeigen Sie, dass für alle $(a,b) \subset\subset \mathbb{R}$ jede Komponente der matrixwertigen Folge $(M_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset C^0(I;\mathbb{R}^{n\times n})$

$$M_j(t) := \sum_{k=0}^{j} \frac{(t-t_0)^k}{k!} A^k \tag{3}$$

gleichmäßig auf (a,b) konvergent ist.

(d) Bezeichnen Sie für $t \in \mathbb{R}$

$$M(t) := \lim_{j\to\infty} M_j(t) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^k}{k!} A^k. \tag{4}$$

Zeigen Sie, dass M eine Fundamentalmatrix für die DGL $y'(t) = Ay(t), (t \in \mathbb{R})$ ist.

3. [Bonusaufgabe, s. Übung 117, p. 116] Kurzzeitexistenz mit Fixpunktmethoden. (3^* Punkte)
Es erfülle $f \in C^0(I \times G;\mathbb{R}^n)$ eine lokale Lipschitz-Bedingung. Definieren Sie für $\eta, \delta > 0$ $M_{\eta,\delta} := \{y \in C_b^0((t_0-\delta, t_0+\delta);\mathbb{R}^n) : d_\infty(y, y_0) \leq \eta\}$. [Hierbei wird $y_0 \in \mathbb{R}^n$ mit der konstanten Funktion $y_0(t) \equiv y_0 \in C_b^0((t_0-\delta, t_0+\delta);\mathbb{R}^n)$ identifiziert.] Definieren Sie $T_{\eta,\delta} : M_{\eta,\delta} \to C_b^0((t_0-\delta, t_0+\delta);\mathbb{R}^n)$ durch

$$(T_{\eta,\delta} y)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(t, y(t))\, dt. \tag{5}$$

(a) Zeigen Sie: $M_{\eta,\delta}$ ist ein vollständiger metrischer Raum

(b) Zeigen Sie: Für $\eta > 0, \delta > 0$ klein genug ist $T_{\eta,\delta}(M_{\eta,\delta}) \subset M_{\eta,\delta}$

(c) Zeigen Sie: Für $\eta > 0, \delta > 0$ klein genug ist $T_{\eta,\delta} : M_{\eta,\delta} \to M_{\eta,\delta}$ eine Kontraktionsabbildung.

(d) Folgern Sie Lemma 114 ohne Benutzung des globalen Satzes von Picard-Lindelöf.