UNIVERSITÄT LEIPZIG

Übungsblatt

Abgabe am:
Montag, 7.11.2022

Marius Müller
Robert Baumgarth
Wintersemester 2022/2023
Punktzahl: $18 + 7^* = 22$ Punkte

Gewöhnliche Differentialgleichungen: Blatt 4

1. [2 Punkte] Es sei $z = (z_0, z_1)^T \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}^2)$ so, dass

$$z'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} z(t). \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass dann $z_0 \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ und $z_0''(t) + az_0'(t) + bz_0(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Folgern Sie, dass in Gleichung (165) in Methode 37 auch '$\supset$' gilt.

2. [2 Punkte] Verwenden Sie Aufgabe 2c von Blatt 3 oder Anwendung 44 um für $\alpha, \omega > 0$ folgendes Anfangswertproblem (reellwertig!) zu lösen:

$$\begin{cases} x''(t) + \omega^2 x(t) = \cos(\alpha t) \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

3. [2+2 = 4 Punkte]

(a) Es schwinge ein Federpendel der Masse $m > 0$ an einer Feder mit Federkonstante $k > 0$ mit Anfangsauslenkung $x_0 \in \mathbb{R}$ und Anfangsgeschwindigkeit $v_0 \in \mathbb{R}$. Wie in Anwendung 40 vernachlässigen wir alle anderen Kräfte als die Rückstellkraft, es gibt also zB. keine Gravitationskraft und keine Reibung. Bestimmen Sie die maximale Auslenkung $A := \max_{t\in\mathbb{R}} x(t)$.

(b) Nun schwingt wieder ein Federpendel der Masse $m > 0$ an einer Feder mit Federkonstante $k > 0$ mit Anfangsauslenkung $x_0 \in \mathbb{R}$ und Anfangsgeschwindigkeit $v_0 \in \mathbb{R}$. Zusätzlich wirkt aber nun neben der Rückstellkraft auch die Gravitationskraft $F_g(t) := -mg$, $g := 9.81$, auf das Pendel. Leiten Sie eine Bewegungsgleichung für die Auslenkung $x(t)$ her und bestimmen Sie die allgemeine Lösung.

4. [2 Punkte] Zeigen Sie, dass $y_1(t) := \frac{1}{1+t}$ eine Lösung von

$$2y''(t) + \frac{1}{1+t}y'(t) - \frac{3}{(1+t)^2}y(t) = 0 \quad (t \in (-1, \infty)) \tag{3}$$

ist und bestimmen Sie die allgemeine Lösung.

5. $[2 + 2 + 2 + 2 + 1^* + 2^* + 2^* + 2^* = 15$ Punkte] Sei für diese Aufgabe $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ beliebig. Für $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n\times n}$ definieren wir die *Hilbert-Schmidt-Norm* $||A||_{HS} := \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2}$. Der metrische Raum $(\mathbb{K}^{n\times n}, d_{||\cdot||_{HS}})$ ist dann vollständig (weil identifizierbar mit $(\mathbb{K}^{n^2}, d_{||\cdot||_{\text{euc}}})$.)

(a) Zeigen Sie, dass für alle $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ gilt $||AB||_{HS} \leq ||A||_{HS}||B||_{HS}$.

(b) Zeigen Sie, dass für alle $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ der Grenzwert

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}A^k := \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}A^k \tag{4}$$

im metrischen Raum $(\mathbb{K}^{n\times n}, d_{||\cdot||_{HS}})$ existiert. Wir nennen den Grenzwert auch e^A.

(c) Zeigen Sie: Für alle $t \in \mathbb{R}$ ist $t \mapsto e^{tA}$ eine Potenzreihe in t und es gilt $\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA}$.

(d) Zeigen Sie, dass (im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) die Allgemeine Lösung von $y'(t) = Ay(t)$ gegeben ist durch

$$\mathbb{L} = \{y \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}^n) : y(t) = e^{tA}c \text{ für ein } c \in \mathbb{C}^n\}. \tag{5}$$

Folgern Sie, dass die Vorraussetzung (147) von Proposition 34 immer erfüllt ist.

(e*) Können Sie im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ auch eine Formel für die reelle allgemeine Lösung finden?

(f*) Verwenden Sie die Cauchy-Produktformel für Reihen um zu zeigen, dass für alle $t, s \in \mathbb{R}$ gilt $e^{tA} \cdot e^{sA} = e^{(t+s)A}$. Folgern Sie, dass e^{tA} stets invertierbar ist. Können dadurch Vorraussetzungen in Proposition 35 fallengelassen werden?

(g*) Sei nun A diagonalisierbar über $\mathbb{K}$, etwa $S^{-1}AS = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ für $S \in \mathbb{C}^n$ und $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{C}$. Geben Sie eine Formel für e^{tA} an.

(h*) Sei nun $A = \lambda I + N \in \mathbb{K}^{d \times d}$ ein Jordanblock. Geben Sie eine Formel für e^{tA} an.