UNIVERSITÄT LEIPZIG

Übungsblatt

Abgabe am:
Montag, 17.10.2022

Marius Müller
Robert Baumgarth
Wintersemester 2022/2023
Punktzahl: 12 Punkte

Gewöhnliche Differentialgleichungen: Blatt 1

1. [3 Punkte] Es sei wie in der Vorlesung die Differentialgleichung

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad (t \in I) \tag{1}$$

gegeben. Zeigen Sie für alle $k \in \mathbb{N}$: Falls $f \in C^k(I \times G; \mathbb{R}^n)$ so ist liegt jede Lösung in $C^{k+1}(I; \mathbb{R}^n)$.

2. [3 Punkte] Es sei $y \in C^1((a,b); \mathbb{R})$ eine Lösung der DGL

$$y'(t) = y(t)^2 \quad (t \in (a,b)) \tag{2}$$

Zeigen Sie: Gibt es ein $t_0 \in (a,b)$ mit $y(t_0) = 0$ so gilt $y \equiv 0$. Folgern Sie, dass das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) = y(t)^2 \quad (t \in \mathbb{R}) \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

eine eindeutige Lösung besitzt.

3. [3 Punkte] Es sei $h \in C^1((a,b); \mathbb{R})$ eine Funktion mit $h'(z) \neq 0$ für alle $z \in (a,b)$. Es sei $(c,d) = h((a,b))$ und $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(z) := \frac{1}{h'(z)}$. Zeigen Sie: $y := h^{-1}$ existiert, ist stetig differenzierbar und löst

$$y'(t) = f(y(t)) \quad (t \in (c,d)). \tag{4}$$

4. [3 Punkte] Finden Sie für ein geeignetes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ eine Lösung von

$$y'(t) = 1 + y(t)^2 \quad (t \in I). \tag{5}$$