UNIVERSITÄT LEIPZIG

# Übungsblatt

Abgabe am:
Montag, 16.01.2023

Marius Müller
Robert Baumgarth
Wintersemester 2022/2023
Punktzahl: $15 + 2^*$ Punkte

## Gewöhnliche Differentialgleichungen: Blatt 12

**1.** [3 Punkte] Es seien $y_1, ..., y_m \in C^1(I; \mathbb{K}^n)$, $m \leqslant n$, Lösungen von $y'(t) = A(t)y(t)$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind

(1) $\{y_1(t), ..., y_m(t)\} \subset \mathbb{K}^n$ linear unabhängig für alle $t \in I$.
(2) Es gibt ein $t_0 \in I$ mit $\{y_1(t_0), ..., y_m(t_0)\} \subset \mathbb{K}^n$ linear unabhängig.
(3) $\{y_1, ..., y_m\}$ linear unabhängig im Vektorraum $C^1(I; \mathbb{K}^m)$.

**2.** [2+2 =4 Punkte]
Es sei $A \in C^0(I; \mathbb{K}^{n\times n})$ und die (DGL) $y'(t) = A(t)y(t), (t \in I)$ gegeben. Es sei $M \in C^1(I; \mathbb{K}^{n\times n})$ eine Fundamentalmatrix und $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ invertierbar.

(a) Zeigen Sie: $\tilde{M} : I \to \mathbb{K}^{n\times n}$ gegeben durch $\tilde{M}(t) := M(t)B$ ist auch eine Fundamentalmatrix.
(b) Ist $\{y_1, ..., y_n\} \subset \mathbb{L}$ eine Basis von $\mathbb{L}$ so definiert $\tilde{M} : I \to \mathbb{K}^{n\times n}$, $\tilde{M}(t) := (y_1(t)|...|y_n(t))$ eine Fundamentalmatrix.

**3.** [3 Punkte] Es sei für $a, b \in C^0(I; \mathbb{K})$ eine DGL der Form

$$y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0 \quad (t \in I) \tag{1}$$

gegeben. Seien $y_1, y_2 \in C^0(I; \mathbb{K})$ zwei linear unabhängige Lösungen. Beweisen Sie: $M : I \to \mathbb{K}^{2\times 2}$ mit

$$M(t) := \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{pmatrix} \tag{2}$$

ist eine Fundamentalmatrix für das DGL-System $z'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{pmatrix} z(t), (t \in I)$. Ferner gilt

$$\det(M(t)) = w[y_1, y_2](t), \tag{3}$$

wobei $w[y_1, y_2]$ die Wronski-Funktion aus Kapitel 1 ist. In Lemma 124 finden Sie eine DGL für $\det(M(t))$ und in Gleichung (244) finden Sie eine DGL für $w[y_1, y_2]$. Vergleichen Sie die beiden DGLs.

**4.** [3+2+2*=5+2* Punkte] *(Wiederholungsaufgabe)*

(a) Zeige: Sind $p, q \in C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ und *positiv homogen vom gleichen Grade* $\alpha > 0$, d. h.

$$p(\lambda t, \lambda y) = \lambda^\alpha p(t, y), \qquad q(\lambda t, \lambda y) = \lambda^\alpha q(t, y) \qquad (\lambda > 0),$$

so ist

$$m(t, y) := \frac{1}{t\, p(t, y) + y\, q(t, y)}$$

ein integrierender Faktor für die DGL $p(t, y(t)) + q(t, y(t))\, y'(t) = 0$ (d.h. die Multiplikation mit $m(t, y(t))$ macht die DGL exakt)

(b) Behandeln Sie das Beispiel $t^4 + y(t)^4 - t\, y(t)^3\, y'(t) = 0$.

*Hinweis.* Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass für ein $\gamma \in \mathbb{R}$ und $f \in C^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}; \mathbb{R})$ homogen vom Grad $\gamma$, d. h. $f(tx) = t^\gamma f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $t > 0$, die *Euler'sche Regel* gilt:

$$\sum_j^n x_j \partial_j f(x) = \gamma \cdot f(x) \qquad (x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}).$$

*Zusatz.* (c) Beweisen Sie die Euler'sche Regel.