UNIVERSITÄT LEIPZIG

Übungsblatt

Abgabe am:
Montag, 24.04.2023

Marius Müller
Bernd Käßemodel
Sommersemester 2023
Punktzahl: 18 Punkte

Funktionentheorie: Blatt 3

1. [1+1+1=3 Punkte]

(a) Finden Sie alle Zahlen $z \in \mathbb{C}$ mit $z^3 = 1 + \sqrt{3}i$.

(b) Beweisen Sie die Formel aus Bemerkung 67.

(c) Skizzieren Sie die Menge $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z^2) \geqslant 1\}$

2. [2+3= 5 Punkte] Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $\zeta_0, ..., \zeta_{n-1}$ die n-ten Einheitswurzeln.

(a) Zeigen Sie

$$\sum_{k=0}^{n-1} \zeta_k^m = 0 \quad \forall m = 1, ..., n-1$$

(b) Zeigen Sie

$$\prod_{k=1}^{n-1} (1 - \zeta_k) = n.$$

(Dass das Produkt bei $k = 1$ losgeht ist kein Schreibfehler!)

3. [2+1+1=4 Punkte] Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $\zeta_0, ..., \zeta_{n-1}$ die n-ten Einheitswurzeln.

(a) Berechnen Sie die Fläche des Dreiecks mit den Eckpunkten $(0, \zeta_k, \zeta_{k+1})$ für $k = 0, ..., n-2$

(b) Bestimmen Sie die Fläche des regelmäßigen $n-$gons mit Eckpunkten $\zeta_0, ..., \zeta_{n-1}$.

(c) Untersuchen Sie das Verhalten für $n \to \infty$ und folgern Sie, dass π die Fläche der komplexen Einheitskugel ist.

4. [1+2+3 = 6 Punkte] Im Folgenden sei wie in der Vorlesung

$$\mathbb{S}^2_{Rm} := \{(\eta_1, \eta_2, \eta_3) : \eta_1^2 + \eta_2^2 + (\eta_3 - \tfrac{1}{2})^2 = \tfrac{1}{4}\}$$

die Riemann'sche Zahlenkugel und ψ die stereographische Projektion gegeben wie in Definition 69.

(a) Zeigen Sie: Für alle $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) \in \mathbb{S}^2_{Rm}$ gilt $\eta_3 \leqslant 1$ und Gleichheit gilt genau dann wenn $\eta = (0, 0, 1)$ der Nordpol ist.

(b) Sei $\mathbb{S}^2_{Rm,-} := \{\eta \in \mathbb{S}^2_{Rm} : \eta_3 < \frac{1}{2}\}$ Zeigen Sie: Dann gilt $\psi(\mathbb{S}^2_{Rm,-}) = B_1(0)$.

(c) Für zwei glatte Kurven $\gamma, \tilde{\gamma} \in C^\infty((-1, 1), \mathbb{R}^n)$ mit $p = \gamma(0) = \tilde{\gamma}(0)$ und $\gamma'(0), \tilde{\gamma}'(0) \neq 0$ definieren wir den *Winkel* zwischen γ und $\tilde{\gamma}$ bei p durch

$$<_p (\gamma, \tilde{\gamma}) := \arccos \frac{\langle \gamma'(0), \tilde{\gamma}'(0) \rangle}{|\gamma'(0)||\tilde{\gamma}'(0)|}.$$

Mit derselben Formel können wir den Winkel für glatte komplexwertige Kurven $\gamma, \tilde{\gamma} : (-1, 1) \to \mathbb{C}$ definieren. Zeigen Sie, dass ψ *winkeltreu* ist, d.h. für alle glatten Kurven $\gamma, \tilde{\gamma} : (-1, 1) \to \mathbb{S}^2_{Rm}$ mit $\gamma(0) = \tilde{\gamma}(0) = p \in \mathbb{S}^2_{Rm} \setminus \{N\}$, $\gamma'(0), \tilde{\gamma}'(0) \neq 0$ gilt

$$<_p (\gamma, \tilde{\gamma}) = <_{\psi(p)} (\psi \circ \gamma, \psi \circ \tilde{\gamma}).$$

Hinweis zur Aufgabe 4(c). Ein hilfreiches Zwischenergebnis ist sicher, dass für $\gamma, \tilde{\gamma}$ gewählt wie in der Aufgabenstellung gilt: $\langle (\psi \circ \gamma)'(0), (\psi \circ \tilde{\gamma})'(0) \rangle_{\mathbb{C}} = \frac{1}{(1-p_3)^2} \langle \gamma'(0), \tilde{\gamma}'(0) \rangle_{\mathbb{R}^3}$.