UNIVERSITÄT LEIPZIG

Übungsblatt

Abgabe am:
Freitag, 21.07.2023

Marius Müller
Bernd Käßemodel
Sommersemester 2023
Punktzahl: 100 Punkte

Funktionentheorie: Klausur

Bearbeitungszeit: 75 Minuten. Erlaubte Hilfsmittel: Ein beidseitig von Hand beschriebenes DIN A4-Blatt. Bitte begründen Sie Ihre Ergebnisse. Schreiben Sie mit einem dokumentenechten Stift (nicht mit rot).

1. [11 Punkte] Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$ so, dass $f(z) = \overline{z}$ komplex differenzierbar ist.

2. [11 Punkte] Es sei $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ mit $f(z) \in i\mathbb{R}$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie: f ist konstant.

3. [11 Punkte] Berechnen Sie

$$\int_{\partial B_1(0)} \frac{1}{(2z-1)e^{2z}} \, \mathrm{d}z.$$

4. [11 Punkte] Berechnen Sie

$$\int_{\partial B_1(\frac{1}{2})} \frac{\cos^2(z)}{z^2} \, \mathrm{d}z.$$

5. [11 Punkte] Berechnen Sie

$$\int_{\partial B_1(0)} \frac{1}{\overline{z}\sinh(z)} \, \mathrm{d}z.$$

6. [11 Punkte] Berechnen Sie

$$\int_{\partial B_1(0)} \frac{1}{(e^z-1)(e^z-3)} \, \mathrm{d}z.$$

7. [11 Punkte] Berechnen Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1} \, \mathrm{d}x.$$

8. [12 Punkte] Berechnen Sie

$$\int_{\partial B_1(0)} \frac{e^z}{\mathrm{Re}(z)-2} \, \mathrm{d}z.$$

9. [11 Punkte] Wahr oder falsch (mit Begründung): Die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) = \overline{z}$ besitzt auf $\mathbb{C}$ eine holomorphe Stammfunktion.

Lösungsvorschlag.

Zu Aufgabe 1. Beachte, dass für $z = x + iy \in \mathbb{C}$

$$f(x+iy) = \overline{x+iy} = x - iy. \tag{1}$$

Somit gilt für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$u(x,y) := \mathrm{Re}(f(x+iy)) = \mathrm{Re}(x-iy) = x \tag{2}$$

und

$$v(x,y) := \mathrm{Im}(f(x+iy)) = \mathrm{Im}(x-iy) = -y. \tag{3}$$

Nun ist f bei $x+iy$ genau dann holomorph, wenn bei (x,y) die Cauchy-Riemann-Gleichungen

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \tag{4}$$

gelten. Mit (2) und (3) berechnen wir

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = -1. \tag{5}$$

Die erste Gleichung in (4) liefert also an jedem Punkt (x,y) die unerfüllbare Bedingung $1 = -1$. Man stellt fest, dass f nirgends komplex differenzierbar ist.

Zu Aufgabe 2. Es sei $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ mit $f(z) \in i\mathbb{R}$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Definiere wieder für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$u(x,y) := \mathrm{Re}(f(x+iy)) \tag{6}$$

und

$$v(x,y) := \mathrm{Im}(f(x+iy)). \tag{7}$$

Da $f(x+iy) \in i\mathbb{R}$ gilt $\mathrm{Re}(f(x+iy)) = 0$ und somit $u \equiv 0$. Die Cauchy-Riemann-Gleichungen liefern

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{und} \\ \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \end{cases} \qquad (\text{auf ganz } \mathbb{R}^2) \tag{8}$$

Man folgert $\nabla v = 0$ auf $\mathbb{R}^2$. Ein Satz aus der Analysis impliziert dann, dass v konstant ist, etwa $v(x,y) = c$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Nun gilt für alle $z = x + iy \in \mathbb{C}$

$$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y) = 0 + ic = ic, \tag{9}$$

womit gezeigt ist, dass f konstant ist.

Zu Aufgabe 3. Wir verwenden in dieser Aufgabe Cauchy's Integralformel: Ist f auf einer offen Obermenge von $\overline{B_1(0)}$ holomorph so gilt für alle $w \in B_1(0)$

$$\int_{\partial B_1(0)} \frac{f(z)}{z-w}\,\mathrm{d}z = 2\pi i f(w). \tag{10}$$

Ehe wir diese Formel verwenden können bedarf es aber einiger Umformungen:

$$\int_{\partial B_1(0)} \frac{1}{(2z-1)e^{2z}}\,\mathrm{d}z = \int_{\partial B_1(0)} \frac{e^{-2z}}{2z-1}\,\mathrm{d}z = \int_{\partial B_1(0)} \frac{1}{2}\frac{e^{-2z}}{z-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}z = \int_{\partial B_1(0)} \frac{\frac{1}{2}e^{-2z}}{z-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}z. \tag{11}$$

Wendet man nun (10) mit $f(z) = \frac{1}{2}e^{-2z}$, $w = \frac{1}{2}$ an, so erhält man

$$\int_{\partial B_1(0)} \frac{1}{(2z-1)e^{2z}}\,\mathrm{d}z = \int_{\partial B_1(0)} \frac{\frac{1}{2}e^{-2z}}{z-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \cdot \tfrac{1}{2}e^{-2\cdot\frac{1}{2}} = \frac{\pi i}{e}. \tag{12}$$

Zu Aufgabe 4. Wir verwenden Goursat's Beobachtung: Ist f auf einer offenen Obermenge von $\overline{B_1(\frac{1}{2})}$ holomorph so gilt für alle $w \in B_1(\frac{1}{2})$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\int_{\partial B_1(\frac{1}{2})} \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}}\,\mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(w). \tag{13}$$

Dies angewendet mit $f = \cos^2$, $w = 0 \in B_1(\frac{1}{2})$ und $n = 1$ liefert

$$\int_{\partial B_1(\frac{1}{2})} \frac{\cos^2(z)}{z^2}\,\mathrm{d}z = \int_{\partial B_1(\frac{1}{2})} \frac{\cos^2(z)}{(z-0)^2}\,\mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{1!}\partial_z(\cos^2(z))\big|_{z=0} = 2\pi i(2\cos(z)(-\sin(z)))\big|_{z=0} = 0. \quad (14)$$

Zu Aufgabe 5. Wir verwenden in dieser Aufgabe den Cauchy'schen Integralsatz: Ist eine Funktion f auf einer offenen Obermenge von $\overline{B_1(0)}$ holomorph, so gilt

$$\int_{\partial B_1(0)} f(z)\,\mathrm{d}z = 0. \quad (15)$$

Zunächst muss aber das Integral entsprechend ungeformt werden, denn derzeit ist der Integrand nicht holomorph. Dazu:

$$\int_{\partial B_1(0)} \frac{1}{\overline{z}\sinh(z)}\,\mathrm{d}z = \int_{\partial B_1(0)} \frac{z}{\overline{z}z\sinh(z)}\,\mathrm{d}z = \int_{\partial B_1(0)} \frac{z}{|z|^2\sinh(z)}\,\mathrm{d}z = \int_{\partial B_1(0)} \frac{z}{\sinh(z)}\,\mathrm{d}z. \quad (16)$$

Man definiere nun $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch

$$g(z) := \begin{cases} \frac{\sinh(z)-\sinh(0)}{z-0} & z \neq 0 \\ \sinh'(0) & z = 0 \end{cases} \quad = \!= \quad \begin{cases} \frac{\sinh(z)}{z} & z \neq 0 \\ 1 & z = 0 \end{cases}. \quad (17)$$

Nach einem Satz aus der Vorlesung ist g auf $\mathbb{C}$ holomorph. Ferner gilt nach (16)

$$\int_{\partial B_1(0)} \frac{1}{\overline{z}\sinh(z)}\,\mathrm{d}z = \int_{\partial B_1(0)} \frac{1}{g(z)}\,\mathrm{d}z. \quad (18)$$

Wir werden nun sehen, dass auch $\frac{1}{g}$ auf einer Obermenge von $\overline{B_1(0)}$ holomorph ist. Dafür muss nur gezeigt werden, dass $g(z) \neq 0$ für alle $z \in \overline{B_1(0)}$. Dazu:

$$\begin{aligned} g(z) = 0 \quad &\underset{(17)}{\Leftrightarrow} z \neq 0 \text{ und } \sinh(z) = 0. && (19)\\ &\Leftrightarrow z \neq 0 \text{ und } \frac{e^z - e^{-z}}{2} = 0. && (20)\\ &\Leftrightarrow z \neq 0 \text{ und } e^z = e^{-z}. && (21)\\ &\Leftrightarrow z \neq 0 \text{ und } e^{2z} = 1. && (22)\\ &\Leftrightarrow z \neq 0 \text{ und } 2z = 2k\pi i \text{ für ein } k \in \mathbb{Z}. && (23)\\ &\Leftrightarrow z \neq 0 \text{ und } z = k\pi i \text{ für ein } k \in \mathbb{Z}. \quad \Leftrightarrow \quad z = k\pi i \text{ für ein } k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. && (24) \end{aligned}$$

Nun gilt für $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, dass $|k\pi i| = |k|\pi \geqslant \pi$. Somit gibt es in $B_\pi(0)$ keine Nullstellen von g und daher ist $\frac{1}{g}$ auf $B_\pi(0) \supset \overline{B_1(0)}$ holomorph. Es folgt aus (18) und (15) (mit $f = \frac{1}{g}$)

$$\int_{\partial B_1(0)} \frac{1}{\overline{z}\sinh(z)}\,\mathrm{d}z = \int_{\partial B_1(0)} \frac{1}{g(z)}\,\mathrm{d}z = 0. \quad (25)$$

Zu Aufgabe 6. Wir machen zunächst eine Partialbruchzerlegung der rationalen Funktion $\frac{1}{(w-1)(w-3)}$. Dazu bestimmen wir A, B so, dass für alle $w \in \mathbb{C} \setminus \{1, 3\}$

$$\frac{1}{(w-1)(w-3)} \stackrel{!}{=} \frac{A}{w-1} + \frac{B}{w-3}. \quad (26)$$

Bringen wir die Terme auf der rechten Seite auf einen gemeinsamen Nenner so folgt

$$\frac{1}{(w-1)(w-3)} = \frac{A(w-3)}{(w-1)(w-3)} + \frac{B(w-1)}{(w-1)(w-3)} = \frac{A(w-3) + B(w-1)}{(w-1)(w-3)}. \quad (27)$$

Erweitern wir mit $(w-1)(w-3)$ so finden wir

$$1 = A(w-3) + B(w-1) = (A+B)w - 3A - B \qquad \forall w \in \mathbb{C} \setminus \{1, 3\}. \quad (28)$$

Vergleichen wir die Koeffizienten, so ergibt sich, dass eine passende Wahl für A, B das Gleichungssystem

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -3A - B = 1 \end{cases} \quad (29)$$

löst. Die erste Gleichung ist äquivalent zu $A = -B$. Dies in die zweite Gleichung eingesetzt liefert $1 = -3A - B = 3B - B = 2B$, also $B = \frac{1}{2}$. Daraus folgt dann auch $A = -B = -\frac{1}{2}$. Man erhält mit (26)

$$\frac{1}{(w-1)(w-3)} = \frac{-\frac{1}{2}}{w-1} + \frac{\frac{1}{2}}{w-3} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{w-3} - \frac{1}{w-1}\right). \tag{30}$$

Diese Erkenntnis (mit $w = e^z$) erlaubt uns, das gegebene Integral umzuformen. Wir erhalten

$$\int_{\partial B_1(0)} \frac{1}{(e^z-1)(e^z-3)}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\int_{\partial B_1(0)} \frac{1}{e^z-3}\,\mathrm{d}z - \frac{1}{2}\int_{\partial B_1(0)} \frac{1}{e^z-1}\,\mathrm{d}z. \tag{31}$$

Um diese Integrale zu untersuchen, müssen wir verstehen, ob und wo die Integranden holomorph sind. Dazu untersuchen wir die Nullstellen der Nenner der Integranden. Für das erste Integral:

$$e^z - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^z = e^{\log(3)} \quad \Leftrightarrow \quad z = \log(3) + 2k\pi i \quad (k \in \mathbb{Z}). \tag{32}$$

Diese Nullstellen liegen allesamt nicht in $\overline{B_1(0)}$, denn wegen der Monotonie des reellen Logarithmus auf $\mathbb{R}$ gilt für alle $k \in \mathbb{Z}$

$$|\log(3) + 2k\pi i| = \sqrt{\log^2(3) + 4k^2\pi^2} \geqslant \log(3) > \log(e) = 1. \tag{33}$$

Somit ist $z \mapsto \frac{1}{e^z-3}$ auf einer offenen Obermenge von $\partial B_1(0)$ holomorph. Daher gilt

$$\int_{\partial B_1(0)} \frac{1}{e^z-3}\,\mathrm{d}z = 0 \tag{34}$$

Für des zweite Integral geht man so vor:

$$e^z - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^z = 1 \quad \Leftrightarrow \quad z = 2k\pi i \quad (k \in \mathbb{Z}). \tag{35}$$

Nur die Nullstelle $z = 0$ liegt in $\overline{B_1(0)}$ denn für $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ gilt

$$|2k\pi i| = 2|k|\pi \geqslant 2\pi. \tag{36}$$

Wir folgern: Die Funktion $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$h(z) = \begin{cases} \frac{e^z-1}{z-0} & z \neq 0 \\ \exp'(0) & z = 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{e^z-1}{z} & z \neq 0 \\ 1 & z = 0 \end{cases} \tag{37}$$

ist auf $\mathbb{C}$ holomorph und erfüllt $h(z) \neq 0$ für alle $z \in B_{2\pi}(0)$. Daher ist auch $\frac{1}{h}$ auf $B_{2\pi}(0)$ holomorph. Mit der Cauchy-Integralformel gilt dann

$$\int_{\partial B_1(0)} \frac{1}{e^z-1}\,\mathrm{d}z = \int_{\partial B_1(0)} \frac{\frac{z}{e^z-1}}{z}\,\mathrm{d}z = \int_{\partial B_1(0)} \frac{\frac{1}{h(z)}}{z}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \frac{1}{h(0)} = 2\pi i. \tag{38}$$

Gleichungen (31), (34) und (38) liefern dann

$$\int_{\partial B_1(0)} \frac{1}{(e^z-1)(e^z-3)}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\int_{\partial B_1(0)} \frac{1}{e^z-3}\,\mathrm{d}z - \frac{1}{2}\int_{\partial B_1(0)} \frac{1}{e^z-1}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\cdot 0 - \frac{1}{2}(2\pi i) = -\pi i. \tag{39}$$

Zur Aufgabe 7. Lösungsweg 1. Ein möglicher Lösungsweg ergibt sich rein mit der reellen Analysis: Die Funktion $x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$ hat auf $\mathbb{R}$ die Stammfunktion $x \mapsto \arctan(x)$. Somit gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = [\arctan(x)]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi. \tag{40}$$

Lösungsweg 2. Mit der Theorie aus der Vorlesung wäre es wie folgt lösbar. Für die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$f(z) = \frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z-i)(z+i)} \tag{41}$$

gilt $\mathrm{Iso}(f, \mathbb{C}\backslash\{i,-i\}) = \{i,-i\}$. Es folgt (mit $\mathbb{H}^+ := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$), dass $\mathrm{Iso}(f, \mathbb{C}\backslash\{i,-i\}) \cap \mathbb{H}^+ = \{i\}$. Nach einem Satz aus der Vorlesung gilt (da $f = \frac{p}{q}$ für Polynome die $p(z) = 1$, $q(z) = z^2 + 1$ mit $\deg(p) \leqslant \deg(q) - 2$)

$$p.v.\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{w \in \mathrm{Iso}(f, \mathbb{C}\backslash\{i,-i\}) \cap \mathbb{H}^+} \mathrm{Res}(f, w) = 2\pi i \mathrm{Res}(f, i). \tag{42}$$

Mit (41) sieht man leicht, dass f bei i eine Polstelle der Ordnung 1 hat und daher

$$\operatorname{Res}(f,i) = \lim_{z\to i}(z-i)f(z) = \lim_{z\to i}(z-i)\frac{1}{(z-i)(z+i)} = \lim_{z\to i}\frac{1}{z+i} = \frac{1}{2i}. \tag{43}$$

Man erhält

$$p.v. \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi i \frac{1}{2i} = \pi. \tag{44}$$

Man sieht außerdem leicht, dass f auf $\mathbb{R}$ integrierbar ist, denn

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 \underbrace{\frac{1}{1+x^2}}_{\leqslant 1}\,\mathrm{d}x + 2\int_1^{\infty}\underbrace{\frac{1}{1+x^2}}_{\leqslant \frac{1}{x^2}}\,\mathrm{d}x \tag{45}$$

$$\leqslant \int_0^1 1\,\mathrm{d}x + \int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = 1 + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{\infty} = 1+1 = 2 < \infty. \tag{46}$$

Mit dieser Erkenntnis ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = p.v. \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \pi. \tag{47}$$

Zu Aufgabe 8. Da $z \mapsto \operatorname{Re}(z)$ nicht holomorph ist formen wir zunächst um

$$\int_{\partial B_1(0)} \frac{e^z}{\operatorname{Re}(z)-2}\mathrm{d}z = \int_{\partial B_1(0)} \frac{e^z}{\frac{1}{2}(z+\overline{z})-2}\mathrm{d}z = \int_{\partial B_1(0)} \frac{e^z}{\frac{1}{2}(z+\frac{|z|^2}{z})-2}\mathrm{d}z \tag{48}$$

$$= \int_{\partial B_1(0)} \frac{e^z}{\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})-2}\mathrm{d}z = \int_{\partial B_1(0)} \frac{2e^z}{z+\frac{1}{z}-4}\mathrm{d}z = \int_{\partial B_1(0)} \frac{2ze^z}{z^2+1-4z}\mathrm{d}z. \tag{49}$$

Wir zerlegen nun den Nenner $z \mapsto z^2-4z+1$ in Linearfaktoren. Dazu ergänzen wir quadratisch

$$z^2-4z+1 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad z^2-4z+4 = 3 \quad\Leftrightarrow\quad (z-2)^2 = 3 \quad\Leftrightarrow\quad (z-2) = \pm\sqrt{3} \quad\Leftrightarrow\quad z = 2\pm\sqrt{3}. \tag{50}$$

Nun gilt

$$2+\sqrt{3} > 2 > 1. \quad \Rightarrow 2+\sqrt{3} \notin \overline{B_1(0)}. \tag{51}$$

Außerdem:

$$2-\sqrt{3} < 2-\sqrt{1} = 2-1 = 1 \quad \text{und} \quad 2-\sqrt{3} > 2-\sqrt{4} = 0. \quad \Rightarrow 2-\sqrt{3} \in B_1(0). \tag{52}$$

Mit diesen Informationen können wir den Ausdruck so umformen, dass der Cauchy'sche Integralsatz anwendbar wird.

$$\int_{\partial B_1(0)} \frac{2ze^z}{z^2+1-4z}\mathrm{d}z = \int_{\partial B_1(0)} \frac{2ze^z}{(z-(2-\sqrt{3}))(z-(2+\sqrt{3}))}\mathrm{d}z = \int_{\partial B_1(0)} \frac{\frac{2ze^z}{z-(2+\sqrt{3})}}{z-(2-\sqrt{3})}\mathrm{d}z \tag{53}$$

Nun ist $f(z) := \frac{2ze^z}{z-(2+\sqrt{3})}$ holomorph auf einer offenen Obermenge von $\overline{B_1(0)}$. Deswegen liefert die Cauchy'sche Integralformel

$$\int_{\partial B_1(0)} \frac{2ze^z}{z^2+1-4z}\mathrm{d}z = 2\pi i f(2-\sqrt{3}) = 2\pi i \frac{2(2-\sqrt{3})e^{2-\sqrt{3}}}{2-\sqrt{3}-(2+\sqrt{3})} = -\frac{2\pi i}{\sqrt{3}}(2-\sqrt{3})e^{2-\sqrt{3}}. \tag{54}$$

Zu Aufgabe 9. Die Behauptung ist falsch. Angenommen f besäße eine Stammfunktion auf $\mathbb{C}$, etwa sei $F \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ mit $F' = f$. Nach Goursat's Beobachtung folgt aus $F \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ aber auch $F' \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Daher würde gelten $f = F' \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Jedoch haben wir in Aufgabe 1 bereits gezeigt, dass f nirgends komplex differenzierbar ist. Ein Widerspruch.