
Funktionentheorie: Blatt 7

1. [2+2=4 Punkte]

(a) Berechnen Sie

$$\int_{\partial B_1(0)} \frac{1}{z} dz \quad (1)$$

und

$$\int_{\partial B_6(5i)} \frac{1}{z} dz. \quad (2)$$

(b) Zeigen Sie: Es gibt keine Funktion $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ mit $g'(z) = \frac{1}{z}$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

2. [1+1+1+1=4 Punkte] Es sei $f \in \mathcal{H}(D)$. Ferner sei $f' : D \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Ferner sei $a \in D$

(a) Zeigen Sie (ohne Verwendung von Korollar 145)

$$\frac{d}{dr} \int_{\partial B_r(a)} \frac{f(z)}{z-a} dz = 0 \quad \forall r \in (0, \text{dist}(a, \mathbb{C} \setminus D)). \quad (3)$$

(b) Folgern Sie Korollar 145.

(c) Folgern Sie auch folgenden Spezialfall der *Cauchy-Integralformel*

$$\int_{\partial B_r(a)} \frac{f(z)}{z-a} dz = 2\pi i f(a) \quad \forall r > 0. \quad (4)$$

(d) Folgern Sie auch den Cauchy-Integralsatz (Korollar 146)

QUINTESSENZ: HÄTTEN WIR ANNEHMEN DÜRFEN, DASS f' STETIG IST, WÄRE VIELES IN DER VORLESUNG EINFACHER... MANCHE BÜCHER SETZEN DAS SOGAR VORAUS!

3. [1+1+2+1+2=7 Punkte] Berechnen Sie die nachstehenden Integrale mithilfe des Cauchy'schen Integralsatzes und der Cauchy'schen Integralformel

(a)

$$\int_{\partial B_1(0)} \frac{e^z \cos(2\pi z)^2}{z - \frac{1}{2}} dz.$$

(b)

$$\int_{\partial B_3(1)} \frac{\sin(z^4 + 1)}{z - 7} dz.$$

(c)

$$\int_{\partial B_2(0)} \frac{1}{z(z-1)} dz.$$

(d)

$$\int_{\partial B_4(0)} \frac{1}{z^2 - 5z + 6} dz.$$

(e)

$$\int_{\partial B_2(0)} \frac{\bar{z}}{z-1} dz.$$